ЖУРНАЛ

# КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9

сентябрь 2023

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ ДУШ

КОВЁР СЕРПИНСКОГО

ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ПО НОВОМУ СТИЛЮ

Enter

№ 9 | сентябрь 2023
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

**НАГРАДЫ ЖУРНАЛА**

2017 Минобрнауки России
**ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»**
за лучший детский проект о науке

2021 **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 Российская академия наук
**ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА**
за лучшие работы в области
популяризации науки

**Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2023 г.**
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
**Свидетельство о регистрации СМИ:**
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
**Главный редактор** С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

**Учредитель и издатель:**
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

**Подписка на журнал в отделениях почтовой связи**
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

**Онлайн-подписка на сайтах**
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
**Адрес редакции и издателя:** 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Формат 84x108/16 Тираж: 4500 экз.
Подписано в печать: 27.07.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
**ISSN 2227-7986**
6+

**www.kvantik.com** kvantik@mccme.ru vk.com/kvantik12 t.me/kvantik12

# СОДЕРЖАНИЕ



Василий Птушенко

# БОДРЯЩИЙ КИСЛОРОД

*Окончание. Начало см. в «Квантике» № 8, 2023*

– Что это? Неужели настала ночь? – забеспокоился Фёдор.

– Может, просто солнце за тучу зашло? – предположил Виктор. – Не волнуйся, выберемся отсюда. Давай пока ещё немного посмотрим, раз уж мы тут.

Но ничего особенного не происходило. Молекулы углекислого газа продолжали подлетать время от времени к «гусеницам» («углеводы» – вспомнилось слово Вите и Феде), а получавшиеся в итоге осколки продолжали видоизменяться, слипаться, разлипаться, соединяться в лодочки глюкозы и совершать свои путешествия к крахмалу.

– Странно, – произнёс, наконец, Виктор, – как будто солнечный свет и не нужен для фотосинтеза? И в темноте всё работает.

– Темновато, конечно, но всё же это ещё не полная темнота, – отозвался Фёдор.

Однако что-то начало меняться. Молекулы углекислого газа всё так же летали и слипались с длинными молекулами углевода на апельсиноподобном ферменте. По-прежнему возникали осколки, но они всё медленнее реагировали друг с другом, словно в темноте потеряли весь интерес к своей бурной «жизни». Нет, они не останавливались, их всё так же носило в разные стороны, как щепки на волнах, но только теперь это движение стало каким-то бессмысленным, безрезультатным. Всё меньше появлялось лодочек глюкозы, и даже гусеницеподобные молекулы, хватавшие углекислый газ, всё реже и реже заползали на апельсин.

– Нет, чего-то им всё-таки в темноте не хватает. Но чего – не могу разглядеть.

– Так в темноте и не разглядишь. Придётся ждать, пока солнце выглянет.

К счастью, ждать оказалось недолго. Видимо, солнце вышло из-за облаков, и клетку снова залило ярким светом. Молекулы, за которыми внимательно наблюдали ребята, вдруг снова словно ожили – стали видоизменяться, соединяться, разъединяться... Во всём этом бурном движении ребята заметили то, на что не обратили внимания раньше. Перед тем как вступать во все дальнейшие реакции, осколки от углевода, присоединившего к себе молекулу углекислого газа, сталкивались ещё с какой-то молекулой, похожей на морского конька с плоскими головой и хвостом, где шары-атомы были словно нанизаны на обруч. Что-то маленькое и стремительное перепрыгивало с «коньков» на молекулы-осколки при этом столкновении.

– Вить, ты видишь, что это?

– Нет, не могу разобрать.

– Надо посмотреть, откуда они плывут.

«Морские коньки» плыли откуда-то со стороны зелёных складок. Ребята двинулись туда. Складки при ближайшем рассмотрении оказались больше похожи на уложенные в стопку мешки, чем на шторы: у штор есть края, а тут никаких краёв или углов не было видно. Сама «ткань» была очень похожа на ту мыльно-пузырную мембрану, через которую дети пролезали в клетку.

Вблизи можно было разглядеть и те зелёные песчинки, которые покрывали бо́льшую часть поверхности мембраны. Они напоминали клубки и были нескольких видов; некоторые плавали в мембране поодиночке, некоторые – по два или три, а некоторые слипались в один большой «плот». Многие клубки были утыканы плоскими зелёными флажками, словно швейная подушечка – булавками.

– Я знаю, это же хлорофилл! – воскликнул Фёдор. – Это он поглощает солнечный свет, чтобы использовать его для фотосинтеза. А клубки – это, наверное, белки, за которые он держится.

В этот момент что-то вроде вспышки осветило мембрану, которую они рассматривали. Мгновенно что-то маленькое пробежало по одному из белковых клубков, перескочило с него на другой, красноватого оттенка, с него – на третий, снова зелёный. Ещё одна вспышка – и оно побежало и по этому клубку, перескочило на какую-то молекулу, а с неё – на «морского конька»! Затем – ещё одно, и ещё... «Морских коньков» с ценным грузом накапливалось всё больше и больше, и они, обычным для этого странного мира беспорядочным зигзагообразным движением, начали расползаться во все стороны, но в основном – туда, где без их груза замирала осмысленная жизнь, где апельсинообразные ферменты ловили углекислый газ. Но что же это был за груз? Он пробегал по зелёным клубкам с такой скоростью, что ребятам никак не удавалось разглядеть.

– Нет, не могу разобрать, – Фёдор, наконец, оторвал взгляд от этой завораживающей, но совершенно непонятной картины. – Догадываюсь только, что это те самые искры, которые мы с тобой видели снаружи и которые нам напомнили искры в наэлектризованной нейлоновой ткани.

– Похоже, конечно. Но там – электроны бегут, а тут... Постой! – Виктора вдруг осенило. – А может быть, и это тоже – электроны?

Ребята снова вгляделись в складчатую мембрану с зелёным клубками. Трудноразличимые электроны бежали от одного белка к другому, заканчивая свой путь на «морских коньках», которые дальше несли их к углеводам.

– Так вот чего не хватало для превращения углекислого газа в глюкозу, – сообразил Виктор, – электронов! Мы даже по химии это проходили – окислительно-восстановительные реакции, в которых нужно перенести электрон от одного вещества к другому.

– Другое – это углеводы, тут всё понятно. Их зачем-то надо восстановить, чтобы получить глюкозу из углекислого газа. А вот где это самое «одно вещество», от которого они переносятся? Я ничего не вижу.

Ребята снова вгляделись в один из клубков, где начинал своё путешествие электрон. Вот один электрон побежал вперёд. Казалось, что он начал своё движение почти от границы белка, но кто мог его туда принести? Ни одна молекула не приближалась к этой границе и не отплывала от неё. Второй электрон побежал – никаких изменений. Третий – всё по-прежнему.

– Не могут же они из ничего браться!

– Может быть, это что-то мелкое, чего мы с тобой не можем различить?

И вдруг, когда очередной электрон отправился в свой путь, оттуда же выплыла знакомая им молекула – двойной «мыльный пузырь», на который ребята обратили внимание ещё на пути в клетку. А его место незаметно заняли два «уголка» – молекулы воды.

– Так вот почему мы не заметили их! Вода тут везде, и мы просто не обратили на неё внимание. – Фёдор удовлетворённо потёр руки.

– Только я пока не понимаю, что с водой происходит. Давай посмотрим ещё раз.

Снова четыре электрона убежали вдаль, а вместо двух молекул воды из белка выплыла наружу всё та же двухатомная молекула. Только теперь ребята обратили внимание ещё на четыре маленьких атома, вместе с ней покинувших белок. Виктор задумался.

– Если вначале были молекулы воды, то выходит, что это – водород и кислород, ведь никаких других элементов в воде нет.

– Точно! А ведь мы с тобой даже в музее видели похожий опыт – когда через воду пропускали электрический ток и разлагали её на водород и кислород.

– Да, только тут молекула водорода не получается – одни только атомы.

– Думаю, что это даже и не атомы, а ионы. Ведь их электроны убежали к углеводам.

– Получается, что для превращения углекислого газа в глюкозу нужны электроны, и растение их отбирает с помощью света у воды? А в результате из воды получается кислород – отход фотосинтеза, не нужный растению! Вот оно его и выбрасывает! – Виктор был счастлив. – Теперь я понимаю...

– Ну, раз понимаешь, то можно и обратно! Поехали?

– На чём?

– Да на том же кислороде. Раз растение его выделяет, значит, и мы вместе с ним рано или поздно снаружи окажемся.

Ребята покрепче ухватились за своих только что опознанных «лошадок», и те понесли их. Из хлоропласта, из клетки, вот уже впереди открылась яркая устьичная щель, и солнечный свет ослепил их, так что невозможно было не зажмуриться.

