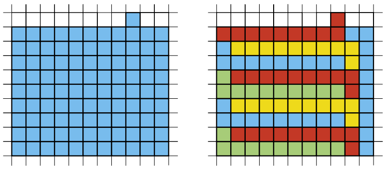
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 10)

6. *Семеро девочек стоят в ряд, как показано на рисунке, и держат в руках конфеты. У девочек, которых вы видите справа от Тани – 13 конфет, справа от Ксюши – 33, справа от Ани – 23, справа от Иры – 8, справа от Вали – 27, справа от Нади – 16. Сколько конфет у Кати?*

Ответ: 8.

Справа от каждой девочки, кроме Кати, есть кто-то с конфетами. Поэтому Катя – крайняя справа. Чем правее девочка, тем меньше общее число конфет у тех, кого мы видим ещё правее. Значит, второй справа стоит Ира, а 8 конфет справа от неё – это конфеты Кати.

7. *Разрежьте синюю фигуру, изображённую на рисунке слева, на 10 равных частей.*



Ответ приведён на рисунке справа.

8. *Можно ли разложить несколько яблок по 10 тарелкам так, чтобы на любых двух тарелках было вместе либо 5, либо 8, либо 11 яблок и все три варианта встречались? Если да, то сколько всего могло быть яблок? Укажите все возможности.*

Ответ: 40 яблок.

Условия выполняются, если на тарелках лежит 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 7 яблок. Покажем, что других возможностей нет.

Среди десяти чисел (количеств яблок на тарелках) всегда найдутся минимум пять чисел одной чётности. Сумма любых двух из них чётна, и значит, равна 8 (варианты 5 и 11 не подходят). То есть сумма любых двух из них одна и та же. Значит, все эти числа равны (иначе сумма двух наибольших не равнялась бы сумме двух наименьших), и равны 4. Остальные числа нечётные, и это должны быть 1 и 7, чтобы мы получили в сумме 5 и 11. И 1, и 7 встречаются ровно один раз, иначе сумма каких-то двух из них будет 2 или 14. Значит, четвёрок всего 8.

9. *Вася знает, что если в треугольнике провести три средние линии, то получатся четыре одинаковых треугольника. Он решил, что если в тетраэдре (треугольной пирамиде) провести через середины рёбер четыре «средние плоскости», то получатся пять одинаковых тетраэдров поменьше. А что получится на самом деле? Сколько вершин и граней будет у этих многогранников?*

Ответ: четыре тетраэдра и октаэдр.

От каждого «угла» мы отрежем вдвое меньший тетраэдр. Что останется? У этого тела будет 8 треугольных граней: 4 грани – это разрезы, а ещё 4 – это остатки граней исходного тетраэдра, ведь от каждой грани мы отрезали 3 угловых вдвое меньших треугольника, и один посередине остался. Полученная фигура называется октаэдр. У октаэдра 6 вершин и в каждой вершине сходится 4 треугольные грани.

10. *Трое рабочих вырыли яму. Они работали по очереди, причём каждый проработал столько времени, сколько нужно было бы двум другим, чтобы вместе вырыть половину ямы. Во сколько раз быстрее они вырыли бы яму, работая все вместе?*

Ответ: 2,5.

Представим, что рабочие рыли две ямы: «настоящую» (ту, что в условии) и «запасную». А именно: пока очередной рабочий рыл настоящую яму, другие два в это время рыли запасную. Тогда каждая пара рабочих углубит запасную яму на половину настоящей ямы. В итоге запасная яма окажется в полтора раза глубже настоящей. Получается, что трое рабочих, непрерывно работая, вырыли суммарно в 2,5 раза больше, чем если бы они работали поочерёдно, потратив суммарно то же время и вырыв настоящую яму. Поэтому на то, чтобы вырыть настоящую яму вместе, у них уйдёт в 2,5 раза меньше времени.

