№ 12 | декабрь 2022
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12
декабрь 2022

ОДНОСТОРОННИЙ ТРАМВАЙ

МОРОЗ И СОЛНЦЕ

ЗАГАДКА УГРЕЙ

Enter

«КВАНТИК» НАГРАЖДЁН БЕЛЯЕВСКОЙ ПРЕМИЕЙ

Журнал «КВАНТИК» стал лауреатом
Литературной премии имени Александра Романовича Беляева
(Беляевской премии) по итогам 2021 года в номинации

**«Журнал, периодическое издание –
за наиболее интересную деятельность в течение года».**

Награждение прошло **8 октября 2022 года** в городе Пушкин (Санкт-Петербург).

Беляевская премия названа в честь знаменитого писателя-фантаста
Александра Романовича Беляева.
Она присуждается ежегодно за достижения в области просветительской литературы
и вручается от имени Беляевского фонда поддержки и развития литературы.

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК» НА 2023 ГОД

- **в почтовых отделениях по электронной и бумажной версии Каталога Почты России:**

индекс **ПМ068** – по месяцам полугодия

индекс **ПМ989** – годовая подписка (принимается до 20.12.2022)

- **онлайн-подписка на сайтах:**

Почты России:
podpiska.pochta.ru/ПМ068

агентства АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

онлайн вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников; подписку можно подарить им на Новый год.

Подробнее обо всех вариантах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

Настенный перекидной календарь с интересными задачами-картинками от журнала "Квантик" – хороший подарок друзьям, близким и коллегам!

**Приобрести календарь
и другую продукцию «Квантика»**
можно в магазине «Математическая книга»
(г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11),
в интернет-магазинах:
biblio.mccme.ru, kvantik.ru, ozon.ru, WILDBERRIES,
Яндекс.маркет и других
(полный список магазинов на kvantik.com/buy)

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 28.10.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Игорь Акулич

ПИКОВОЕ ЗАНЯТИЕ

– Сегодняшнее наше занятие – *Пиковое*. Но не надейтесь, что я сейчас достану из кармана колоду карт. Наше занятие – Пиковое *с большой буквы*. И названо в честь австрийского математика XIX–XX веков Георга Александра Пика. Он занимался самыми разными проблемами, порой очень сложными. Математикам известны *матрица Пика*, *интерполяция Пика* и многое другое. Но наиболее широко он прославился *формулой Пика*, позволяющей определять площади многоугольников на квадратной сетке.

Поясню вкратце для тех, кто не в курсе. Пусть бесконечная плоскость разбита вертикальными и горизонтальными прямыми на одинаковые квадраты площади 1 каждый. Назовём *узлами* вершины квадратов и нарисуем произвольный многоугольник, все вершины которого лежат в узлах. Стороны многоугольника не обязаны быть вертикальными или горизонтальными (хотя это и допускается). Подсчитаем количество $В$ узлов, попавших *строго внутрь* многоугольника, и количество $Г$ узлов, оказавшихся *на его границе*. Последними будут, безусловно, все вершины многоугольника (по условию), а возможно, и ещё какие-то узлы, попавшие на стороны. Так, пятиугольник на рисунке 1 имеет 8 узлов внутри (отмечены красным), то есть $В = 8$, и 9 узлов на границе (синие), то есть $Г = 9$.

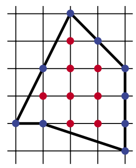


Рис. 1

Оказывается, площадь любого многоугольника с вершинами в узлах зависит *только* от значений $В$ и $Г$ и вычисляется по формуле

$$S = В + 0{,}5Г - 1.$$

Это и есть знаменитая формула Пика. Именно её красота покорила весь мир. Говорят, в Германии она даже включена в школьную программу (у нас пока нет). Для пятиугольника на рисунке 1 получаем

$$S = 8 + 0{,}5 \cdot 9 - 1 = 11{,}5.$$

Доказательство формулы Пика не простое, но и не слишком сложное. Его можно найти на страницах и «Кванта», и «Квантика». Мы на это отвлекаться не будем – кто любопытен, сам найдёт и прочтёт. Отметим только, что аналоги формулы Пика имеются и для других видов бесконечной сетки – например, треугольной.

Мы же с вами займёмся другим делом – осуществим *переход от точек к отрезкам*.

– Это как?

– Сейчас объясню. Формула Пика носит, образно говоря, *точечный характер*, ибо в ней мы подсчитываем точки, лежащие внутри и на границе многоугольника. Давайте аналогичные действия произведём с *отрезками самой сетки*, попавшими внутрь многоугольника либо совпавшими с какими-то его сторонами. Сначала – по горизонтали. В рассмотренном нами пятиугольнике выделим красным кусочки горизонтальных линий сетки, попавшие внутрь, и синим – горизонтальные стороны (рис. 2). А теперь, по аналогии, подсчитаем *суммарную длину B* отрезков сетки, попавших внутрь многоугольника (красных) и *суммарную длину $Г$* отрезков сетки, совпадающих с его сторонами (синих). В нашем случае красных отрезков четыре. Верхний, как нетрудно понять, равен 1,5 – нецелому числу. Не очень радует, но ничего не поделаешь, придётся терпеть. Зато второй сверху – ровно 3. Третий тоже нецелый – 3,5. Четвёртый – снова 3. Итого $B = 1{,}5 + 3 + 3{,}5 + 3 = 11$. Синий же отрезок лишь один, длины 1, поэтому $Г = 1$. Так вот, оказывается, площадь любого многоугольника тоже зависит лишь от B и $Г$ и вычисляется по формуле:

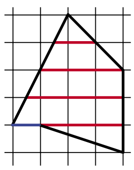


Рис. 2

$$S = B + 0{,}5Г.$$

Почти точное совпадение с формулой Пика. Например, для нашего пятиугольника

$$S = 11 + 0{,}5 \cdot 1 = 11{,}5.$$

– А если взять вертикальные линии сетки?

– Попробуем! Здесь (рис. 3) получается лишь 3 красных отрезка, но с определением их длин придётся повозиться. Самый левый равен 2. А вот дальше... Средний, как видно, равен 4 *с небольшим*, а правый – 3 *с небольшим* (правда, с *другим* небольшим). И эти *небольшие* добавки порождает нижняя сторона нашего пятиугольника. Как же нам их определить?

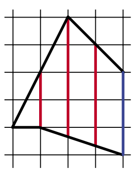


Рис. 3

– Я понял! Нижняя сторона – это же диагональ прямоугольника 1×3. Она делит его на симметричные части, поэтому вторая добавка дополняет первую до единицы!

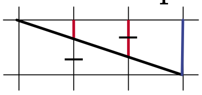


Рис. 4

– Отлично! Значит, сумма длин среднего и правого красных отрезков равна $4+3+1=8$. Синий же отрезок равен 3. Впрочем, с синими отрезками проблем быть не может – их длины *всегда целые* (сумеете это доказать?). Теперь мы можем определить площадь пятиугольника и третьим способом – по длинам вертикальных отрезков. Здесь $В = 2 + 8 = 10$ и $Г = 3$. Поэтому

$$S=10+0{,}5\cdot 3=11{,}5.$$

Можете «испытать» и другие многоугольники и убедиться, что всегда получается верный ответ. Поэтому мы можем с гордостью назвать нашу формулу *линейной* формулой Пика (или, если хотите, *отрезковой*).

– А *доказательство* у вас есть?

– Да, и весьма простое. Изложу его для горизонтальных отрезков (а для вертикальных можно повернуть картинку на 90°). Разрежем многоугольник горизонтальными линиями сетки на «дольки». Каждая такая долька – многоугольник, ограниченный с двух сторон прямыми, расстояние между которыми равно 1. Все его вершины *непременно* лежат на этих прямых – ведь узлы все находятся на горизонтальных прямых, и *между соседними прямыми* узлов нет. А раз так, «ассортимент» возможных видов долек очень невелик. Это может быть трапеция, параллелограмм либо треугольник – и обязательно с *единичной* высотой.

Если это трапеция с основаниями a и b, то площадь её равна $\frac{a+b}{2}\cdot 1=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. Для параллелограмма – то же самое, только здесь в придачу ко всему $a=b$. И для треугольника формула верна – надо лишь учесть, что или $a=0$, или $b=0$. Так что площадь каждой дольки равна сумме *половин* отрезков, ограничивающих её сверху и снизу. И потому площадь *всего* многоугольника есть сумма таких половин для всех долек. Когда отрезок общий для двух соседних долек, его половина войдёт в сумму дважды, и в этой сумме, таким образом, участвует просто длина отрезка. А если отрезок крайний – то его половина и останется. Но ведь это и есть описание приведённой формулы: сумма длин отрезков, попавших внутрь многоугольника, плюс полусумма длин отрезков, попавших на его границу (то есть совпадающих с какими-либо сторонами). Доказательство закончено.

Вижу, все согласны, кроме вот этого молодого человека. Что же вас не устраивает?

– Да нет, устраивает, но... кое-что здесь *лишнее*.

– Это как?

– В доказательстве не использовался тот факт, что сетка – *квадратная*. Учитывалось только разбиение плоскости параллельными прямыми на слои единичной ширины. И потому данная формула, как мне кажется, пригодна и для многоугольника, все вершины которого лежат на каких-то параллельных прямых, разбивающих плоскость на полоски равной ширины.

– Справедливо! Поэтому давайте окончательно сформулируем теорему так.

Пусть плоскость разбита бесконечным количеством параллельных прямых на слои равной единичной ширины. Каждая вершина некоторого многоугольника лежит на одной из этих прямых. Подсчитаем суммарную длину B отрезков прямых, попавших строго внутрь многоугольника, и суммарную длину $Г$ отрезков прямых, совпадающих с какими-то сторонами многоугольника. Тогда площадь многоугольника может быть определена по формуле:

$$S = B + 0{,}5Г.$$

Ну как, теперь сойдёт?

– Вполне.

– Вот и прекрасно. А вам спасибо за своевременную критику. На этом можно бы и откланяться, но сначала предложу вам для размышления задачу[1]:

На бумаге «в клеточку» нарисован выпуклый многоугольник M, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M.

Вооруженные нашими сегодняшними достижениями, вы, надеюсь, одолеете её без труда. До свидания!

К читателям. Решите и вы эту задачу, используя линейную формулу Пика. Ответ в следущем номере.

[1] Автор задачи – Г. Гальперин. Задача была предложена в 10 классе на Московской математической олимпиаде 2000 года, а также в 10 – 11 классах на Турнире городов 1999 – 2000 года.