...Виктор открыл глаза. Он лежал

на траве, над ним наклонился стебель какого-то злака, в небе сияло солнце. Приподнявшись на локте, он потеребил Федю – тот тоже лежал, зажмурив глаза.

– Федя, ты спишь?

– Уже нет. Хотя, кажется, и правда задремал после нашего с тобой перекуса.

– Да, и меня тоже в сон потянуло. А помнишь, мы с тобой про листья начинали говорить и про кислород? Так вот, мне тут такой сон приснился...

– И тебе тоже? – Фёдор тоже приподнялся на локте.

– Нам с тобой что, одинаковые сны снились?

– Или не сны.

– Думаешь, мы правда внутри листа побывали?

– Не знаю. Но мы с тобой уже не в первый раз куда-то проваливаемся – стоит нам начать с тобой слишком умные разговоры.

– Это, наверное, всё оттого, что они очень интересные.

– Это всё оттого, что кто-то слишком умный, – прервал Фёдор. – Вставай, пойдём домой. Надышались кислородом, и хватит.

Ребята поднялись, собрали пакеты с остатками завтрака и корзинки с «добычей». Виктор накинул рюкзачок на одно плечо.

– Федь, а я где-то читал, что на самом деле кислорода – везде одинаково, что это вовсе не из-за него лесной воздух бодрит...

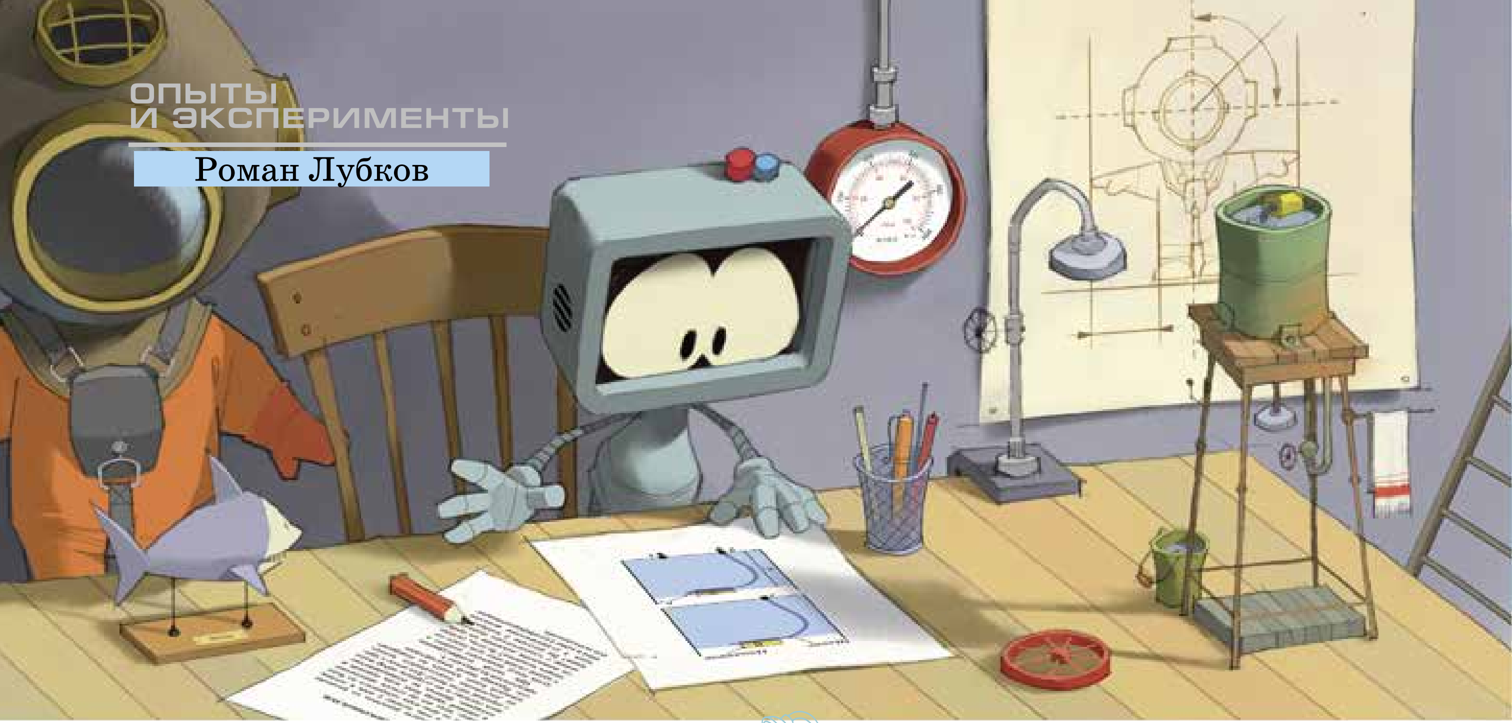
– Ты опять? Слушай, я хочу сегодня добраться домой, а не в новое приключение отправляться.

– Молчу, молчу! – прервал себя Виктор. Потом заговорщицки наклонился к уху товарища и шёпотом спросил: – Но в следующий раз – обсудим?

– Обсудим, – подмигнул ему Фёдор. – Но – в следующий раз!

Художник Мария Усеинова

Роман Лубков



# УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ ДУШ

Эта задача родилась из размышлений о том, почему у всех в летнем душе на даче вода забирается из бака снизу, ведь это не совсем практично: в нижней части бака вода грязнее и холоднее. Почему не усовершенствовать систему и не устроить забор воды с верхней части бака? Для этого к крану достаточно подсоединить шланг, который будет плавать на поверхности. Пример такой конструкции представлен на рисунке 1.

При такой конфигурации душа сразу возникает вопрос: а с какой силой этот душ будет поливать человека? То есть сильно ли изменится давление по сравнению с классическим исполнением? На рисунке 2 изображен кран 1 (классическое исполнение) и кран 2 (усовершенствованное исполнение).

Задача состоит в подсчёте давления на кранах 1 и 2. Как известно, давление зависит от плотности жидкости, ускорения свободного падения (они одинаковы для обоих способов) и высоты столба жидкости. Но высоту можно трактовать по-разному. Можно учитывать только маленький столбик $h_2$ над шлангом или всю высоту уровня воды $h_1$. Правильный ответ – давление

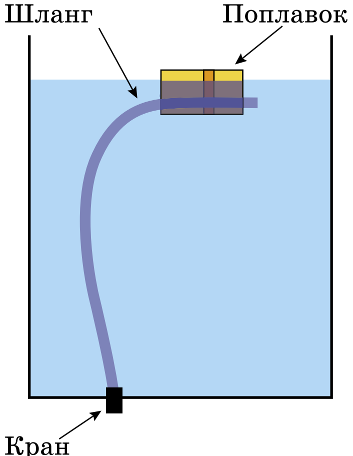



Рис. 1

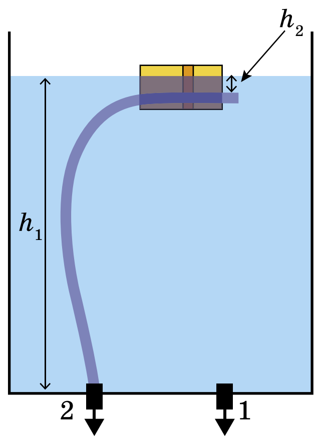
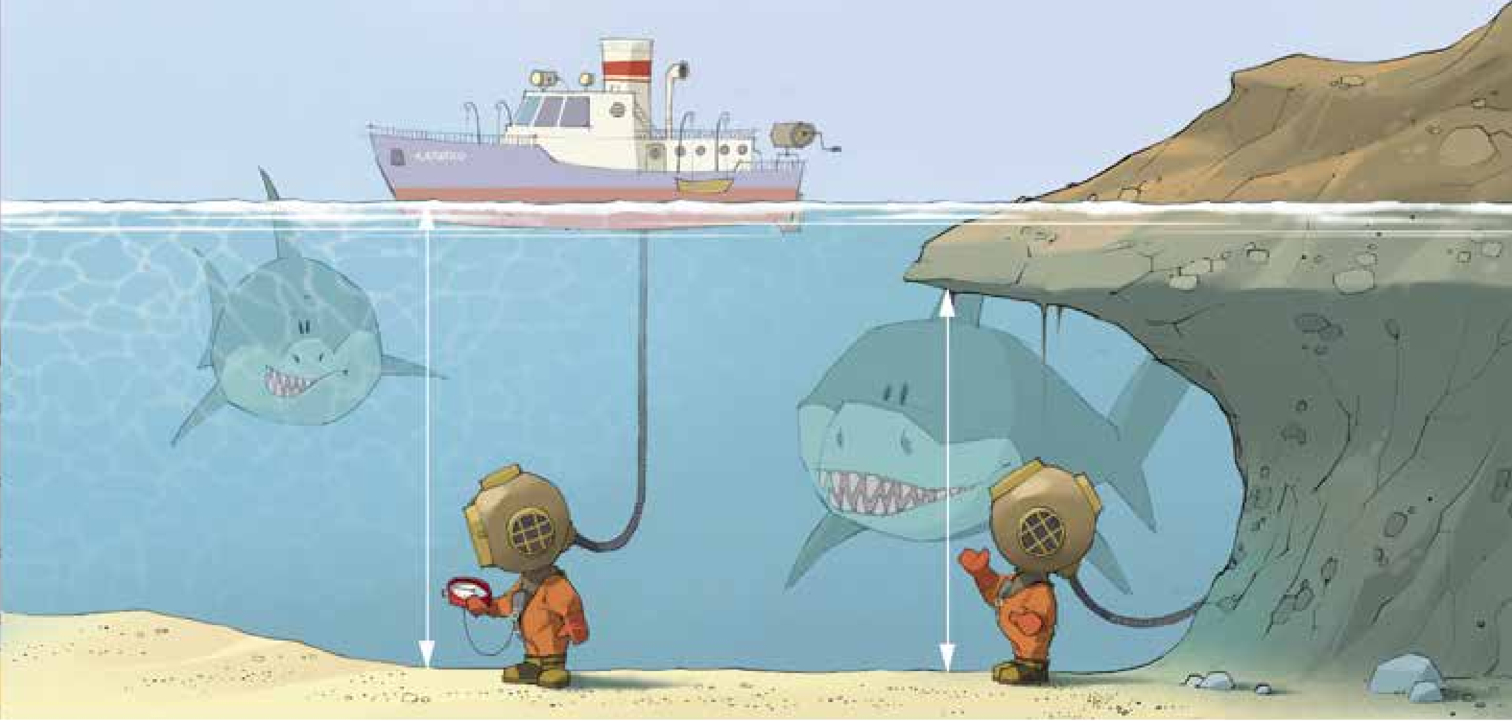