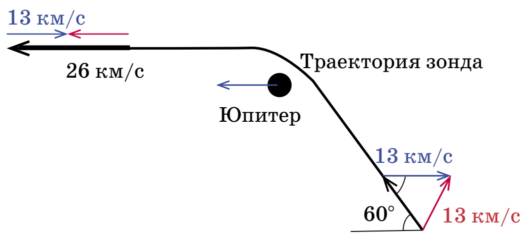
ПРИГЛАШЕНИЕ К ПУТЕШЕСТВИЮ («Квантик» № 11)

2. Ответ: 30 км/час ≈ 9 м/с.

3. При сближении с планетой космический корабль набирает большую скорость, поскольку он «почти что падает» на неё – ведь планета притягивает его чем ближе, тем сильнее. А потом, улетая от неё, он эту скорость теряет – она тратится на преодоление притяжения. Так же лыжник, съехав в овражек, с разгона въезжает на противоположный склон. (Так и говорят – космический аппарат падает в потенциальную яму планеты, а потом из неё выбирается.) В масштабе рисунка этот резкий пик скорости сливается в палочку. Если бы планета стояла на месте, конечная скорость после встречи с ней совпала бы со скоростью до встречи, и был бы просто пик, а дальше – продолжение той же кривой, что раньше. А из-за движения планеты получается «ступенька» – гравитационный разгон.

Массы Урана и Нептуна (и, значит, их потенциальные ямы) примерно одинаковы, но пик скорости возле Урана ниже – значит, «Вояджер-1» пролетал от Урана на гораздо бóльшем расстоянии. Он только «чиркнул» по краешку потенциальной ямы. Кстати, заметили – при встрече с Нептуном он не только не разогнался, а даже потерял скорость?

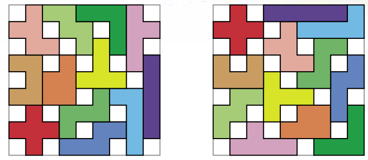
4. а) После манёвра зонд летит в ту же сторону, что и Юпитер. Значит, скорость зонда относительно Юпитера (то, что в истории с муравьём называлось $v+u$) равна $26-13=13$ км/с. Такой же она была и до встречи с планетой, но куда она была направлена – мы пока не знаем. Когда скорости не параллельны, их нужно складывать не просто так, а «как векторы»: пририсовать скорость Юпитера, взятую с обратным знаком (синяя стрелка), к скорости зонда относительно Солнца (чёрная стрелка). Получится скорость зонда относительно Юпитера – красная стрелка. (Проверьте, что при таком способе для параллельных скоростей получаются правильные ответы!) Теперь посмотрим на получившийся «до встречи с Юпитером» треугольник из скоростей: он равнобедренный, потому что красная и синяя стрелки одинаковой длины (13 км/с), и один из его углов равен 60°. Значит, он равносторонний, и чёрная стрелка – скорость зонда до манёвра – тоже 13 км/с. Так что выигрыш в скорости составил 13 км/с, зонд ускорился в 2 раза.



б) В этом случае угол 45°, так что равнобедренный треугольник оказался прямоугольным: относительно Юпитера зонд повернулся ровно на 90°. По теореме Пифагора длина чёрной стрелки – начальная скорость зонда – равна $\sqrt{2}\cdot 13$ км/с ≈ 18 км/с.

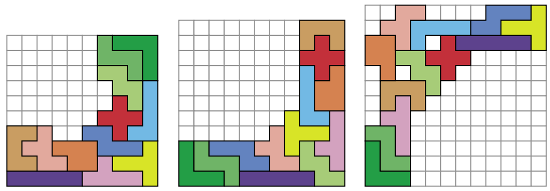
ПЕНТАМИНО – НОВЫЕ ЗАДАЧИ («Квантик» № 11)

Изолированные квадраты, примеры:



Поле 9 × 9, 21 квадрат

Симметричные антислайды, примеры:



Поле 10×10 Поле 11×11 Поле 12×12

КУРИНАЯ ЭПОПЕЯ («Квантик» № 11)

1. Снесённых яиц было, с одной стороны, mx (где x – количество кур), а с другой – каждая курица, кроме самой первой, вылупилась из яйца, снесённого курами же, да ещё добавим n петухов, поэтому яиц было $x-1+n$. Получаем уравнение: $mx=x-1+n$, и потому $x=\frac{n-1}{m-1}$.