Художник Мария Усеинова

Григорий Идельсон

Загадка угрей

По Аристотелю, угорь входит в число самозарождающихся животных, наравне с мышами, лягушками и червяками. Он пишет о болотистых прудах, где угри возникают вновь, когда вода и ил удалены и дождь опять наполняет эти пруды, ибо угри происходят из дождевых червей, которые образуются сами из ила.

Как и про все остальные предположения о самозарождении про него трудно сказать, что оно было лишено оснований: никто никогда не видел икру или мальков угря, а внутри угря – ничего похожего на яичники или семенники (моло́ки). Плиний, например, считал, что угри трутся о камни и оставляют на них кусочки кожи, из которых получаются новые угри.

В конце XVII века Франческо Реди, горячо борясь с идеей самозарождения, писал:

На основании своих продолжительных наблюдений я могу утверждать, что каждый год с первыми августовскими дождями в самые тёмные и облачные ночи угри, сбившись плотными стаями, уходят из рек и озер в море. Там они мечут икру, из которой через разное время, в зависимости от состояния погоды, выходят маленькие угри и плывут опять в пресные воды.

Все сказанное выглядит очень правдоподобно, но ни икры, ни маленьких угрей по-прежнему никто не видел. Самое меньшее, что бывает, – это так называемые *стеклянные угри*, размером 6–8 см. Зародышевые яичники у угрей нашли только в 1824 году. В 1874 году львовский профессор-зоолог Сырский сообщил, что ему удалось найти молоки у европейского угря. Но его сообщение не сразу получило признание. В 1875–77 годах молодой студент Зигмунд Фрейд в Триесте три года пытался воспроизвести результаты Сырского, с неоднозначными выводами.

В 1763 году Уильям Моррис выловил у берегов Уэльса необычную маленькую плоскую и совершенно прозрачную рыбку. Он послал её натуралисту Томасу Пеннанту, тот эту рыбку описал и переслал ихтиологу Лоренсу Гроновиусу, который назвал её *лептоцефа́лом* (плоскоголовом). В течение последующих почти ста лет нашли очень мало таких рыбок, больше всего в основном в Мессинском проливе. Только в 1856 году немецкий зоолог Кауп систематизировал все немногочисленные описания лептоцефалов – свои и чужие, всего 18 образцов – и назвал лептоцефала отдельным видом. В 1892–1897 году итальянские зоологи Грасси и Каландруччо посадили лептоцефала в аквариум. И в аквариуме с ним стали происходить изменения: он не вырос, а уменьшился в размере, утратил листовидную форму и превратился в стеклянного угря. Так вековая загадка была решена: лептоцефал оказался личинкой угря. На картинке ниже – жизненный цикл угря.

Правда, все лептоцефалы были размером 7 см, а более мелких по-прежнему никто не находил.

В начале XX века датский зоолог Шмидт посвятил много лет поискам всё меньших и меньших лептоцефалов. Сначала он нашёл лептоцефалов размером 45 мм у Фарерских островов, а потом, постепенно продвигаясь, добрался аж до Саргассова моря, где нашёл совсем крошечных – размером 10 и даже 5–7 мм. Оказалось, что в тех же местах размножаются и американские угри, но им плыть гораздо ближе. То есть угорь, выйдя из Европы, каким-то образом добирается (против течения Гольфстрима) за много тысяч километров, нерестится в Саргассовом море, а личинки-лептоцефалы приносятся в Европу Гольфстримом. У личинок это занимает 2–3 года.

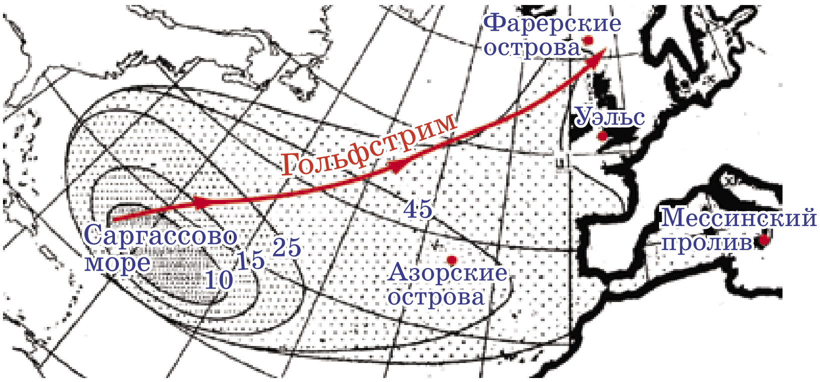
В своё время предложили гипотезу: а может, европейским угрям вовсе не удаётся вернуться в Саргассово море? Размножаются только американские, ко-

Художник Алексей Вайнер

торым плыть недалеко, часть их плывёт в Америку, а часть уносится Гольфстримом в Европу – как «отход производства». Европейские угри немного отличаются от американских, но это может быть связано с разными условиями, в которых им пришлось развиваться.

Уже совсем недавно методами молекулярной биологии было показано, что это не так. Европейские угри генетически немного отличаются от американских. Хотя иногда они могут скрещиваться и давать потомство, но в основном эти популяции различаются. Эти две популяции разошлись примерно 2,5 млн лет назад, как принято считать, после образования Панамского перешейка и усиления Гольфстрима.

Всё же, как европейским угрям удаётся добраться до Саргассова моря? Лишь когда угрей нашли в желудках глубоководных рыб, стало ясно: угри плывут в Саргассово море на глубине 1 км, где проходит встречное течение – Антигольфстрим. А недавно на Азорских островах пометили угрей спутниковыми датчиками и проследили их путь до Саргассова моря.



Места обитания личинки европейского угря в зависимости от размера в миллиметрах

Когда угорь оказывается в глубоких водах, у него наступает половое созревание. Но зачем плыть так далеко? Например, угри, которые водятся в Японии, а также в реках вокруг Индийского океана, тоже выходят нереститься в море, но недалеко от устья рек.

Саргассово море – единственное место в Атлантическом океане, где даже на глубине 1 км вода прогрета до температуры 16–20 °С. Там угри и нерестятся. Говорят, раньше была широкая полоса с такими условиями. И угри, как до сих пор их американские и японские собратья, нерестились недалеко от своих рек.

ГРЕЧЕСКАЯ КНИГА

Перед вами обложка книги на новогреческом языке. Вряд ли вы знаете греческий, тем не менее попробуйте, не пользуясь словарём, понять:

1) кто автор книги и как она называется по-русски;
2) что означают слова «μετάφραση» и «εικονογράφηση» на обложке.

Ответы в следующем номере

Автор Евгений Смирнов   Художник Елена Цветаева

Константин Кохась

ОДНОСТОРОННИЙ ТРАМВАЙ

Бусенька и её друг уж Ушася с интересом разглядывали дятла Спятла. Он выглядел свежим и, как всегда, непредсказуемым.

– Ну, хвастайся! – сказала Бусенька. – Хорошо провёл отпуск?

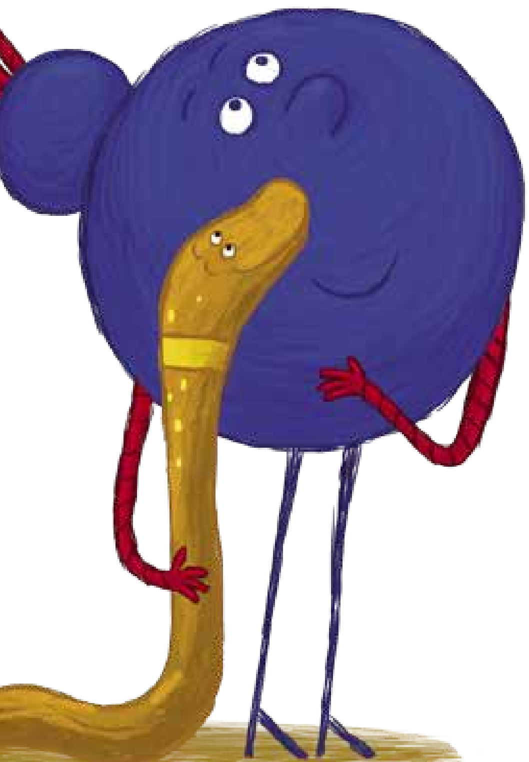
– Работа туриста – одна из самых тяжёлых на свете, – жизнерадостно заявил дятел Спятел. – Выспаться как следует не дают, весь день таскают по пляжам-экскурсиям, кормят ужасной гадостью под названием «национальные блюда»... И всё это вдали от друзей, в непривычной обстановке... Солнце палит, обезьяны кривляются. А чуть расслабишься – пытаются продать тебе кучу ненужного хлама, называя его сувенирами.

– Зато, поди, много всего интересного повидал.

– Ну как сказать... Мир весьма однообразен. Во всяком случае, воображение у меня побогаче.

– Не попалось ничего необычного?

– Хм... Кажется, попалось. Я отдыхал на курорте Мон-Карабск. Так вот, там всё время меняют местами номера трамвайных остановок!



– Как это номера трамвайных ос-с-становок? – усомнился Ушася. – Ты хотел сказать, номера трамвайных маршрутов?

– Трамвайные маршруты там номеров не имеют. Они имеют названия. Например, возле моей гостиницы трамвай маршрута «Сказочное Бубу» возил пассажиров с 22-й остановки на 16-ю. И вот выхожу я утром на остановку, а там рабочие как раз снимают табличку с номером 22 и вешают вместо неё номер 16. А потом подходит трамвай, они садятся и едут вместе с табличкой, а приехав на 16-ю остановку, устанавливают на ней номер 22!

– А трамвай?

– А что трамвай – выгрузил пассажиров и поехал пустой обратно.

– Почему пустой?

– Там все трамвайные маршруты имеют только две остановки и везут тебя только в одну сторону – от начальной остановки к конечной. А обратно они едут пустые. И к тому же вверх колесами!

– Мне кажется, кто-то из нас с-спятил, – сказал Ушася, – вверх колесами! Как же ехать обратно? На другом трамвае?

– Не получится! – возразил дятел Спятел. – Я внимательно изучил схему маршрутов: с какой остановки ни уедешь – вернуться обратно на трамваях не получится, сколько пересадок ни делай.

– Поощряют пешие прогулки по городу? – предположила Бусенька. – А зачем они их меняют?

– В городе сумасшедший бургомистр. Он считает, что у каждого трамвайного маршрута номер начальной остановки должен быть меньше номера конечной. Если бы он так считал, тихо сидя в своем кабинете, это никого бы не беспокоило. Но он каждую пятницу «идёт в народ». Ходит пешком по городу и ищет всякие беспорядки. И если ему попадается «неправильный» маршрут – приказывает переставить таблички местами. А потом выписывает себе премию.