Рис. 2



будет одинаково, если пренебречь сопротивлением шланга и его изгибами. Высота считается вся, хотя изначально может показаться, что вода потечёт еле-еле.

Есть модификация этой задачи, но с интересным косвенным решением. Возьмём тот же бак, но вместо кранов будем использовать два шланга, перекинутых через верх и погружённых на разные уровни (рис. 3). При использовании сифона на конце какого из шлангов давление будет больше? Ответ, как и в первой задаче: давление будет одинаково. Но здесь есть интересная подсказка к решению. Допустим, давление различное, тогда, соединив шланги как на рисунке 4, получим вечный двигатель, что невозможно. Значит, давление одинаковое.

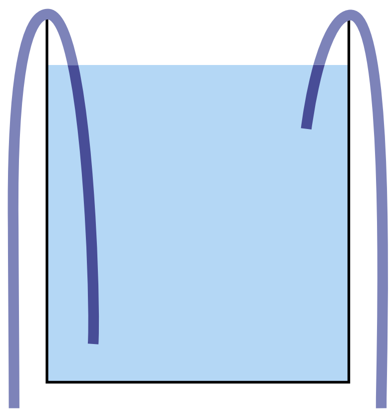


Рис. 3

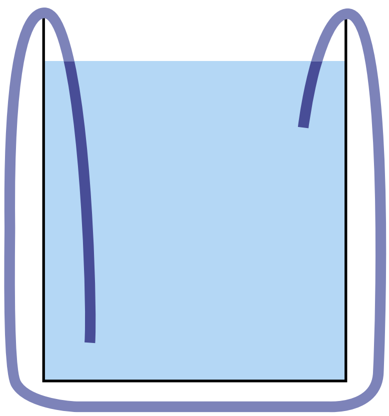


Рис. 4

Теперь вы, наверное, легко решите и исходную задачу.

В дополнение вот ещё один известный физический вопрос.

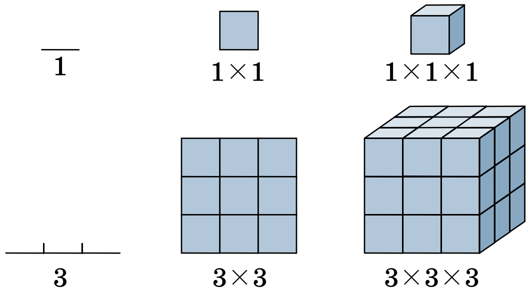
Сравните, одинаковое ли давление испытывают два водолаза (один – в открытом море, другой – в гроте, см. картинку вверху) на одной глубине на дне залива.

Художник Алексей Вайнер

Никита Солодовников

# КОВЁР СЕРПИНСКОГО

Если втрое увеличить сторону квадрата, его периметр увеличится втрое, а площадь – в $3 \cdot 3 = 9$ раз. Если же втрое увеличить сторону кубика, его объём увеличится в $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ раз.



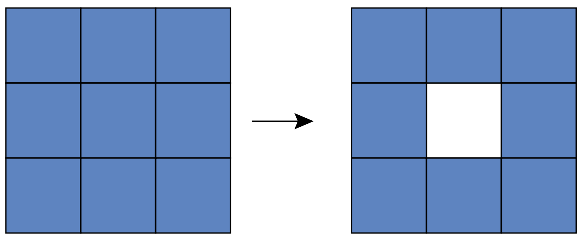

Закономерность верна в общем случае: при увеличении в $k$ раз площадь двумерной фигуры увеличится в $k \cdot k$ раз, а объём трёхмерного тела – в $k \cdot k \cdot k$ раз. Более того, квадрат $3 \times 3$ *разбивается* на 9 квадратиков $1 \times 1$, а куб $3 \times 3 \times 3$ – на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (но так бывает уже не всегда: шар разбить на шарики нельзя).

**Задача 1.** Куб а) $3 \times 3 \times 3$; б) $4 \times 4 \times 4$; в) $12 \times 12 \times 12$ окунули в краску, а затем разрезали на единичные кубики. Сколько в каждом случае будет кубиков с тремя, двумя или одной окрашенной гранью? А сколько будет кубиков, у которых ни одна грань не окрашена?

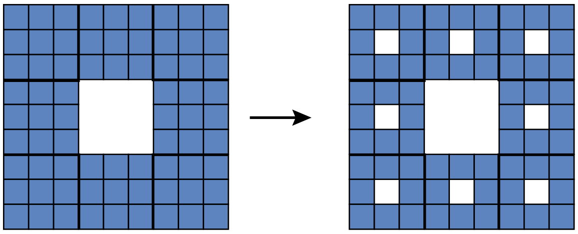
**Задача 2.** За неделю ежедневной стирки длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько дней хватит оставшегося куска?

**Ковёр Серпинского**

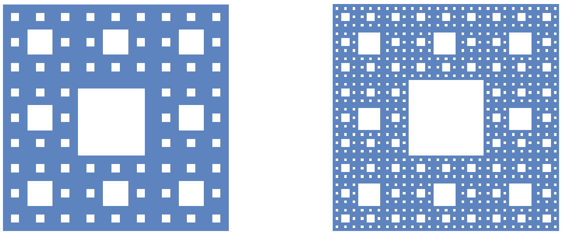
Построим на плоскости фигуру, которая при увеличении в 3 раза составляется не из 9, а из 8 копий исходной фигуры. Для этого разобьём квадрат на $9 = 3 \cdot 3$ квадратиков, а затем вырежем средний квадрат.



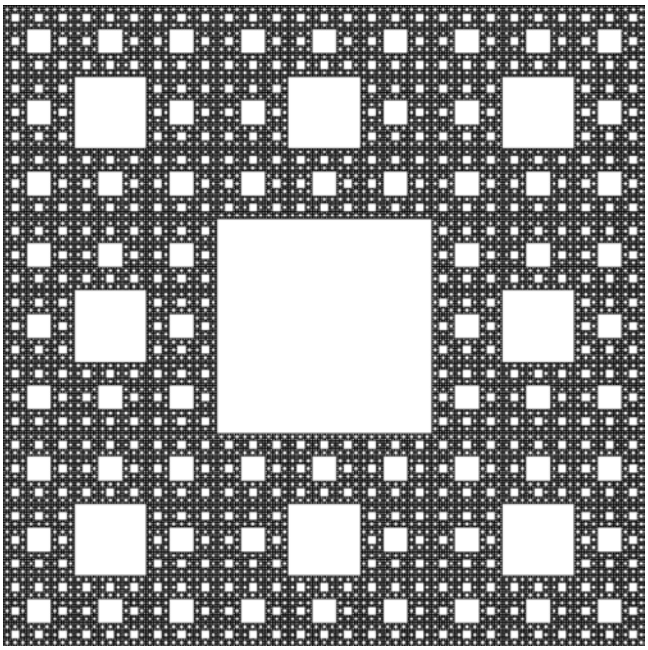
Фигура теперь состоит из 8 квадратиков. Но мы хотим, чтобы фигура состояла из 8 копий самой себя, а сама она – квадрат с дыркой. Для этого повторим операцию с каждым из восьми квадратиков: разобьём каждый на $3 \cdot 3$ частей и выкинем среднюю.