2. В уравнении из ответа на первый вопрос $mx=x-1+n$ будем считать, что значение x нам *задано*, а величину n мы не знаем. Тогда однозначно получаем, что $n=(m-1)x+1$.

ШАРИК И СТАКАНЧИКИ («Квантик» № 11)

Стаканчики присасываются к шарику так же, как это делают обычные присоски на лобовое стекло машины (например, для держателей телефона). Присоска крепится к стеклу своей маленькой полостью, в которой воздух более разреженный, чем в атмосфере. Придавливает присоску атмосферный воздух. Почему он это делает? Любой газ стремится занять весь доступный объём, и у более плотного газа это стремление сильнее. Вот и воздух внутри и снаружи присоски давит на её стенку, но тот, что снаружи, давит сильнее.

Почему же в стаканчиках воздух разреженный? А вот почему. Когда мы прижали стаканчики к слабо надутому шарику, воздух в стаканчиках оказался заперт резиновой плёнкой. Пока шарик надувается, кривизна его поверхности уменьшается – он становится «менее выпуклым» и «более плоским», а значит, объём воздуха в стаканчике увеличивается – воздух разрежается.

ЭФФЕКТ БАБОЧКИ

Предположим, что «Лидер» одержал всего две победы, и как раз в матчах с двумя самыми слабыми командами, но проиграл команде, занявшей второе место, а все остальные матчи в турнире закончились вничью (в частности, «Лидер» сыграл вничью 12 из 15 матчей). Тогда до дисквалификации «Лидер» набрал $3+3+0+12=18$ очков, а все остальные команды – не более, чем $3+14=$ $=17$ очков (в частности, ровно 17 очков набрала команда, занявшая второе место). В результате дисквалификации «Лидер» потерял больше всех, ведь у него отобрали две победы. В итоге «Лидер» набрал лишь 12 очков, а каждая из остальных 13 команд (без «Лидера» и двух дисквалифицированных команд) – по крайней мере 13 очков. В результате «Лидер» занял последнее место!

ФЕДЯ, ДАНЯ И КЭРРОЛЛ

1) Так как часы в Гринвиче как раз и показывают точное время, чтобы узнать, когда наступает полдень, достаточно съездить 31 июля в Гринвич и посмотреть, когда тамошние часы покажут время 12.00. Это и будет нужный момент.

2) Определим момент, когда стенные часы показывали точное время. Как мы уже знаем, 1 июля в 12 ч 5 мин стенные часы отставали от точного времени на 3 минуты, или 180 секунд. Но затем они компенсировали отставание – по 11 секунд за каждые сутки. Поэтому для достижения точного времени им потребуется $(180:11)$ суток, или же 16 суток 8 часов 43 минуты $38\frac{2}{11}$ секунды. Добавив эту величину к 12 ч 5 мин 1 июля, получаем, что искомый момент наступил 17 июля в 20 ч 48 мин $38\frac{2}{11}$ с.

3) Решение основывается на двух всем известных фактах:

– угловая скорость вращения часовой стрелки в 12 раз меньше, чем минутной;

– минутная стрелка всегда *длиннее* часовой.

Следовательно, если скорость движения конца минутной стрелки равна v, то скорость движения конца часовой стрелки заведомо *меньше* $\frac{1}{12}v$. Поэтому относительная скорость концов стрелок лежит в пределах от $\frac{11}{12}v$ до $\frac{13}{12}v$, и отношение относительных скоростей в любые два момента времени больше $\frac{11}{13}$, но меньше $\frac{13}{11}$. А так как $\frac{5}{6}<\frac{11}{13}$, то относительная скорость не может составить 5 мм/с.