– Похоже, он изобрёл с-с-себе неис-с-с-сякаемый ис-с-сточник дохода, – предположил Ушася.

– Почему неиссякаемый?

– В правильно поставленном деле бес-с-спорядки никогда не кончатся. Он будет теперь каждую пятницу получать премию. Пожизненно.

– Почему ты думаешь, что не кончатся?

– Остановка может относиться сразу к нескольким маршрутам. Изменив номера, он исправил один маршрут, но от этого могли ис-с-спортиться другие маршруты. Потом он исправит и их – ещё какие-нибудь испортятся…

– Ну, не думаю, что всё так плохо, – не согласилась Бусенька. – Как я поняла, мы можем считать, что рабочие, меняющие номера местами, бо́льший номер везут на остановку, где раньше был меньший номер, на трамвае!

– Это самый удобный способ, – подтвердил дятел Спятел, – трамваи там очень часто ходят.

– Но ты нам объяснил, что, путешествуя на трамваях, невозможно вернуться в исходный пункт! Это значит, что самый большой номер – а его всегда пе-

ревозят на трамвае – никогда не вернется ни на одну остановку, где он когда-либо уже висел. Это значит…

– Тупик! – торжественно произнес дятел Спятел. – Глобальное противоречие! Мы опровергли всё на свете!!

– Да нет же, мы просто доказали, что табличка с самым большим номером приедет в тупик, то есть на остановку, которая не является начальной ни для одного маршрута.

– Значит, она там ос-с-станется навсегда, – сообразил Ушася. – Похоже, я был неправ.

– Вы хотите сказать, что эти выходки бургомистра обязательно когда-нибудь прекратятся? – подхватил дятел Спятел. – Когда самый большой номер окажется в тупике, он уже никогда больше не будет участвовать в перестановках. С этого момента второй по величине номер если и участвует в перестановках, то тоже переезжает на новое место на трамвае…

– Да, да, да! Так постепенно все эти перестановки и прекратятся.

– Вс-с-сё равно бургомис-с-стр не прогадает, – засомневался Ушася, – не один год пройдёт, пока перестановки затухнут.

– Но тем не менее сама мысль, что трамваи везут вас вверх и при этом номера остановок увеличиваются, мне кажется весьма изящной, – сказал дятел Спятел.

– Как вверх? – спросила Бусенька.

– Почему вверх? – уточнил Ушася.

– Как это почему? Тамошние трамваи – это фуникулёры, они везут пассажиров вверх, по монорельсу! – объяснил дятел Спятел. – А назад съезжают, вися на том же монорельсе вверх тормашками. Это же горный курорт! Это Мон-Карабск!

– Что же ты с-с-сразу не с-с-сказал, – прошипел Ушася, – если трамваи везут только вверх, то очевидно, что перестановки номеров когда-нибудь закончатся. Ведь если считать, что номер на табличке – это её вес-с-с в килограммах, то каждый раз лёгкую табличку мы опускаем вниз, а тяжёлую поднимаем на ту же высоту вверх. От этого суммарная потенциальная энергия всех табличек возрастает!

– Как же я сам не догадался! – воскликнул дятел Спятел. – Эту потенциальную энергию я ощущаю каждый раз, когда взлетаю. Впрочем... Пожалуй, можно промоделировать её без выхода в реальный мир, а с помощью «внутреннего» подсчёта: вычислим, сколько имеется «проблемных» пар остановок (A, B), в которых остановка A имеет большой номер, B – маленький и при этом от A до B можно доехать на трамвае (возможно, с пересадками). Это количество уменьшается каждый раз, когда меняют таблички! Ведь если бургомистр поменял местами таблички на остановках C и D, то проблемная пара (C, D) в результате перестановки исчезла, проблемные пары вида (X, C) или (D, X) так и остались проблемными, поскольку у остановки C номер уменьшился, а у остановки D – увеличился, а вот некоторые пары вида (X, D) или (C, X) тоже могли исчезнуть, поскольку номер остановки D вырос, а номер остановки C уменьшился.

– Забавная у тебя энергия, – заметил Ушася. – Моя потенциальная энергия рас-с-стёт, а твоя – уменьшается.

– Она помогает взлетать! – согласился дятел Спятел. – Правда, сильно затрудняет посадку.

– Зато в том, что я вам доказала, не использовалось, что этот курорт горный! – похвасталась Бусенька. – Значит, любая схема маршрутов, в которой невозможно движение по циклу, может быть реализована способом «везём вверх»!

– Я придумал! – воскликнул дятел Спятел. – Давайте напечатаем в газете, что эти бургомистерские фокусы можно прекратить за один день: нужно выписать все остановки в порядке возрастания их высоты над уровнем моря и раздать имеющиеся номера по этому списку! А премию за это пусть выпишут нам!

– С-с-стоит ли это делать? – усомнился Ушася. – Сейчас-с-с бургомистр придумал себе довольно безобидное развлечение, да и не слишком оно накладно для города. А что будет, если мы его этой кормушки лишим?

Художник Инга Коржнева

Игры и Головоломки

Владимир Красноухов

ИЗМЕНЧИВОЕ СЕРДЦЕ

Несмотря на лирическое название, речь пойдёт всего лишь о трансформациях геометрической фигуры, напоминающей сердечко (рис. 1). Нанесите на картон или фанеру шестиугольную сетку, перерисуйте сердечко, вырежьте его и разрежьте по сплошным линиям на 5 частей (рис. 2). Числа возле фигурок – их площади (в условных единицах).

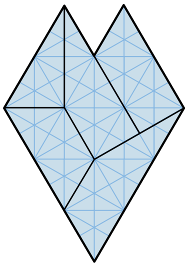


Рис. 1

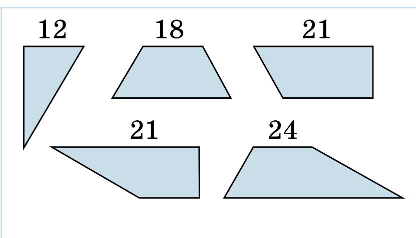


Рис. 2

Задача 1. Используя полученный набор фигурок, соберите «улучшенный» вариант сердечка (рис. 3).

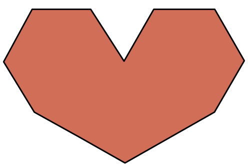


Рис. 3

Кстати, это одна из задач, решавшихся участниками 25-го очного открытого чемпионата России по пазлспорту в Москве 25 июня 2022 года. Результаты по ней оказались обескураживающими. За отведённые по регламенту 5 минут с задачей справились лишь двое – Ольга Шут из Минска (2 мин) и Артём Клячин из Москвы (3 мин 30 с). Попробуйте посостязаться с сильнейшими решателями головоломок, в отличие от них ваше время не ограничено никаким регламентом.

Для разминки (задача 2) – ещё десяток силуэтов (рис. 4), которые можно последовательно собрать, используя все фигурки рисунка 2. Как обычно, фигурки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Отметим, что первые восемь фигур на рисунке 4 имеют зеркальную симметрию, а последние две переходят в себя при повороте на 180° вокруг своего центра.

И ещё ряд непростых задач.

Задача 3. Используя весь набор элементов, соберите прямоугольник.

Задача 4. Используя весь набор элементов, соберите симметричную фигуру с 15 сторонами. Автор этой головоломки (В. Красноухов) утверждает, что имеется три решения этой задачи.

Задача 5. Используя весь набор элементов, соберите фигуру, которая переходит в себя при повороте на 120° вокруг своего центра.

Задача 6. Используя весь набор элементов, соберите симметричную фигуру с 16 сторонами.

Задачи 5 и 6 предложил (и нашёл все решения) наш читатель Алексей Олешов из Мурманска, один из сильнейших в России решателей головоломок.

Желаем успехов!

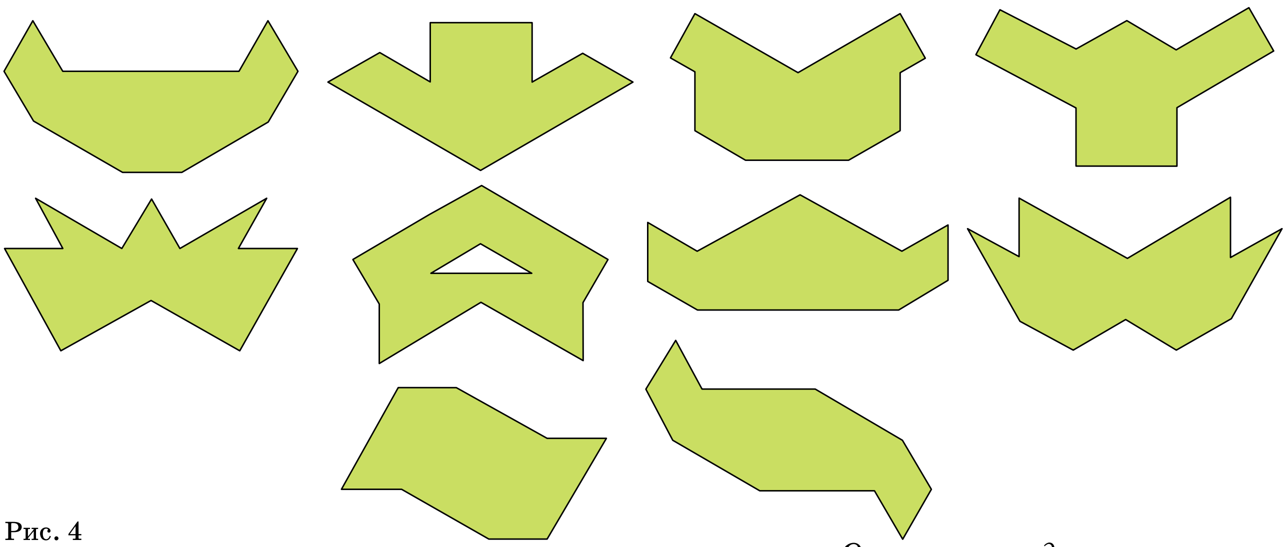


Рис. 4

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

МОРОЗ *и* СОЛНЦЕ

1. Почему в очень сильный мороз нельзя трогать голыми руками металлические предметы – например, опоры турника? А сам турник – можно? А если перед этим поплевать на руки? А бетонный столб можно потрогать? А ключи, если они упали на землю? А в очень сильную жару?

2. Некто зимой насадил на деревянный стержень металлическое кольцо и не может снять. Как ему быть?