Фигура опять не состоит из копий самой себя, ведь в маленьких квадратах нет дырок. Но теперь дырке, возникшей на первом шаге, соответствуют дырки второго шага. Повторим операцию ещё и ещё раз.



...



Проделаем эту операцию бесконечное число раз. Получится эдакий «всюду дырявый квадрат».

Эту фигуру называют *ковром* или *квадратом Серпинского*. Её трудно представить, потому что неясно, что значит «повторить операцию бесконечное число


раз». Вдруг мы выкинули вообще все точки и вместо ковра у нас – пустое место? Оказывается, нет. Чтобы понять это, заметим: если точка была вырезана, можно указать номер шага, на котором это случилось.

**Задача 3.** Укажите точку квадрата, которая не будет выкинута ни на каком шаге. Она точно будет принадлежать ковру.

Итак, ковёр Серпинского состоит не из 9, а всего лишь из 8 своих втрое уменьшенных копий.

**Площадь ковра Серпинского**

Длину обычно измеряют у кривых, площадь – у двумерных фигур, а объём – у тел. Но ведь можно попробовать измерить площадь чего угодно, что изображено на плоскости. Например, площадь отрезка равна нулю: ведь его можно накрыть сколь угодно узким прямоугольником сколь угодно малой площади.

Найдём площадь ковра Серпинского! В нём повсюду дырки, трудно выделить в нём хоть один «целый» кусочек. Попробуем посчитать, как уменьшается площадь фигуры от шага к шагу при построении ковра.

**Задача 4.** Посчитайте площадь дырявых квадратов справа на рисунках внизу с. 10 и вверху с. 11, считая за единицу сторону наименьшего из квадратиков.

На первом шаге из 9 квадратов выброшен 1 средний, а значит, мы оставили $\frac{8}{9}$ исходной площади. На втором шаге мы повторили вырезание с каждым из 8 оставшихся квадратов, а значит – после выкидывания вторых по размеру дырок – снова *оставили лишь* $\frac{8}{9}$ *площади от предыдущего шага*. Это уменьшение будет повторяться на каждом шаге. Уже после шестого шага останется менее половины площади квадрата, так как $\left(\frac{8}{9}\right)^6 < \frac{1}{2}$. После двенадцатого – меньше четверти, и так далее. Мы сможем сделать площадь меньше любого положительного числа. Значит, площадь ковра надо считать нулевой: $9 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots = 0$.

Может быть, можно измерить длину границы ковра Серпинского?

**Задача 5.** Посчитайте длину границы каждой из фигур на рисунке вверху с. 11.

Как и в случае площади, посчитаем длину границы на каждом шаге. В начале она равна периметру квадрата. После первого шага к ней прибавляется периметр центрального квадратика. Затем – восьми квадратиков, каждый из которых втрое меньше выкинутого на первом шаге. Количество вырезаемых квадратиков увеличивается на каждом шаге в 8 раз. А периметр каждого вырезаемого квадратика уменьшается только в 3 раза. Значит, добавка к длине границы на каждом шаге увеличивается в $\frac{8}{3}$ раза! А сумма всех добавленных длин окажется бесконечно большой.

Итак, длина границы ковра бесконечна, а площадь самого ковра равна нулю.

**Размерность**

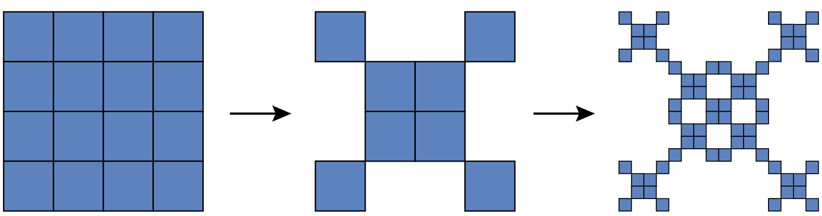
На примере квадрата и кубика отметим такое свойство размерности: *если фигуру размерности $d$, увеличенную в $k$ раз, можно составить из копий изначальной фигуры, то их количество равно $k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^d$.*

Так, при увеличении в $k = 3$ раза квадрат составляется из $3^2 = 9$ исходных квадратиков, $d = 2$, а куб – из $3^3 = 27$, $d = 3$. Какая же должна быть размерность ковра Серпинского? При увеличении в 3 раза он составляется из 8 копий, значит, размерностью должно быть такое число $d$, что $3^d = 8$.

Целые числа $d = 1, 2, 3$... не подходят: $d = 1$ недостаточно, а $d = 2$ слишком велико, так как $3^1 < 8 < 3^2$. Значит, размерность ковра где-то между 1 и 2. На это также указывают площадь и длина. Площадь у ковра нулевая, как у отрезка, а длина бесконечная.

В «дробной» размерности есть смысл. Отрезок, ковёр Серпинского, квадрат и куб – всё *самоподобные* фигуры: их можно составить из копий самих себя. «Дробную» размерность можно определить и для произвольных фигур, но мы этого делать здесь не будем.

**Задача 6.** Попробуйте сами оценить площадь, длину границы и даже найти «размерность» дырявой фигуры, изображённой на рисунке ниже.



Художник Мария Усеинова

**Размерность береговой линии и реки**

Как измерить длину кривой на плоскости? Можно откладывать шаги на кривой отрезками фиксированного размера, а затем оценить снизу длину кривой как (*число полных шагов*) × (*длина шага*). Чем меньше отрезок, тем больше будет число шагов – и тем точнее будет измерена длина кривой. Оценки длины окружности диаметра 1 с шагом 1/10 и 1/1000 будут отличаться не более чем на 1/100. Оказывается, многие естественные объекты хорошо описываются математическими фигурами дробной размерности. Длина береговой линии Великобритании или длина Енисея со всеми притоками растут как будто неограниченно, если измерять их со всё большей точностью: оценки не сходятся, в отличие от случая окружности. В крупном масштабе обнаруживаются всё новые изгибы берега, а в случае реки – ещё и прежде не учтённые притоки. Это даёт всё большую добавку к длине при уменьшении шага измерений. Как и для ковра Серпинского, для описания таких фигур подходит размерность, промежуточная между 1 и 2.


Источник: frexosm.ru на основе данных openstreetmap.org

Иван Высоцкий

# Случай в южном городе

Будучи проездом в одном южном городе, следователь Башковицкий зашёл в местный уголовный розыск повидать однокурсника Леонида Проницательного. Леонид сидел за столом и рассматривал фотографии, на которых был запечатлён вход в здание банка.

– Вот, дружище, смотри! Свидетель сделал эти фото на месте преступления совершенно случайно, утром, практически в момент ограбления. На фото отчётливо видна левая пятка, по которой мы безошибочно опознали известного грабителя по кличке Сапог. Это позволяет однозначно утверждать, что Сапог был около банка во время ограбления. Дело в шляпе.

– Леня, а ты интересовался, какая погода была в тот день?

– Конечно! Дождь шёл ночью и прекратился на рассвете, но потом весь день было пасмурно и довольно холодно. Видишь – ступени и плитка не до конца просохли.

– Боюсь, твой свидетель ненадёжен. Похоже, снимок сделан совсем в другой день. Думаю, свидетель знает больше, чем говорит, и пытается подставить Сапога, который, по моим данным, начал новую честную жизнь.

**Почему Башковицкий решил, что снимок сделан не в день ограбления?**

Художник Алексей Вайнер

Игры и Головоломки

Владимир Красноухов

# ДВА ЛЕБЕДЯ, ИЛИ ТРИ ВАЗЫ

Набор деталей этой головоломки (рис. 1) вырежьте из фанеры или плотного картона. Рядом с каждой деталью указана её площадь (за единицу взята площадь треугольничка сетки). Не пренебрегайте этой информацией – она позволит существенно сократить время решения самой сложной задачи!