КАБЛУКОВ, ШОПЕН, УАЙЛЬД

Придумана история про Шопена. Пианисты не выступают в перчатках, пусть и очень красивых.

КОФЕ КАК ПОГНУТЫЙ КЛЮЧ

Поскольку угарный газ связывается в 200 раз прочнее, то равное количество гемоглобина, связанного с кислородом и с угарным газом, достигается при концентрации последнего в 200 раз меньшей. (Примем, что в норме весь гемоглобин, проходя через лёгкие, связывается с кислородом.) 1/200 от 21% – это 0,105%. При такой концентрации угарного газа наступает тяжёлое отравление.

ПРИКЛЮЧЕНИЯ МАЙОРА ПРОНЬКИНА

Кисломолочные коровы. Мухлюндер солгал – лёд в стакане за час должен был растаять.

Дело о кар-птице. Сыщик не сказал, какую именно птицу украли, и поэтому Бульдозер не мог знать её название. Сказав про кар-птицу, он выдал себя.

XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР

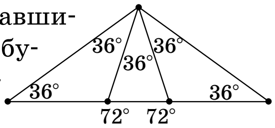
БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ, 8–9 КЛАССЫ

1. Ответ: не могло.

Рассмотрим сумму S полученных десяти сумм. Если эти суммы оканчиваются на десять разных цифр, то число S нечётно. Но каждое из исходных пяти чисел входит в четыре суммы, поэтому число S чётно. Противоречие.

2. Ответ: все шесть.

Возьмём равнобедренный треугольник с углом 108°. Поделим этот угол на три равных (как на рисунке). Образовавшиеся шесть треугольников будут, очевидно, равнобедренными.

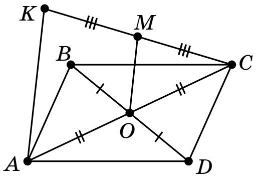


3. а) Найдутся две соседние точки с номерами разной чётности. Соединим их и мысленно удалим. Из оставшихся точек снова можно выбрать две соседние и так далее. В итоге все точки разобьются на нужные пары.

б) **Ответ:** не верно.

Занумеруем точки подряд по возрастанию. Пусть их можно разбить. Рассмотрим любой отрезок, соединяющий два числа одной чётности. Он разобьёт оставшиеся точки на две группы с нечётным числом точек в каждой, и ни в одной группе точки на пары уже разбить не удастся.

4. Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK ($OM=$ $=\frac{1}{2}AK$ и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны: $BD=$ $=AK$. Но тогда угол BMD прямой.



Замечание. Если $AK \parallel BD$, то треугольник BMD вырождается и угол BMD не имеет смысла.

5. Ответ: 100 ягод.

У каждого медвежонка останется хотя бы одна ягода, потому что в каждой делёжке участвуют хотя бы две ягоды. Поэтому меньше 100 ягод у медвежат остаться не может.

Как лисе оставить каждого с одной ягодой?

Пусть к лисе сначала подойдут два младших медвежонка. У самого младшего уже одна ягода. Лиса уравняет их ягоды (у них в сумме 3 ягоды), и будет уже два медвежонка с одной ягодой.

Имея двух медвежат с одной ягодой и следующего с 4 ягодами, лиса сможет каждого оставить с одной ягодой: $(1,1,4) \to (1,2,2) \to (1,1,2) \to (1,1,1)$.

Затем лиса зовёт медвежонка с 8 ягодами и сначала делает так: $(1,1,1,8) \to (1,1,4,4)$. Лиса уже умеет оставлять каждого медвежонка с одной ягодой, если у двух было по 1 ягоде, а у одного 4. Лиса так и сделает: $(1,1,4,4) \to (1,1,1,4)$. А потом ещё раз: $(1,1,1,4) \to (1,1,1,1)$. Итак, уже четыре младших медвежонка с одной ягодой.