3. В старину вместо холодильника использовали *лéдник*: зимой складывали в подвале лёд, чтобы летом хранить там продукты. При необходимости смешивали колотый лёд с солью – оказывается, температура такой смеси понижается. Но в нынешние зимы солью посыпают тротуары, причём с обратной целью – чтобы снег растаял. Нет ли тут противоречия?

Художник Мария Усеинова

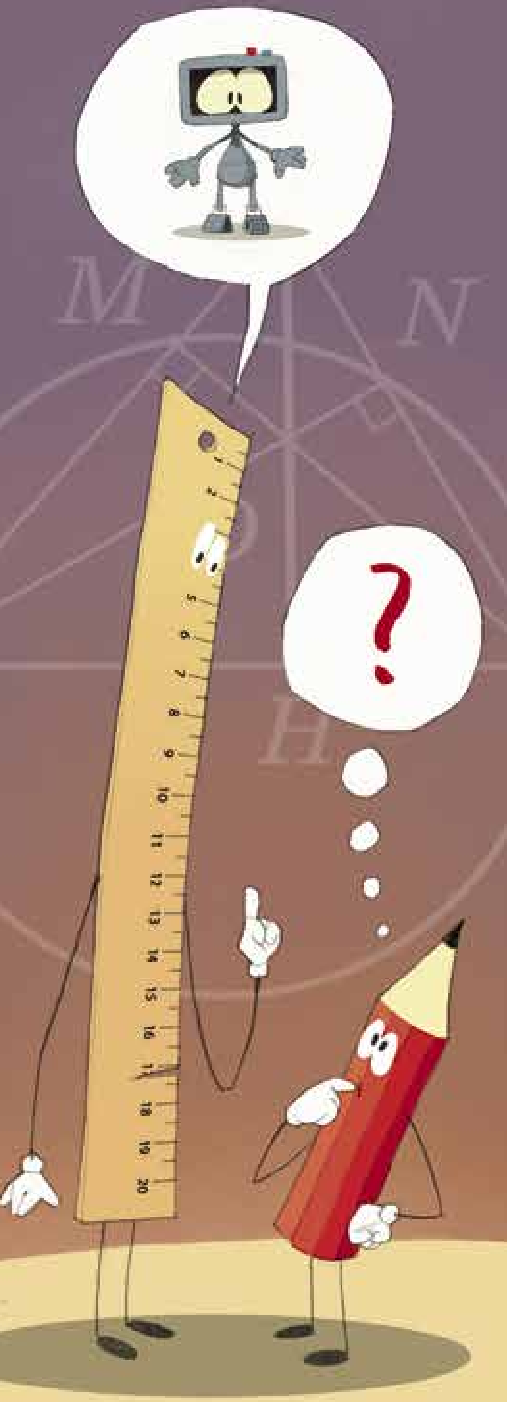
4. Стандартный способ определить возраст спиленного дерева, не прибегая к сложным измерениям, – сосчитать число годовых колец на пне. Однако есть на Земле места, где этот способ не годится. Где они расположены?

Ответы в одном из следующих номеров

Математический кружок

Александр Блинков

ПЕРПЕНДИКУЛЯР – ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ!



Мы расскажем об одной старой задаче:

Задача 1. *Дана окружность с проведённым в ней диаметром AB и дана точка C. Используя только линейку, проведите через точку C перпендикуляр к прямой AB.*

В нашем распоряжении – только линейка без делений и карандаш. С их помощью можно проводить через любые две имеющиеся точки прямую, а ещё можно отмечать точки пересечения уже проведённых линий. Ничего другого делать нельзя.

Сразу возникает вопрос – а где лежит точка C? Надо с чего-то начать, поэтому разберём

Случай 1. Точка C лежит над диаметром AB вне окружности.

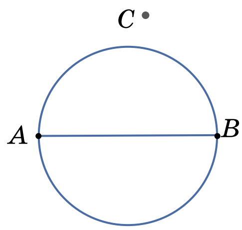


Рис. 1

Решение. Попробуем наугад провести всё, что можем: сначала отрезки AC и BC, которые пересекут полуокружность в точках M и N соответственно; потом отрезки AN и BM до их пересечения в точке D; наконец, прямую CD до её пересечения с AB в точке H (рис. 2).

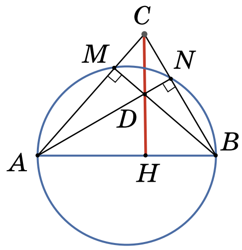


Рис. 2

Если всё проделать аккуратно, мы увидим, что отрезок CH очень похож на перпендикуляр к AB. Попробуем обосновать это наблюдение.

Заметим, что углы AMB и ANB прямые – они вписанные и опираются на диаметр. Значит, AN и BM – высоты треугольника ABC, а D – точка пересечения высот (его *ортоцентр*). Но три высоты треугольника пересекаются в одной точке, поэтому CH – тоже высота!

Случай 2. Точка C лежит внутри окружности, но не на диаметре.

А этот случай мы уже разобрали – надо лишь обозначить данную точку через D и воспользоваться тем же рисунком 2!

Упражнение 1. Объясните подробно построение в случае 2.

Точки C и D как бы двойственны друг другу: если D – ортоцентр треугольника ABC, то C – ортоцентр треугольника ABD. Такие четыре точки A, B, C и D принято называть *ортоцентрической четвёркой*.

Если C лежит прямо над A или B, задача решена.

Случай 3. Точка C лежит вне полосы, ограниченной перпендикулярами к диаметру AB, проходящими через его концы (рис. 3).

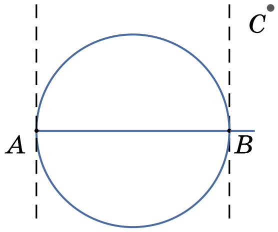


Рис. 3

И в такой формулировке идея решения остаётся прежней.

Упражнение 2. Восстановите решение в случае 3 по рисунку 4.

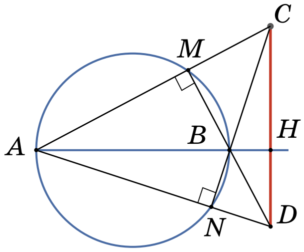


Рис. 4

Случай 4. Точка C лежит на окружности.

Этот случай напоминает первый, но потребуется ещё одна идея.

Решение. Через произвольную точку X, лежащую внутри окружности, проведём прямую, перпендикулярную к AB, как в случае 2. Пусть она пересекает окружность в точках M и N (рис. 5). Проведём отрезок CN, который пересечёт AB в точке P, и луч MP, пересекающий окружность в точке D. Пересечение CD и AB обозначим через H, тогда CH – искомый перпендикуляр.

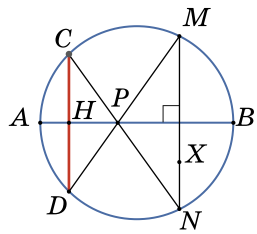


Рис. 5

Действительно, прямая AB – ось симметрии окружности, поэтому точки M и N симметричны относительно AB, значит, симметричны и лучи MP и NP. Значит, точки C и D симметричны относительно AB, то есть CD и AB перпендикулярны.

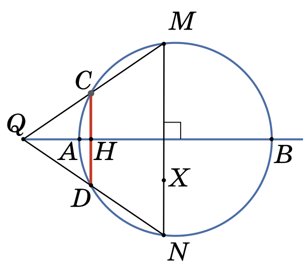
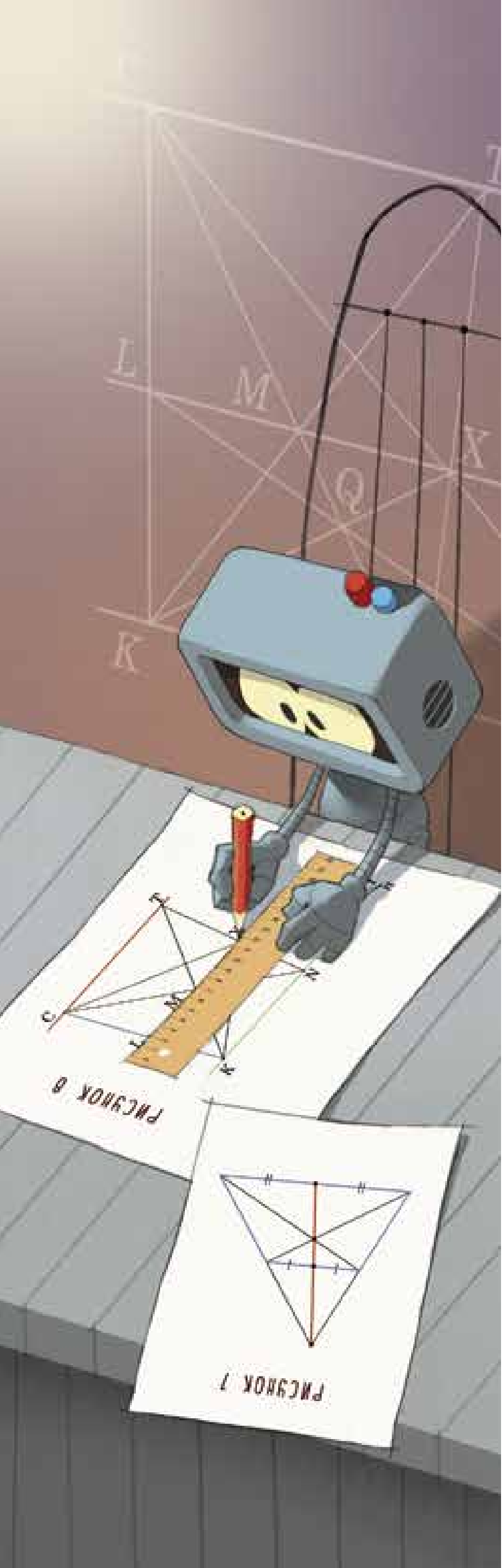


Рис. 6

Упражнение 3. Восстановите другой способ решения задачи в случае 4 по рисунку 6. Всегда ли он работает?



Наиболее сложным является

Случай 5. Точка C лежит на прямой AB.

В решении нам пригодится замечательное свойство трапеции: *середины оснований трапеции лежат на одной прямой с точкой пересечения диагоналей и точкой пересечения продолжений боковых сторон (рис. 7).*

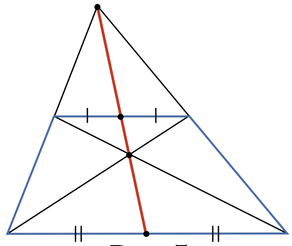


Рис. 7

Решение для случая 5. Выбрав две точки, расположенные так, как в случае 2, построим две прямые, перпендикулярные AB и проходящие через эти точки. Так как искомый перпендикуляр им параллелен, задача сведётся к построению прямой, проходящей через данную точку C и параллельной этим прямым.