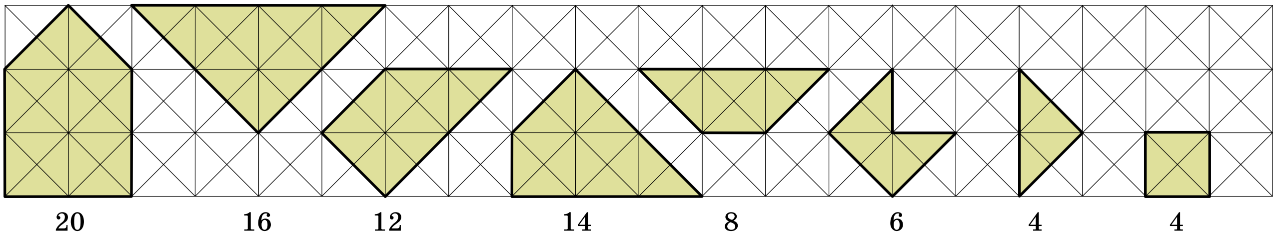



Рис. 1

**Задача 1** (самая сложная). Используя весь набор, составьте одновременно три подобные фигуры, одинаковые по форме, но различные по размеру. Детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Автор головоломки (В. Красноухов) уверен, что решение единственно. Читателю, который первым пришлёт автору электронной почтой по адресу wkr44@mail.ru верное решение, редакция «Квантика» вышлет приз – набор механических головоломок, о которых мы писали в нашем журнале.

**Задача 2.** Используя весь набор, составьте одновременно пару равных (одинаковых по форме и размерам) фигур. Тут решений несколько, один из примеров приведён на рисунке 2.

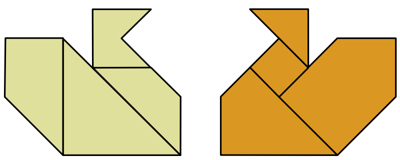
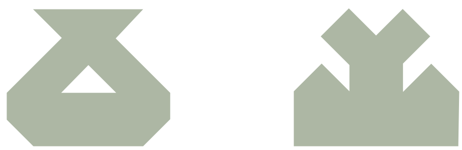


Рис. 2

**Задача 3** (для разминки). Соберите фигуры, силуэты которых приведены на рисунке 3. В каждой фигуре используйте весь набор элементов.



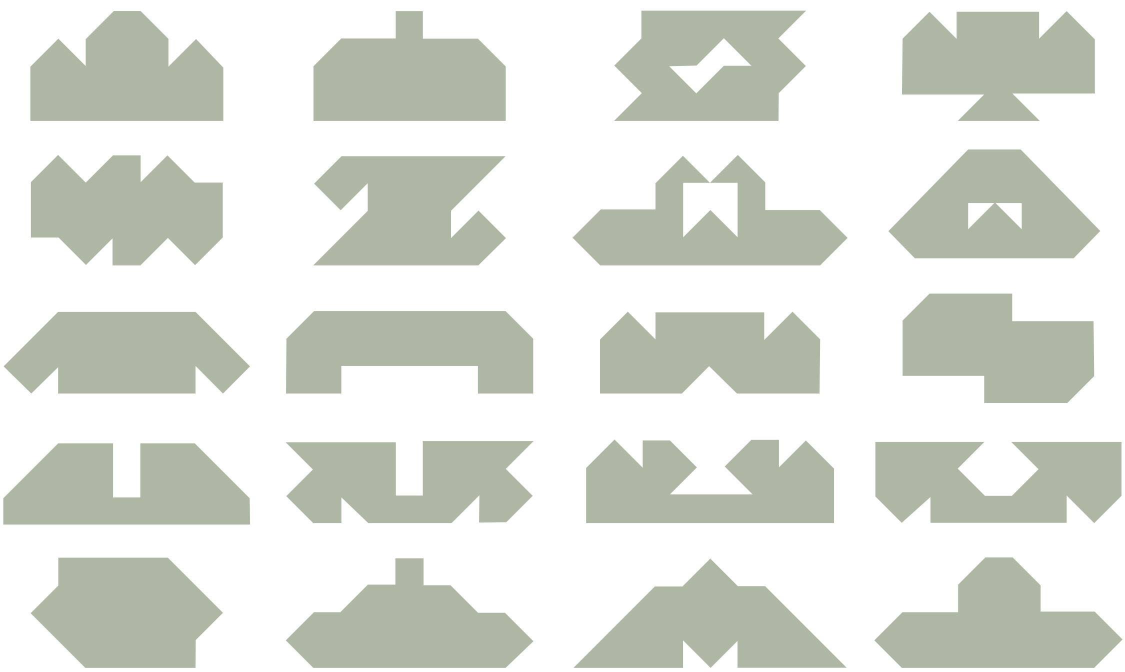


Рис. 3

*Ответы в следующем номере*

Художник Мария Усеинова

Желаем успехов!

Валерия Сирота

# И СНОВА ПРО КОНИКИ

*Окончание. Начало в № 8 за 2023 г.*

***Эллипс – парабола – далее везде. Фокус с фокусами***

Разобравшись с задачками, Данька спросил:

– А вот если я буду всё сильнее наклонять плоскость – я ведь получу всё более вытянутые эллипсы, да? И потом они превратятся в параболу?

– Конечно, но какого эллипсы будут размера – зависит от того, как ты поднимаешь или опускаешь плоскость, то есть как при этом меняется расстояние от плоскости до вершины конуса. Можно менять так, чтобы «начало» у всех эллипсов было в одной и той же точке и конуса, и плоскости (рис. 9, *а*). А потом все плоскости с нарисованными на них кониками совместить. В этом случае, если конус широкий (угол раствора больше 90°), эллипсы, возникающие между появлением окружности и параболы, окажутся внутри параболы, а окружность – внутри эллипсов (рис. 9, *б*); если конус узкий – эллипсы возле общей точки будут сначала «толстеть», а потом «худеть» (но поперечный размер эллипсов в любом случае растёт) (рис. 9, *в*).

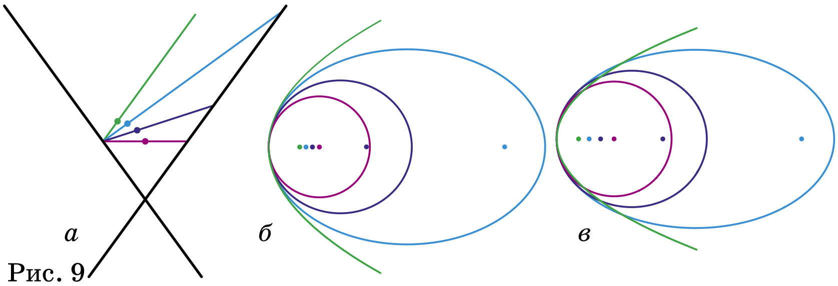



Рис. 9

– А если так менять, чтобы фокусное расстояние всё время оставалось одним и тем же?

– Можно. Но тогда мы не увидим ни настоящей окружности – она должна получиться бесконечно большой, ни параболы – она была бы бесконечно узкой, сольётся с отрезком (рис. 10).

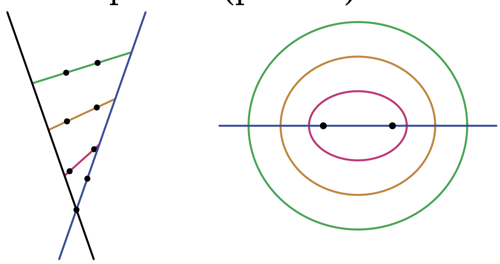


Рис. 10

– Как это – парабола превращается в отрезок?

– На самом деле не в отрезок, а в прямую... При таком способе сдвигания плоскости горизонтальная плоскость (и окружность) была бы бесконечно далеко вверху, а по мере увеличения наклона она бы «спустилась» до самого низа, и при таком угле, который нужен для параболы, проходила бы уже через вершину конуса. Видишь – на нашей картинке сечение всё ближе и ближе к образующей конуса. Когда совсем сольётся с ней – толщина у нашего эллипса исчезнет, зато и верхний край исчезнет, отрезок превратится в луч. Как будто бесконечно узкая парабола. Ещё и снизу «хвост» отрастёт, потому что наша плоскость уже и нижнюю часть конуса задела... В общем, это так себе способ: ни окружности, ни параболы не получается.

Давай лучше так двигать плоскость, чтобы угол наклона менялся, а расстояние ρ при этом оставалось постоянным – как на рисунке 11 слева. Тогда можно совместить картинки всех полученных эллипсов так, что и один из фокусов, и ближняя к нему точка будут закреплены, а второй фокус уползает вдаль... и эллипс превращается в параболу. А потом – когда ещё сильнее наклоняем – в гиперболу! Что происходит со вторым фокусом? Он теперь приближается из бесконечности, но с другой стороны (рис. 11)!