Дальше лиса будет действовать аналогично. Почему это у неё получится? Докажем, что лиса сможет оставить ровно одну ягоду медвежонку с 2^n ягодами, если есть ещё $n-1$ медвежат с одной ягодой. Будем предполагать, что на предыдущих шагах этого алгоритма она уже научилась делать аналогичную процедуру для всех меньших n.

Лиса уравняет медвежат с 1 и с 2^n ягодами, от этого у них станет по 2^{n-1} ягод. Кроме них осталось $n-2$ медвежонка с 1 ягодой. А лиса уже умеет с их помощью добиваться того, чтобы у медвежонка с 2^{n-1} ягодами осталась только одна. После этого она так же добьётся того, чтобы и у другого медвежонка стала только 1 ягода.

Так лиса может увеличивать число медвежат с одной ягодой, пока других не останется.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ВАРИАНТА, 8 – 9 КЛАССЫ

1. Ответ: после 45 действий.

Рассмотрим любых двух детей, например, Петю и Васю. Ходы других детей одинаково изменяют количества макаронин у Пети и Васи. Поэтому если Петя и Вася сделали поровну действий, то и макаронин у них будет поровну, а если они сделали разное число действий, то и макаронин у них будет разное число.

Значит, чтобы у всех стало разное количество макаронин, все должны сделать разное число действий, то есть всего хотя бы $0+1+2+ +\ldots+9=45$.

Отсюда получаем и пример на 45 действий: первый делает одно действие, затем второй – 2, третий – 3, и т. д. до девятого включительно (десятый не делает ничего). Каждый при этом отдал не более $9 \cdot 9 = 81$ макаронины, то есть его исходных 100 макаронин на это хватило.

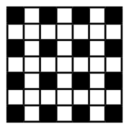
2. Ответ: может.

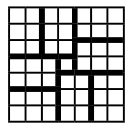
Запишем в чёрных клетках единицы, а в белых клетках – все числа от 1 до 32. При любом разбиении на доминошки в каждой будет ровно одна белая и одна чёрная клетка. Поэтому суммы в доминошках будут 2, 3, ..., 33.

Замечание. Существует пример, когда наибольшее число равно 21, а также известно, что оно не может быть меньше 20.

3. Рассмотрим два закрашенных треугольника с общей вершиной A. Они симметричны относительно A. Их высоты, выходящие из A, перпендикулярны TA, где T – центр большого треугольника. Значит, их ортоцентры симметричны относительно TA. Поэтому расстояние от T до этих ортоцентров одно и то же. Поскольку это верно для любой пары соседних закрашенных треугольников, то ортоцентры всех этих треугольников равноудалены от T.

4. Ответ: 32 конфеты.





При раскладке, указанной на левом рисунке, ни одну из 16 чёрных конфет съесть нельзя, а из 33 белых можно съесть не больше 32 в силу чётности.

Покажем, что 32 конфеты можно съесть при любой раскладке. В трёхклеточном уголке всегда можно съесть пару конфет. Значит, в прямоугольнике 2×3 можно съесть 4 конфеты. В квадрате 7×7 можно разместить 8 таких прямоугольников (рис. справа).

5. Ответ: всегда.

Все искомые числа различны, иначе на карточках некоторые числа были бы равны. Так как их попарные произведения положительны, то все числа одного знака, а так как их попарные суммы положительны, то этот знак плюс. Обозначим искомые числа $x<y<z$. Для карточек каждого цвета рассмотрим отношение наибольшего числа к наименьшему. В одном случае это $\frac{y+z}{x+y}$, в другом $\frac{z}{x}$. Так как $x<z$ и $y>0$, то первое отношение меньше второго. Отсюда понятно, на каких карточках написаны суммы и на каких произведения. Знание попарных сумм трёх чисел определяет эти числа, например, $x=\frac{1}{2}((x+y)+(x+z)-(y+z))$.