Итак, пусть даны две параллельные прямые m и n, пересекающие отрезок AB в точках L и K, и точка C, лежащая вне полосы, ограниченной этими прямыми (рис. 8). Через точку C проведём прямую, пересекающую m и n в точках X и Y соответственно.

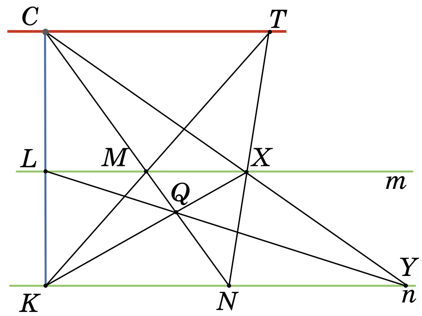


Рис. 8

Далее, проведём отрезки KX и LY, пусть Q – точка их пересечения. Затем проведём прямую CQ, которая пересечёт прямые m и n в точках M и N соответственно. Проведя теперь лучи KM и NX, которые пересекутся в точке T, мы сможем провести искомую прямую CT.

Докажем, что CT и m параллельны. Действительно, $KLXY$ – трапеция, Q – точка пересечения её диагоналей, значит, точки M и N – середины её оснований. Из подобия двух пар треугольников: KTN и MTX, KCN и LCM следует, что

$$\frac{TK}{TM} = \frac{KN}{MX} = \frac{KN}{LM} = \frac{CK}{CL}.$$

Тогда $\frac{TK}{TM} - 1 = \frac{CK}{CL} - 1$, откуда $\frac{KM}{TM} = \frac{KL}{CL}$. Значит, m и CT параллельны (по теореме, обратной к теореме о пропорциональных отрезках).

Упражнение 4. а) По рисунку 9 восстановите построение прямой, параллельной данным прямым m и n и проходящей через точку Q, лежащую внутри ограниченной ими полосы.

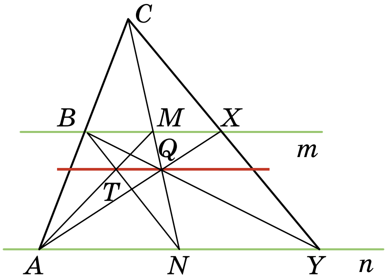


Рис. 9

б) Обоснуйте это построение.

Мы рассмотрели все возможные случаи расположения точки C, исходная задача полностью решена! А теперь покажем, как построить перпендикуляр к хорде из центра окружности.

Задача 2. Даны окружность, в которой отмечен центр O, и произвольная хорда AB (отличная от диаметра). Используя только линейку, постройте перпендикуляр из точки O на AB.

Решение. Проведём лучи AO и BO, которые пересекут окружность в точках C и D соответственно (рис. 10). Тогда $ABCD$ – прямоугольник (его равные диагонали точкой пересечения делятся пополам). Так как треугольник AOB равнобедренный, его высота, проведённая к AB, совпадает с медианой. Значит, достаточно построить середину H отрезка AB.

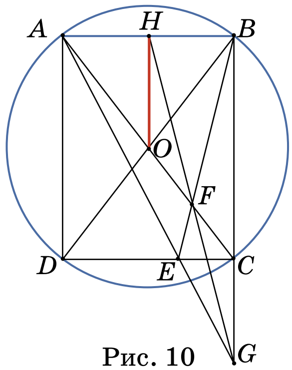


Рис. 10

На отрезке CD отметим произвольную точку E, тогда $ABCE$ – трапеция. Опять используем замечательное свойство трапеции. В нашем случае: F – точка пересечения диагоналей AC и BE, G – точка пересечения AE и BC, поэтому прямая GF пересечёт AB в его середине H. Тогда OH – искомый перпендикуляр.

Упражнение 5. Дана окружность, в которой проведены диаметр и параллельная ему хорда. Используя только линейку, постройте центр окружности.

Упражнение 6. Дана окружность, проведены два её радиуса, не лежащие на одной прямой. Только линейкой постройте биссектрису угла между ними.

Художник Алексей Вайнер

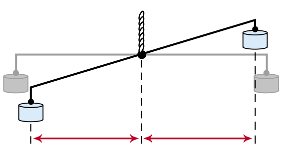
ВЕСЫ-КОРОМЫСЛО

По материалам проекта «Математические этюды»

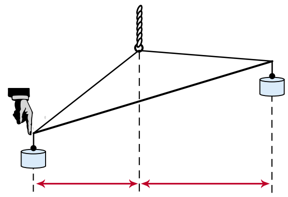
Равноплечие рычажные весы с коромыслом известны с древности. Их изображения на древнеегипетских папирусах и барельефах почти не отличаются от фотографий весов XIX века. Такие весы используют и сейчас, а ещё они – частый персонаж олимпиадных задач на поиск фальшивой монеты.

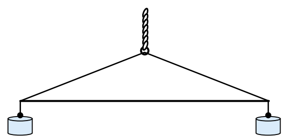
Казалось бы, что может быть проще, чем сделать такие весы самому? Возьмём прямую палку, просверлим на ней вдоль прямой три отверстия на равных расстояниях: в среднее проденем верёвку, чтобы держать весы, а к крайним подвесим одинаковые грузы. Наши импровизированные весы замрут в том положении, в котором мы их оставим – возможно, горизонтально, но возможно, и под углом!

Дело в том, что при любом наклоне коромысла у него нет причины менять своё положение – проекции половинок коромысла на землю (плечи) одинаковы, и грузы на концах одинаковые, тянут вниз с равной силой. Весы находятся в состоянии безразличного равновесия!



Конечно, если подвесить разные грузы, такие весы покажут, какой из них тяжелее. Но как сделать так, чтобы при равных грузах коромысло принимало горизонтальное положение, демонстрируя равенство? Присмотревшись к фотографиям коромысловых весов в интернете, внимательный читатель заметит тонкость, которую мы не учли: точки подвеса грузов делают чуть ниже точки вращения коромысла.





Эти три точки должны образовывать равнобедренный треугольник. Тогда даже при небольшом наклоне коромысла плечи станут неравными. И если к весам подвешены одинаковые грузы, весы вернутся в горизонтальное положение, равновесие будет устойчивым.

Красивые коромысла – и дань красоте, и необходимая функциональность.

Художник Екатерина Ладатко

XV Южный математический турнир
Избранные задачи

Материал подготовили: Д. Мамий и составители лиги «Старт» Е. Бакаев, С. Дориченко, С. Волчёнков, П. Кожевников, К. Сухов

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Адыгейской республиканской естественно-математической школой каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XV Турнире участвовали 250 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: adygmath.ru).

Логика, игры, комбинаторика

1. (*С. Волчёнков*) В ряд выстроились несколько журналистов. Каждый заявил, что он стоит между двумя лжецами. Проанализировав ситуацию, Шерлок Холмс заявил, что честных среди журналистов может быть любое количество от 7 до 11. Сколько всего журналистов в строю, если каждый журналист либо честный (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт)?

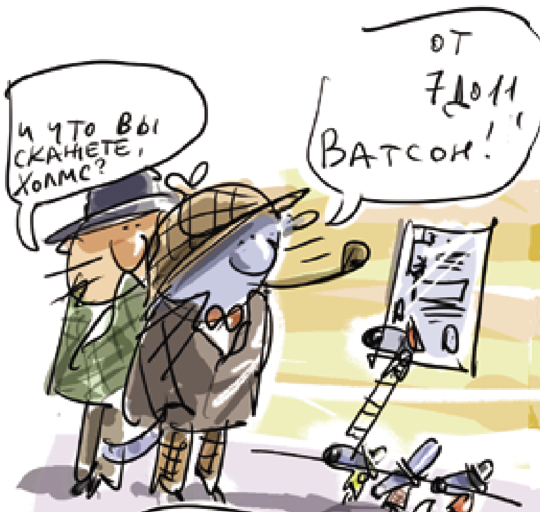
2. (*Задача из США*) В каждой клетке таблицы 3×3 стоит число. Произведение чисел и в каждой строке, и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Чему может равняться число в центральной клетке?

3. (*С. Волчёнков*) В клане Дона Корлеоне 100 человек (включая его самого), причём Дон Корлеоне может связаться с каждым, возможно по цепочке знакомых. Каждый член клана знает ровно пятерых других членов клана. Каким наибольшим может быть количество мафиози, попарно не знающих друг друга?

4. (*Д. Кузнецов*) Вася желает разместить 11 слонов, не бьющих друг друга, на доске 6×6. Так как это невозможно, он решил поставить на одно из полей фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить фишку так, чтобы его желание о расстановке 11 слонов стало осуществимо?

5. (*Задача из Сальвадора*) Двое по очереди закрашивают на доске 9×10 клетку, доминошку или уголок из трёх клеток. Закрашивать можно только не закрашенные ранее клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу?

6. (*Задача из Южной Америки*) Дана клетчатая доска 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить неокрашенные стороны некоторых клеток синим цветом так, чтобы получил-



ся синий путь между какими-то двумя углами доски. Всегда ли Боря сможет это сделать, как бы ни действовала Аня?

7. (*Задача из Швейцарии*) Сто фиолетовых и сто белых коров стоят в очереди на водопой. Тим может выбрать любую группу из чётного числа коров, стоящих подряд, и поменять местами первую половину этой группы со второй половиной (сохранив порядок коров в группах). Какое наименьшее количество таких операций заведомо позволит Тиму добиться того, чтобы все фиолетовые коровы оказались в начале очереди?

Геометрия обычная и комбинаторная

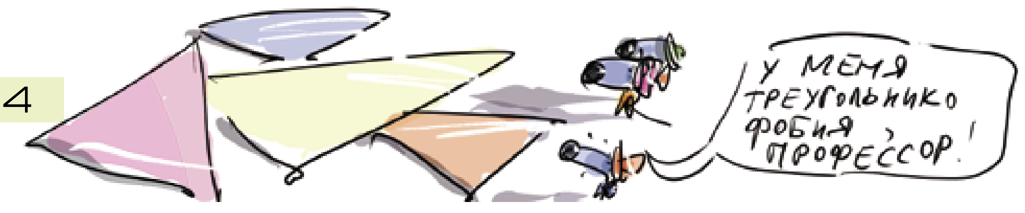
8. (*Джон Джексон,* 1821) Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?