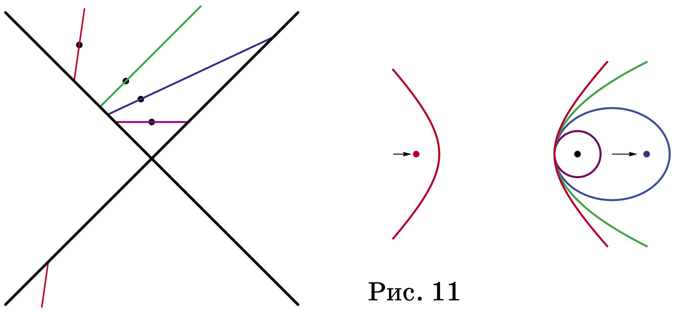
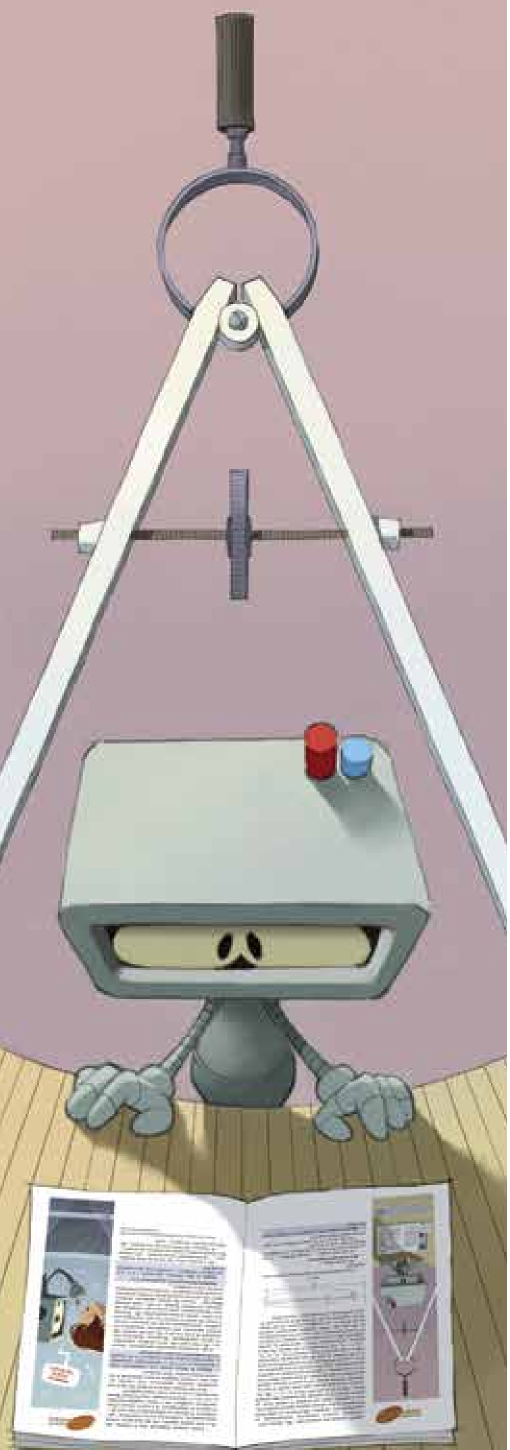


Рис. 11

– Круто! Гипербола – это вывернутый через бесконечность эллипс! У которого середина застряла на бесконечности.

– Кстати, я всегда так объясняла себе, почему у параболы директриса «вместо» второго фокуса. Давай проведём через дальний фокус эллипса прямую, перпендикулярную главной его оси (рис. 12). Возьмём какую-нибудь точку $M$ вблизи первого, ближнего



фокуса и сравним $d_2$ – расстояние от неё до дальнего фокуса с расстоянием $d_2'$ до этой перпендикулярной прямой. Если эллипс сильно вытянут, то эти два расстояния почти равны. Правда же? – «толщина» эллипса несущественна по сравнению с его «длиной». Получается, что наш очень вытянутый эллипс вблизи первого фокуса задаётся таким условием: сумма расстояний от любой точки до первого фокуса и до прямой, проходящей через второй фокус, одна и та же для всех точек: $d_1 + d_2' = c$. Но, поскольку эта новая прямая уже очень далеко и при удлинении эллипса уходит всё дальше, мерять расстояние до неё неудобно. А ведь можно вместо этого не прибавлять, а отнимать расстояние до какой-то другой прямой, параллельной ей, но находящейся слева от эллипса! (Чтобы все точки эллипса были по одну и ту же сторону от неё.) И такая разность тоже будет одна и та же для всех точек, потому что $d_1 - d_3 = d_1 + d_2' - d_{23} = c - d_{23}$: она отличается от той суммы, что была раньше, на постоянное число – расстояние $d_{23}$ между прямыми. Ну а уж раз мы можем выбрать эту прямую и это расстояние как угодно, ничего не стоит подобрать её так, чтобы разность равнялась нулю! Конечно, для длинного эллипса это всё верно только приблизительно. Но чем более вытянутый эллипс, тем точнее, а для параболы – совсем точно.

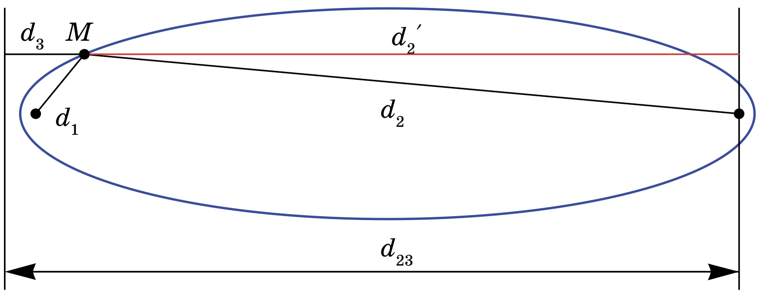



Рис. 12

***Для знатоков координат***

– А вот ещё вопрос, – сказал Данька. – У нас в школе тоже ведь были и параболы, и гиперболы. Но это какие-то не те, что ли?

– Почему же не те? Те самые! Чтобы в этом убедиться, реши такую задачку:

**Задача 4.** Найди, где у параболы $y = x^2$ фокус и директриса.

– Опять теорема Пифагора мне в помощь, да? Но у всех наших парабол, как мы выяснили, только один параметр, которым они могут отличаться, – расстояние $\rho$ от фокуса до ближайшей точки (или $2\rho$ – от фокуса до директрисы). А в школе писали общее уравнение параболы аж с тремя коэффициентами: $y = ax^2 + bx + c$. Куда их столько, этих буковок? Зачем они нужны, если это всё та же самая парабола?

– А на этот вопрос отвечать не буду! Это ты и сам прекрасно можешь догадаться, если хорошо понял, как устроены графики разных уравнений и что с ними можно делать. Пусть это будет

**Задача 5.** Какая буква или комбинация букв в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ соответствует параметру $\rho$, характеризующему наши параболы? А что делают с этой параболой остальные параметры?

А вот гиперболы школьной программой обижены. На самом деле они, как и эллипсы, управляются двумя параметрами. Например, фокусным расстоянием $2f$ и всё тем же $\rho$. Но, как мы видели, при разных значениях этих параметров получаются гиперболы, расходящиеся вдали под разными углами. В школе же изучают только те из них, у которых этот угол (угол между асимптотами) равен 90°. Поэтому для справедливости давай решим про гиперболу две задачки посложнее! Решать «в лоб» через теорему Пифагора – сложно. Но можно применить хитрость вроде той, которая далёкий фокус эллипса превращает в директрису параболы: для этого надо рассмотреть далёкую точку гиперболы...

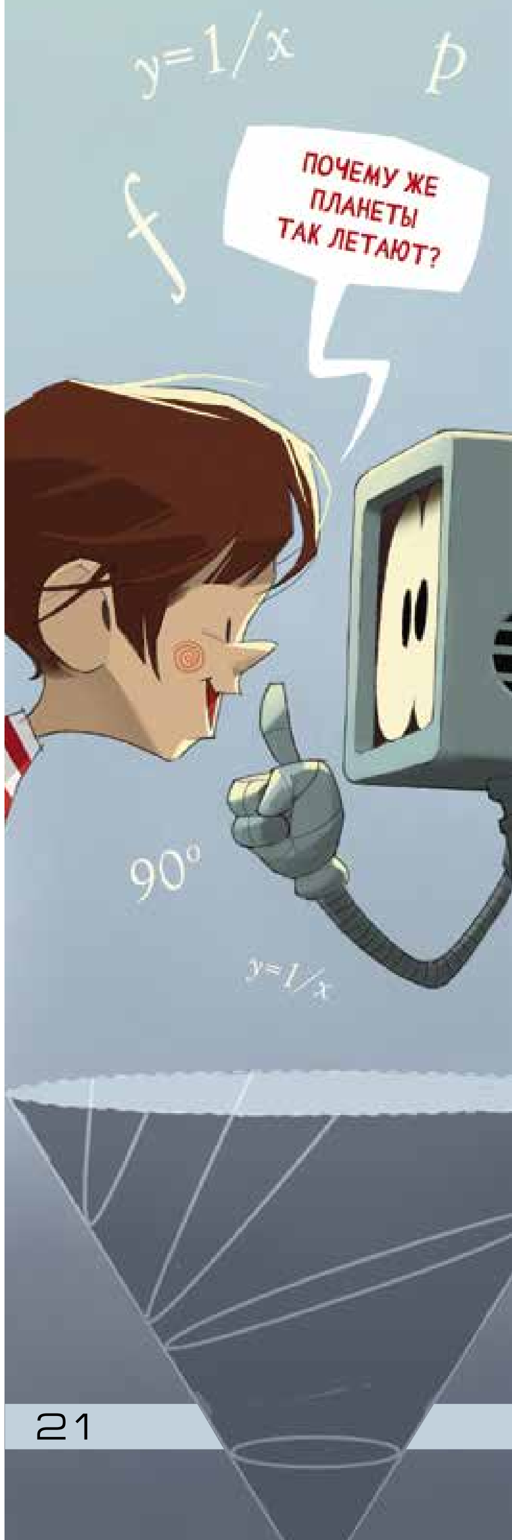
**Задача 6.** Найди фокусы гиперболы $y = 1/x$.

**Задача 7.** Как связаны параметры $f$ и $\rho$ для «школьных» гипербол, у которых угол расхождения ветвей 90°?

– Ну а теперь, когда мы почти во всём разобрались, – удовлетворенно сказал Данька, – мы сможем быстренько понять, почему же планеты так летают?

– Э, Данька... До этого нам ещё так далеко... Давай пока считать, что просто – чудо!

*Автор благодарит Глеба Бобкова-Ноймана (школа 179) за полезные замечания.*




Художник Алексей Вайнер

# XXVIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

Материал подготовил
Александр Грибалко

## Избранные задачи

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А.П. Савина. Приводим избранные задачи турнира 2023 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась.


**1.** (*А. Шаповалов,* 5 – 6) Клетчатый квадрат $9 \times 9$ разрезали по границам клеток на полоски ширины 1 (возможно, не одинаковые). Всегда ли из этих полосок можно сложить прямоугольник $8 \times 9$?

**2.** (*А. Шаповалов,* 5) Куб $2 \times 2 \times 2$ оклеен «по клеточкам» в один слой бумажными трёхклеточными фигурками. Клетки фигурок окрашены белым и чёрным цветом. Оказалось, что каждая грань куба целиком белая или чёрная, а если фигурки развернуть на плоскости, то не найдётся одинаковых по форме и окраске. Могло ли белых и чёрных граней быть не поровну?

**3.** (*А. Грибалко, К. Кноп, Н. Чернятьев,* 5 – 8) По кругу лежат 8 неразличимых на вид монет. Известно, что ровно 2 из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче. За два взвешивания на чашечных весах без гирь определите, лежат фальшивые монеты рядом или нет.

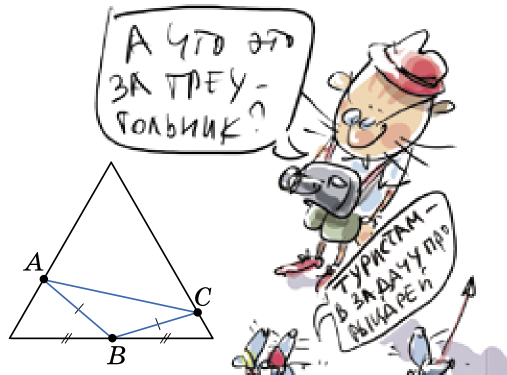
**4.** (*В. Клепцын,* 5 – 7) Коробка для конфет – это прямоугольник $4 \times 5$ ячеек. В неё нужно положить $n$ конфет (в каждую ячейку не более одной конфеты) так, чтобы для любого числа от 1 до $n-1$ можно было отделить именно столько конфет либо горизонтальной, либо вертикальной прямой, проходящей по границам ячеек. При каком наибольшем $n$ это возможно?

**5.** (*А. Грибалко,* 6 – 8) Царь огласил мудрецам правила испытания. Каждому из них на лоб наклеят бумажку с целым числом, числа будут последовательными. Каждый будет видеть все числа, кроме своего. После этого, если мудрец не может точно определить своё число, он говорит «не знаю», а если может – называет своё число. Порядок, в котором мудрецы будут говорить, заранее неизвестен – он будет определён жребием. Оказалось, что как бы ни выпал жребий, хоть один мудрец не сможет назвать своё число. При каком наибольшем количестве мудрецов такое возможно?

**6.** (*И. Раскина,* 6 – 8) Фермер Макар завёл телят, козлят и поросят. Масса Макара равна средней массе поросят, на 50 кг меньше средней массы телят и на 50 кг больше средней массы козлят. Средняя масса те-

лят и поросят (вместе взятых) на 20 кг больше массы Макара, а средняя масса козлят и телят на 25 кг меньше массы Макара. Что и на сколько больше: масса Макара или средняя масса поросят и козлят?

**7.** (*М. Евдокимов,* 7 – 8) Вершины равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC$ лежат по одной на каждой стороне равностороннего треугольника. Оказалось, что точка $B$ совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника, а точки $A$ и $C$ удалены от этой стороны на разные расстояния (см. рисунок). Чему может быть равен угол $A$?




**8.** (*М. Евдокимов,* 7) Маше на 12-летие испекли торт в форме квадрата $6\times6$, разбитый на клетки $1\times1$ и украшенный 12 вишенками (вишенки находятся внутри клеток, не более одной в каждой). Всегда ли такой торт можно разрезать по границам клеток на две равные части, в которых поровну вишенок?

**9.** (*А. Тутубалина,* 7 – 8) По кругу встали 600 жителей острова рыцарей и лжецов. Турист спросил каждого из них: «Правда ли, что твои соседи – рыцарь и лжец?» По ответам турист смог определить, сколько именно в круге рыцарей. Так сколько же?

**10.** (*Н. Чернятьев,* 7 – 8) Петя и Вася играют, делая ходы по очереди, начинает Петя. За ход игрок ставит фишку в любую свободную вершину 99-угольника. Если в двух соседних с ней вершинах уже стоят фишки, игрок забирает их себе. Назовём такие фишки *призовыми*. Победит тот, кто первым соберёт 100 призовых фишек. Кто может обеспечить себе победу?

**11.** (*А. Шаповалов,* 7 – 8) Верно ли, что любой прямоугольный треугольник можно с помощью циркуля и линейки разбить на два треугольника, в которых найдётся по равной биссектрисе?

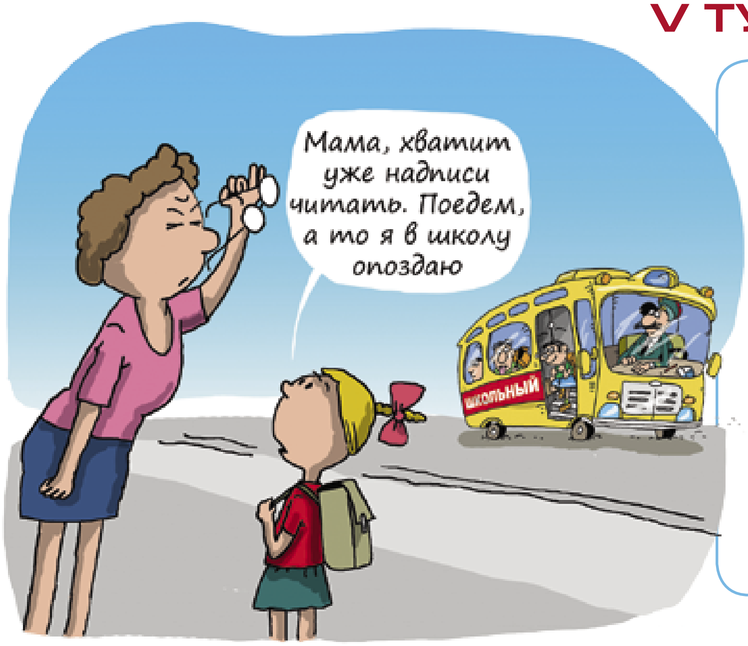
**12.** (*А. Заславский,* 7 – 8) В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что если между каждыми двумя городами есть путь хотя бы в одну сторону (возможно, через другие города), то можно добавить одну дорогу так, чтобы между каждыми двумя городами был проезд в обе стороны.


Художник Сергей Чуб

Решения V тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее **20 октября**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Как и в конкурсе 2022 года, все задачи V тура составлены самими участниками конкурса.

## V ТУР




**21.** Как-то Соня с мамой стояли на остановке, и вдруг мимо них проехала маршрутка с яркой рекламной надписью.

– «XY магазин в Мытищах!» Мама, а разве можно продавать радиоактивные вещества в магазине? – удивилась Соня.

– Маршрутка ехала очень быстро, ты не заметила восклицательный знак, – рассмеялась мама. – Там было написано «X! Y магазин в Мытищах!»

Что за надпись была на маршрутке?