9. (*Л. Емельянов*) В треугольнике ABC с острыми углами A и B проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что прямые, проведённые через A_1 и B_1 перпендикулярно AB, либо обе касаются вписанной окружности треугольника ABC, либо обе её не касаются.

10. (*Е. Бакаев*) Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ABKL$ и $BCMN$. Точка O – середина отрезка LM. Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC в два раза меньше длины отрезка AC.

11. (*И. Вайнштейн*) В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC с углом $A = 45°$ высоты пересекаются в точке H. Вася отметил красным точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC, а также точки A_0, B_0, C_0, A_2, B_2, C_2 – середины отрезков BC, CA, AB, AH, BH, CH соответственно. Докажите, что какие-то 8 из 9 красных точек являются вершинами двух квадратов.

12. (*Задача из Ирана*) Клетчатый прямоугольник $m \times n$ разбит на квадратики 2×2 и прямоугольни-



ки 1×3. Докажите, что число способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2, а вторая – в прямоугольник 1×3, чётно. (Прямоугольники могут располагаться и горизонтально, и вертикально. Доминошки кладутся «по клеточкам».)

13. (*Задача из США*) На плоскости сидят 6 мух. Мухобойка представляет собой объединение чёрных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки – это дыры). Можно ли расположить мухобойку так (её можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Мухи – это точки; если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

Арифметика и алгебра

14. (*Задача из Бангладеш*) Найдите наименьшее n, для которого верно утверждение: среди любых n последовательных натуральных чисел найдётся число, сумма цифр которого делится на 17.

15. (*Задача из Бангладеш*) Натуральное число n называется *бенгальским*, если оно имеет хотя бы 4 натуральных делителя, а сумма его четырёх наибольших натуральных делителей равна $2n$. Найдите количество бенгальских чисел, не превосходящих 3000.

16. (*Задача из Сальвадора*) Найдите все тройки целых ненулевых чисел (a, b, c), для которых верны равенства: $a^3+a^2+b^2=0$; $b^3+b^2+c^2=0$; $c^3+c^2+a^2=0$.

17. (*Задача из Китая*) На доске написано число, большее натурального на 0,5. Каждую минуту число на доске умножают на наименьшее целое число, не меньшее его. Могло ли случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2022 минуты?

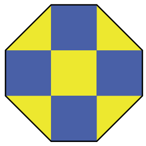
18. (*Задача из Болгарии*) *Смешиванием* последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ назовём превращение её в последовательность $a_3, a_6, \ldots, a_{3n}, a_2, a_5, \ldots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \ldots, a_{3n-2}$. Можно ли из последовательности 1, 2, ..., 192 за несколько смешиваний получить последовательность 192, 191, ..., 1?

Художник Сергей Чуб

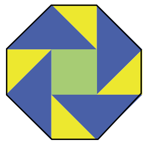
НАШ КОНКУРС, II ТУР
(«Квантик» № 10, 2022)

6. *В гостиной, спальне и кухне висят градусники. В спальне температура всегда выше на 1 градус, чем в гостиной, а на кухне – ещё на 1 градус выше. Петя записал утром, днём и вечером показания всех трёх градусников, но ровно в одном числе сделал опечатку. В результате получились числа (в каком-то порядке):* 17, 18, 19, 22, 25, 25, 26, 27, 27. *В каком числе опечатка и что должно там стоять? Ответ обоснуйте.*

Ответ: вместо 22 должно быть 26. Из тройки «одновременных» показаний любые два отличаются не более чем на 2 градуса. Но 22 отличается от остальных чисел не менее чем на 3, значит, опечатка в «22». В тройку с 17 могут входить только 18 и 19, а в тройку с 27 – только 26 и 25. Остались 25 и 27, между ними не хватает 26.



7. *Маша сшила восьмиугольную скатерть из пяти квадратов и четырёх равнобедренных прямоугольных треугольников (см. рисунок). А можно ли сшить точно такую же скатерть из одного квадрата и восьми равнобедренных прямоугольных треугольников (не обязательно одинаковых)?*



Ответ: да, см. рисунок.

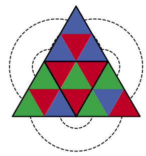
8. *В слове СЛУЧАЙНОСТЬ школьники случайным образом заменяют буквы на цифры (одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные буквы на разные цифры, причем первая буква слова не может заменяться на цифру 0). Найдите вероятность того, что полученное в результате число делится на 3. (То есть какую долю среди всех возможных вариантов составляют числа, делящиеся на 3.)*

Ответ: 1/3. Число делится на 3, если и только если сумма его цифр делится на 3. Откинем в слове «случайность» первую «с», останутся 10 различных букв, тогда это цифры от 0 до 9, и с + л + у + ч + а + й + н + о + с + т + ь = с + 45. Буква «с» может принимать 9 значений от 1 до 9, но сумма цифр делится на 3 лишь в трёх случаях (с = 3, 6, 9), искомая вероятность равна 3/9.

Решите задачу для слова УЧИТЕЛЬНИЦА.

9. *Все грани треугольной пирамидки – одинаковые равносторонние треугольники. У каждой грани отметили середины сторон и соединили друг с другом, разбив грань на 4 одинаковых маленьких треугольничка. Каждый из этих 16 получившихся треугольничков окрасили в один из трёх цветов – красный, синий или зелёный, – так, что любые два треугольничка с общей стороной окрашены в разные цвета (не забудьте, что треугольнички с общей стороной могут принадлежать и разным граням). Какое наибольшее количество красных треугольничков могло получиться?*

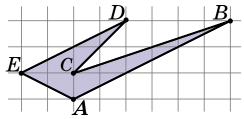
Ответ: 6. В каждой вершине пирамидки сходятся три треугольничка, граничащие друг с другом, то есть красный, синий и зелёный. Остаются треугольнички в серединах четырёх граней. Никакие три из них не могут быть все красными: иначе при общей вершине трёх граней с красными центральными треугольничками не будет красного треугольничка. Значит, всего красных треугольничков не более 4 + 2 = 6.



На рисунке – подходящая раскраска развёртки пирамидки (линиями соединены грани, которые станут соседними, если склеить развёртку).

10. *Существует ли многоугольник, который с помощью одного прямолинейного разреза можно разрезать на треугольники с площадями* 1, 2, 3, *а с помощью другого прямолинейного разреза – на треугольники с площадями* 2, 2, 2?

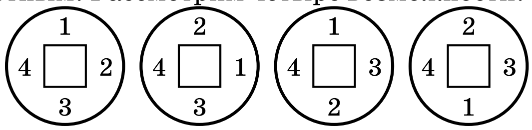
Ответ: да, например, пятиугольник $ABCDE$ на рисунке. Разрезав его по прямой AC, получим три треугольника с площадями 1, 2, 3, а по прямой EC – три треугольника с площадями 2, 2, 2.



«КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ» ЯПОНИИ И ВЬЕТНАМА (*«Квантик» № 11, 2022*)

Все названия монет четырёхсложные; в китайском и вьетнамском они записываются как отдельные слова, в японском – как два двусложных слова; для простоты будем называть их словами.

Два последних слова в названиях – *tōng bǎo* \ *tsūhō* \ *thông bảo* или (реже) *yuán bǎo* \ *genpō* \ *nguyen bảo*. На всех монетах слева стоит иероглиф 寶: видимо, это – *bǎo* \ (*hō* или *pō*) \ *bảo*. Но 通寶 \ *tōng bǎo* \ *tsūhō* \ *thông bảo* может занимать позиции справа-слева и снизу-слева, 元寶 \ *yuán bǎo* \ *genpō* \ *nguyen bảo* – снизу-слева. Значит, порядок иероглифов не является стандартным. Рассмотрим четыре возможности:



2	祥 寶 □ 符 元	Xiáng Fú Yuán Bǎo	Shofu Genpō	Tường Phù Nguyên Bảo
13	祥 寶 □ 符 通	Xiáng Fú Tōng Bǎo	Shofu Tsūhō	
11	元 寶 □ 符 通	Yuán Fú Tōng Bǎo	Genfu Tsūhō	
8	平 寶 □ 通 安		Heian Tsūhō	Bình An Thông Bảo
15	安 寶 □ 法 元			An Pháp Nguyên Bảo

1	治 寶 □ 平 元	Zhì Píng Yuán Bǎo	Jihei Genpō	Trị Bình Nguyên Bảo
5	治 寶 □ 通 平	Zhì Píng Tōng Bǎo		Trị Bình Thông Bảo
3	嘉 寶 □ 通 祐	Jiā You Tōng Bǎo	Kayū Tsūhō	Gia Hựu Thông Bảo
12	元 寶 □ 祐 通	Yuán You Tōng Bǎo	Genyū Tsūhō	
9	嘉 寶 □ 通 靖	Jiā Jìng Tōng Bǎo	Katei Tsūhō	

6	乾 寶 □ 通 隆	Qián Lóng Tōng Bǎo		Càn Long Thông Bảo
4	乾 寶 □ 統 元	Qián Tǒng Yuán Bǎo		Càn Thống Nguyên Bảo
7	正 寶 □ 隆 元	Zèng Lóng Yuán Bǎo		Chính Long Nguyên Bảo
10	元 寶 □ 豊 通	Yuán Fēng Tōng Bǎo	Genpō Tsūhō	
14	元 寶 □ 通 豊			Nguyên Phong Thông Bảo

Посмотрим на другие повторяющиеся иероглифы. Например, иероглиф 元 *yuán* \ *gen-* \ *nguyên* бывает самым первым словом в названии и в таком случае всегда стоит наверху. Есть две монеты с одинаковым набором иероглифов: 10-я и 14-я. Видимо, первая читается в порядке сверху-справа-снизу-слева (по часовой стрелке), а вторая – сверху-снизу-справа-слева (крестом).

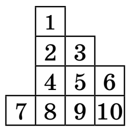
Можно ли объяснить так надписи на остальных монетах? Иероглиф 嘉 стоит наверху на монетах 3 ***kayū** tsūhō* и 9 ***katei** tsūhō*: это вариант «крестом». Иероглиф 平 стоит справа на монете 1 ***jihei** genpō* и наверху на монете 8 ***heian** tsūhō*: это варианты «по стрелке» и «крестом». Иероглиф 符 на монете 2 ***shofu** genpō* \ *tướng phù nguyên bảo* стоит справа, как и на монете 13 *xiáng fú tōng bǎo*; предполагаем соответствие *xiáng* \ *sho* \ *tướng* и *fú* \ *fu* \ *phù*, это вариант «по стрелке». Сравним монеты 1 ***jihei** genpō* \ *trị bình nguyên bảo* и 5 ***zhì** píng tōng bǎo* \ *trị bình thông bảo*: на обеих имеется пара иероглифов 治平; предполагаем соответствия *zhì* \ *ji* \ *tri* и *píng* \ *hei* \ *bình*, тогда первая монета читается «по стрелке», а вторая – «крестом». Всё сходится: есть лишь два варианта чтения.

Есть сложность с монетой 10 *yuán **fēng** tōng bǎo* \ *gen**pō** tsuho*: в ней нет ожидаемой из японского варианта пары 元寶 *genpō* (третье и четвёртое слово на многих монетах). Видимо, оба иероглифа 寶 (кит. *bǎo*) и 豊 (кит. *fēng*) соответствуют японскому *pō*. Мы уже видели пример неоднозначного соответствия с одним из них, но в другую сторону: 寶 читался по-разному в *gen**pō*** (кит. *yuán **bǎo***) и в *tsū**hō*** (кит. *tōng **bǎo***).

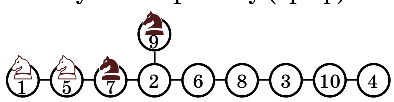
Ответы – в таблице (даны красным, зелёным выделены нетривиальные источники чтений, синим – неоднозначные места). Монеты переставлены, чтобы источники и ответы были рядом.

ПОНЯТЬ ФОРМУ ДОСКИ

(«Квантик» № 11, 2022)



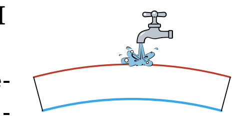
Ответ: да. Пронумеруем клетки, затем вместо каждой нарисуем кружок и соединим линиями кружки, между которыми есть ход коня. Получим картинку (граф):



Теперь видно, как поменять коней местами. (Отводим вправо чёрных коней, смещаем одного белого в клетку 9, возвращаем чёрных коней влево, а белого из клетки 9 уводим вправо, затем аналогично проводим вправо второго белого коня.)

ДОЩЕЧКА ПОД КРАНОМ

(«Квантик» № 11, 2022)



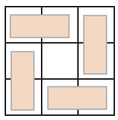
Дело в тепловом расширении. Сторона дощечки, обращённая к горячей струе, нагревается сильнее, чем обратная, а поэтому увеличивается больше, и дощечка искривляется, как на рисунке.

■ КАНИСТРА С ТРЕМЯ РУЧКАМИ
(«Квантик» № 11, 2022)

Такую канистру удобно нести как одному человеку (за центральную ручку), так и двоим (за две ручки по краям). Ещё ручки по краям позволяют нести в одной руке две пустые канистры.

■ XV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи

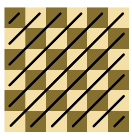
1. Ответ: 23. Каждый честный стоит между двумя лжецами, никакие три лжеца не стоят подряд. Если честных 7, то лжецов максимум по два по краям и по два между честными, а всего людей максимум $7+2+2+2\cdot 6=23$. Если честных 11, то лжецов минимум по одному по краям и по одному между честными, всего людей минимум $11+1+1+10=23$. Значит, их ровно 23.



2. Ответ: 16. Произведение всех чисел двух левых столбцов равно $1\cdot 1=$ $=1$. А произведение в левом нижнем квадрате 2×2 равно 2. Значит, в верхней левой доминошке произведение равно 1/2. Аналогично, произведение равно 1/2 ещё в трёх доминошках (см. рисунок). Но произведение всех чисел таблицы равно 1. Тогда в центре 16.

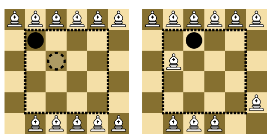
3. Ответ: 50. Докажем, что больше выбрать нельзя. Соединим каждых двух знакомых линией. Пусть нашлись 51 мафиози, между которыми нет линий. Так как каждый знаком с пятью другими, от этих 51 мафиози идёт $51\cdot 5$ линий к остальным 49. Но от тех к первым 51 идёт не более $49\cdot 5$ линий, что меньше $51\cdot 5$ – противоречие.

Вот пример, когда 50 людей выбрать можно. Расставим всех в два круга по 50 мафиози и занумеруем подряд в каждом круге числами от 1 до 50. Каждого мафиози 1-го круга познакомим с соответствующим мафиози и следующими четырьмя по часовой стрелке 2-го круга. Каждый тогда знает пятерых, а в 1-м круге все незнакомы.



4. Ответ: 16. Без фишки не обойтись: иначе на каждой из 11 диагоналей, идущих вправо вверх, стоит ровно один слон. Но тогда слоны из крайних диагоналей бьют друг друга!

На край доски фишку ставить нельзя: там она не мешает фигурам бить друг друга. А на любое поле внутреннего квадрата 4×4 фишку поставить можно. Подсказки справа.



5. Ответ: начинающий, поставив первым ходом доминошку в две центральные клетки доски. Далее на каждый ход второго он делает симметричный ход относительно центра доски. Второй нарушает симметрию, а первый восстанавливает. Второй не может одним ходом занять клетки, симметричные относительно центра доски (мешает первая доминошка). Поэтому, если второй смог сделать ход, то и первый сможет – симметричное место свободно. Пустые клетки когда-то закончатся, и первый выиграет.

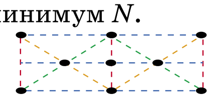
6. Ответ: всегда. Пусть Боря рисует путь из левого верхнего угла, двигаясь каждый раз вправо или вниз. У него всегда будет ход, пока он не на границе, так как нет точки, из которой вправо и вниз ведут красные отрезки. Если он придёт в угол, задача решена. Иначе он придёт во внутреннюю точку дальней стороны квадрата, пусть нижней. Тогда он построит аналогичный путь из левого нижнего угла, идущий только вправо или вверх. Этот путь пересечёт предыдущий, и Боря соединит путём левые углы доски.

7. Ответ: 100. Обозначим фиолетовых коров нулями, а белых – единицами. Докажем, что любую расстановку из N нулей и N единиц можно не более, чем за N операций превратить в нужную (вида 00…11…). Для $N=1$ это ясно. Покажем, как сводить задачу от данного N к меньшему.

В расстановке вида 0...1 можно не трогать крайние цифры и справиться за $N-1$ операций. В случае 0...0 найдётся 1 во второй половине: тогда возьмём правый кусок от конца до этой единицы и поменяем с предыдущим куском той же длины и 1 на конце, получим вид 0...1. Аналогично справимся в случае 1...1. В случае же 1...0 расставим внутренние цифры не более чем за $N-1$ операций в порядке 111... 000..., а потом поменяем первую половину всей группы со второй!

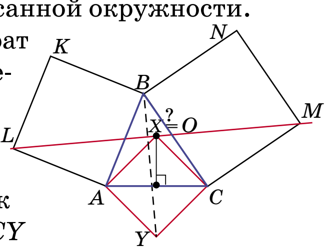
Докажем, что в случае комбинации 1010...10 нужны минимум N операций. Добавим в начало и конец вспомогательные 0 и 1: 0 1010...10 1. Скажем, что пара разных соседних цифр (10 или 01) образует плохую связь. В конце должна остаться ровно одна плохая связь, а вначале их $2N+1$. За ход мы выбираем какие-то два блока одной длины и меняем местами, разрушая максимум 3 связи. Но поскольку в самом начале у нас всегда 0 (вспомогательный), а в самом конце – 1, число плохих связей в любой момент нечётно. Значит, мы разрушаем максимум две связи! Поэтому, ходов нужно минимум N.

8. Ответ: да, см. рисунок.

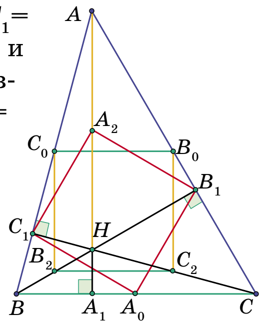


9. Биссектрисы проходят через центр вписанной окружности. Опустим перпендикуляры B_1X и A_1Y из точек B_1 и A_1 на AB. Так как углы A и B острые, прямые AC и B_1X различны и прямые BC и A_1X различны. Пусть B_1X касается вписанной окружности. Значит, треугольники XB_1B и CB_1B равны по стороне BB_1 и прилежащим к ней углам, откуда $\angle C = 90°$. Тогда прямоугольные треугольники YA_1A и CA_1A равны по углу и гипотенузе, тогда $\angle YA_1A = \angle CA_1A$, откуда A_1Y тоже касается вписанной окружности.

10. Построим квадрат $AXCY$ (см. рисунок). Треугольник LAX переходит в треугольник BAY при повороте на $90°$ вокруг точки A, а треугольник MCX – в треугольник BCY при повороте на $90°$ вокруг точки C в обратную сторону. При этом отрезки LX и MX оба переходят в отрезок BY. Значит, LX и MX равны по длине, а угол между ними $180°$, то есть X – середина LM и она совпадает с O. Теперь задача очевидна.



11. Так как $\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 45°$, треугольники AC_1C и BC_1H – прямоугольные равнобедренные. Отсюда $C_1B = C_1H$ и $C_1A = C_1C$, значит, треугольники AC_1H и CC_1B равны, откуда $AH = BC$.



$B_0C_0B_2C_2$ – квадрат: его стороны – средние линии в треугольниках с основаниями AH и BC; $A_0C_1A_2B_1$ – ромб: его стороны – медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузами AH и BC. Но $\angle C_1A_2B_1 = 2\angle C_1AB_1 = 90°$. Значит, ромб $A_0C_1A_2B_1$ – квадрат.

12. Закрасим все квадратики 2×2 синим. Получится одна или несколько синих фигур, возможно с дырками. Суммарный периметр синих фигур чётен, так как периметр каждого квадратика чётен, а при стыковке двух квадратиков из их суммарного периметра вычтутся две одинаковые части. Часть периметра, которая выходит на границу прямоугольника, тоже чётна. Но тогда и та часть периметра, которая лежит внутри, чётна. Она состоит в точности из тех сторон клеточек, на которые надо класть доминошку.

13. Ответ: можно. Если муха на линии сетки, то по ней попали. Положим мухобойку так, чтобы какие-то две мухи попали на одну линию сетки, назовём это направление горизонтальным. Сдвинем мухобойку вдоль этой линии так, чтобы хоть одна из оставшихся мух попала на вертикальную линию сетки. Оставшиеся три мухи сидят в каких-то клетках. Если хотя бы две из них чёрные – задача решена. Если хотя бы две из них белые, сдвинем мухобойку по горизонтали на одну клетку – две из трёх оставшихся мух попадут в чёрные клетки, а три первые мухи останутся на линиях.

14. Ответ: 159. Пусть даны 159 чисел. Среди них найдутся числа с одной и той же левой частью и либо окончаниями 00, 01, ..., 79, либо окончаниями 20, 21, ..., 99. Но суммы $0+0$, $0+1$, ..., $7+9$ дают всевозможные остатки от деления на 17, и суммы $2+0$, $2+1$, ..., $9+9$ тоже. Поэтому среди наших чисел найдётся искомое.

Но ни у одного из 158 чисел $10^{15}-79$, $10^{15}-78$, ..., $10^{15}+78$ сумма цифр не делится на 17.

15. Ответ: 200. Заметим, что n чётно: иначе сумма четырёх его наибольших делителей не больше $n + n/3 + n/5 + n/7 < 2n$. Аналогично, n кратно 3, так как $n + n/2 + n/4 + n/5 < 2n$. Тогда четвёртый наибольший делитель у n равен $2n - n - n/2 - n/3 = n/6$. Поэтому n не делится на 4 и 5. Но любое n, кратное 6 и не кратное 4 и 5, подходит. Чисел от 1 до 3000, кратных 6, всего 500. Из них 250 кратны 4, 100 кратны 5, 50 кратны $4\cdot5$ поэтому ответ: $500-250-100+50$.

16. Ответ: $(-2, -2, -2)$. Ввиду первого равенства b^2 делится на a^2, тогда b делится на a. Аналогично, c делится на b и a делится на c, откуда $|a| = |b| = |c|$. Если $a = b = c$, то $a^3 + 2a^2 = 0$ и $a = -2 = b = c$. Если же, например, $a = -b$, сложим первые два равенства, получим $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$, откуда $a = b = c = 0$, что противоречит условию.

17. Ответ: да. Подойдёт $2^{2021} + 0{,}5$. Пусть на доске записано число $N + 0{,}5$. Если N нечётно, то через минуту на доске появится целое число. А если двоичная запись у N оканчивается на k нулей, то через минуту их станет на 1 меньше.

18. Ответ: да. После смешивания на место k попадает число, имевшее номер $3k$, после следующего смешивания – число, имевшее изначально номер $3^2\cdot k$, и т.д. (номера, большие $3n$, заменяем их остатками от деления на $3n+1$).

Мы хотим, чтобы на месте k оказалось число, имевшее номер $193-k$. Но $192k$ как раз даёт при делении на 193 остаток $193-k$ (ведь $192k - (193-k) = 193k - 193$ кратно 193). Осталось найти такое t, чтобы 3^t давало при делении на 193 остаток 192. Убедитесь, что подходит $t = 8$.

итоги нашего конкурса

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Подведены итоги математического конкурса, проходившего с сентября 2021 года по август 2022 года. В нём участвовали более 900 школьников из разных стран. Новый конкурс уже идёт (см. с. 32).

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПОБЕДИТЕЛЕЙ! ИМИ СТАЛИ

Амиршадян Карина	Донецк	Школа № 17	7 кл.
Барков Артём	Москва	Школа № 179	8 кл.
Бирюков Иван	Мурманск	Филиал НВМУ	7 кл.
Вараксин Андрей	Магнитогорск	Школа № 5	8 кл.
Воропаев Ярослав	Орёл	Школа № 12	7 кл.
Ганичев Филипп	Киров	Вятская гуманитарная гимназия	5 кл.
Дайловская Дарья	Петрозаводск	Школа № 29	3 кл.
Елисеева Алиса	Екатеринбург	Школа № 94	3 кл.
Илаев Артур	Владикавказ	Гимназия № 5 им.А.В.Луначарского	5 кл.
Куцук Елена	Маунтин-Вью, Калифорния	Graham Middle School	7 кл.
Львова Алеся	Пенза	Губернский лицей	8 кл.
Мокеев Егор	Москва	Школа № 1158	5 кл.
Николаев Михаил	Санкт-Петербург	Лицей № 239	5 кл.
Приходько Тамара	Красноярск	Школа № 3	9 кл.
Савин Михаил	Протвино	Лицей «Протвино»	8 кл.
Салдаев Лев	Магнитогорск	Школа № 5	7 кл.
Скивко Тимур	Магнитогорск	Школа № 5	5 кл.
Токарева Дарина	Балаково	Лицей № 1	6 кл.
Шахова Мираслава	Санкт-Петербург	Школа № 621	5 кл.

Команда «Умники и умницы в математике», г. Тула, Центр образования № 4
Участники: Надежда Васильева, Алексей Давыдов, Виктор Канунов, Антон Макеев (8 класс Центра образования № 4) и Алексей Фёдоров (6 класс Центра образования № 44), руководитель Надежда Николаевна Заковыркина.

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПРИЗЁРОВ! ИМИ СТАЛИ

Ануфриева Ульяна	Лесосибирск	Школа № 9	10 кл.
Вараксина Наталия	Магнитогорск	Школа № 5	7 кл.
Вылегжанин Глеб	Киров	Кировский физико-математический лицей	5 кл.
Гаценко Егор	Москва		
Джаошвили Анна	Москва	Курчатовская школа	8 кл.
Загоскин Иван	Киров	Кировский физико-математический лицей	5 кл.
Зотова Анна	Троицк	Лицей города Троицка	7 кл.
Иванов Андрей	Балашиха	Школа № 3	6 кл.
Илаев Ахсартаг	Владикавказ	Гимназия № 5 им. А.В.Луначарского	4 кл.

Масловатый Марк	Одинцово	Одинцовский «Десятый лицей»	5 кл.
Метляхина Ольга	Вологда	Центр образования № 42	5 кл.
Мягков Александр	Москва	Школа № 17	5 кл.
Немилов Сергей	Иваново	Лицей № 33	7 кл.
Петриченко Ксения	Санкт-Петербург	Школа № 619	7 кл.
Погадаев Александр	Новосибирск	Школа № 195	5 кл.
Савина Наталия	Протвино	Лицей «Протвино»	4 кл.
Саначев Иван	Москва	Школа им. Маршала В.И.Чуйкова	6 кл.
Селютин Степан	Москва	Школа № 1371	4 кл.
Сивков Глеб	Санкт-Петербург	Школа № 375	6 кл.
Трофимов Иван	деревня Яныши, Чебоксарский район	Янышская школа	6 кл.
Ушаков Севастьян	Санкт-Петербург	ЦОДИВ	6 кл.
Федотова Дарья	Иваново	Лицей № 21	5 кл.
Шарипова Зарина	Уфа	Гимназия № 3	8 кл.
Шашина Светлана	Ижевск	Школа №30	7 кл.
Шишова Мария	Москва	Школа №2120	7 кл.

Математический кружок «Сигма», г. Подольск, лицей № 23. Участники: ученики 7 «В» класса, руководитель Мария Ткаченко.

Победителям и призёрам будут высланы дипломы журнала «Квантик», а также призы – научно-популярные книги издательства МЦНМО, фонда «Математические этюды», фонда «Траектория» и «Издательского Дома Мещерякова»

ТАКЖЕ ОТМЕЧАЕМ УСПЕШНОЕ ВЫСТУПЛЕНИЕ РЕБЯТ:

Авдеев Иван	Саратов	«Лицей-интернат 64»	8 кл.
Алтайская Антонина	Москва	Школа № 1590	5 кл.
Афанасьев Владимир	Воронеж	Лицей «МОК № 2»	6 кл.
Гришина Елена	Москва	Школа № 1159	5 кл.
Зеленова Варвара	Ногинск	Православная гимназия	6 кл.
Карпенко Артём	Зеленоград	Школа № 1557 им. П.Л.Капицы	7 кл.
Кистин Матвей	Долгопрудный	Физтех-лицей	8 кл.
Ковалева Варвара	Астрахань	Школа № 32	7 кл.
Кутель Артём	Владикавказ	Лицей	4 кл.
Пастухова София	Балашиха	Школа № 15	6 кл.
Плеханова Мария	Иркутск	Лицей № 2	8 кл.
Порунов Игорь	Москва	Лицей «Вторая школа»	6 кл.
Птушкин Иван	Киров	Кировский физико-математический лицей	6 кл.
Соловьева Екатерина	Санкт-Петербург	Школа № 226	5 кл.
Часовских Иван	Химки	Школа № 14	9 кл.
Шолухова Елизавета	Владикавказ	Лицей	6 кл.

Команда «Озарчата», г. Магнитогорск, школа № 5. Участники: Григорий Белов, Захар Белов, Михаил Жолудев, Иван Харитонов, Николай Храмцов (5 класс), Максим Шестопалов (6 класс), руководитель Алена Валерьевна Христева.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 5 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IV ТУР

16. В дате последнего дня этого года (31.12.22) одна цифра встречается один раз, другая – два раза, третья – три раза. Найдите следующую дату с тем же свойством.

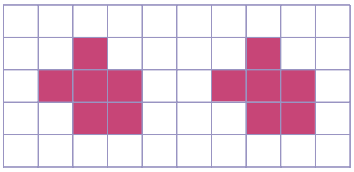
17. Известно, что N – натуральное число, а среди дробей $\frac{2}{N}$, $\frac{3}{N}$, $\frac{4}{N}$, $\frac{5}{N}$, $\frac{6}{N}$, $\frac{7}{N}$, $\frac{8}{N}$, $\frac{9}{N}$, $\frac{10}{N}$ ровно одна несократимая. Какая?

наш КОНКУРС

олимпиады

Авторы: Татьяна Корчемкина (16), Сергей Полозков (18), Татьяна Казицына (19); задачи 17 и 20 – фольклор

18. Квантик вырезал две одинаковые шестиклеточные фигуры, как на рисунке. Можно ли ими обклеить поверхность куба без наложений и пустых мест?



19. Буквы русского алфавита заменены числами от 1 до 33 в неизвестном порядке (разные буквы – разными числами). Эмма записала этим кодом своё имя (без пробелов), и так же поступили Вера и Леонтий.

а) Может ли быть, что Эмма и Вера написали одно и то же число?

б) Может ли быть, что одно и то же число написали Эмма и Леонтий?

20. Найдите наибольшую возможную площадь четырёхугольника, какие-то две стороны которого равны 1 и какие-то две стороны равны 2.

Художник Николай Крутиков

Если человек по гороскопу – Близнецы, то он родился в конце мая – в июне. Но созвездие Близнецов хорошо видно на небе вовсе не летом, а в конце ноября–в декабре (рядом с созвездием Ориона). Так всё-таки – это летнее или зимнее созвездие?

Автор Дмитрий Житницкий
Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 22012
9 772227 798220