*Т. А. Амбарцумова*

**22.** С гласной – неаккуратное и неразборчивое; с Ь – мягкое и ценное. О каких двух словах идёт речь?

*О. Н. Башкирцева*


**23.** Максимум – 24.09. А когда минимум?

*А. Е. Зизевских*

**24.** Однажды летом маленький Саша поехал с родителями отдыхать в _______. Там было очень тепло, и Саша думал, что эта страна называется так потому, что они поехали туда _______.

Заполните пропуски.

*Г.-А. А. Тулубьев*



**25.** Одна маленькая девочка называла одно из помещений в доме, заменяя в нём второй согласный звук. Если учесть, для чего предназначено это помещение, получалось вполне логично. Напишите название этого помещения так, как его произносила девочка.

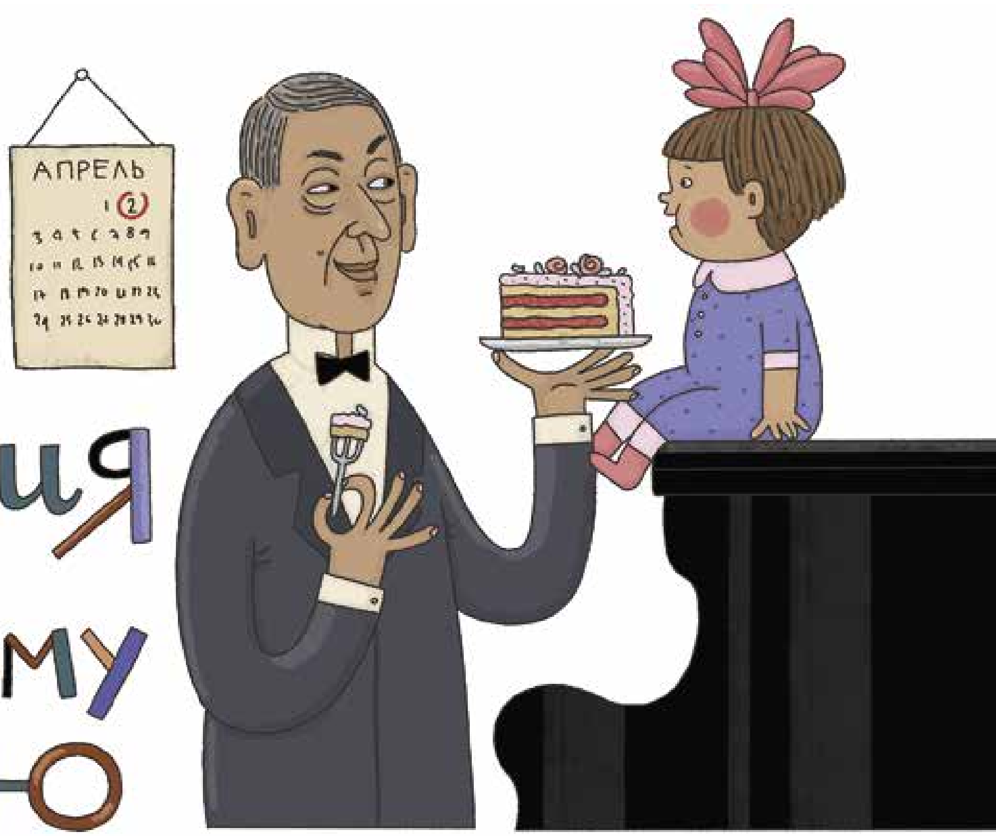
*М. Р. Ханмагомедова*

Художник Николай Крутиков

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Максим Прасолов

# День рождения по новому стилю



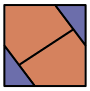
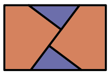
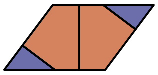
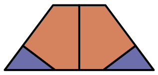

**Задача.** Композитор Сергей Рахманинов родился 20 марта 1873 года по старому стилю, что по новому стилю есть 1 апреля 1873 года. Тем не менее, покинув Россию в 1917 году и переехав в США, он стал отмечать день рождения 2 апреля. Почему?

В качестве подсказки напомним, что в Российской империи вели календарь по старому стилю, а в США и европейских странах – по новому стилю. Это значит, что если в России на календаре было 20 марта 1873 года, то в других странах было 1 апреля.

Календарь по старому стилю называется юлианским, а по новому – григорианским. По юлианскому календарю год считается високосным, если его номер делится на 4. Этот календарь был введён ещё Юлием Цезарем. В 325 году было решено праздновать христианскую Пасху не раньше весеннего равноденствия, то есть такого дня, когда время от восхода до заката равно половине суток. Тогда весеннее равноденствие приходилось на 21 марта. Но из-за расхождения календарного года с астрономическим с каждым годом весеннее равноденствие наступало всё раньше и к 1582 году разница уже составляла 10 дней. И в этот год римский папа Григорий XIII «вернул» равноденствие на 21 марта, утвердив новый календарь, в котором все даты сдвигались на 10 дней вперёд. Чтобы ошибка меньше накапливалась в будущем, года, номер которых делится на 100, но не делится на 400, перестали считать високосными.

Художник Елена Цветаева

## УПРЯМЫЙ КВАДРАТ («Квантик» № 5, 2023)

*а)*  *б)*  *в)*  *г)* 

## КОНКУРС ПО РУСКОМУ ЯЗЫКУ, IV ТУР («Квантик» № 7, 2023)

**16.** *Как-то маленький сын Петра Петровича принялся читать вслух важные документы, лежавшие на столе у отца. Услышав одно из слов, Пётр Петрович спросил сына: «А ты знаешь, что значит это слово?» – «Конечно, – не задумываясь ответил мальчик. – Это дядя, который украл собаку». Какое слово прочитал сын?*

...И не какую-нибудь там дворняжку, а дога! Так сын Петра Петровича объяснил для себя слово ***договор***.

**17.** *Приведите пример предложения, в котором слово «род» можно заменить словом «дух», и смысл предложения останется тем же самым.*

Лучше всего подходят предложения с оборотом ***в том же ...***, например: *Он очень любит шарады и другие словесные головоломки в том же роде (духе)*.

**18.** **3 Ю 3**

*– Что за странная запись? – удивилась мама, заглянув в тетрадь по математике второклассника Лёвы.*

*– Мне так удобнее учить, – Лёва показал на соседние записи. – Я уже почти всё запомнил!*

*– Ах вот оно что! – рассмеялась мама. – Так у тебя неправильно написано: здесь нужно не «Ю», а _____.*

*Какие буквы должны стоять на месте пропуска?*

Наверняка многие из вас слышали, как дошкольники и младшие школьники, уча таблицу умножения, старательно произносят что-нибудь вроде *пятижды пять* или *семижды девять*. Лёва – менее обычно – ошибся в обратную сторону: по ассоциации с *пятью пять*, *шестью шесть* и так далее у него получилось *трию три*. Но правильно всё-таки *трижды три* или, в Лёвиной системе записи, 3 **ЖДЫ** 3.

**19.** *Назовите несерьёзную одежду и несерьёзный рисунок с одинаковой приставкой и синонимичными корнями.*

Несерьёзная одежда (не застёгивается тщательно на все пуговицы и крючки, а небрежно надевается одним движением) – это **накидка**. Несерьёзный рисунок (не готовая картина, требующая многих часов труда, а эскиз, созданный несколькими взмахами карандаша) – это **набросок**. Проверяем: в обоих словах выделяется одна и та же приставка *на-*, а глаголы *кидать* и *бросать* – близкие синонимы.

**20.** *Этим свойством обладают инфинитивы (неопределённые формы)* извести *и* навести, *но не обладают инфинитивы* провести *и* завести. *Им обладают инфинитивы* замести *и* вымести, *но не обладают инфинитивы* мести *и* подмести. *Какой (какие) из инфинитивов* скрести, наскрести, блюсти *и* переползти *также обладает (обладают) этим свойством?*

Инфинитивы *извести*, *навести*, *замести* и *вымести* (но не *провести*, *завести*, *мести* и *подмести*) обладают очень интересным свойством: их можно понять как формы повелительного наклонения некоторых других глаголов (*Извести меня о своём приезде; Навести прадедушку: он соскучился* и так далее). На материале задачи то же свойство можно сформулировать и по-другому: если к каждому из этих инфинитивов добавить *-ть*, получатся другие инфинитивы – *известить*, *навестить*, *заместить* и *выместить*.

Из инфинитивов *скрести*, *наскрести*, *блюсти* и *переползти* этим свойством обладает **только *скрести***: эту учформу можно понять как повелительное наклонение глагола *скрестить*, а вот глаголов *наскрестить*, *блюстить* и *переползтить* в русском языке определённо нет..

## НАШ КОНКУРС, XI ТУР («Квантик» № 7, 2023)

**51.** *Представьте число* 2023 *как сумму девяти чисел, каждое из которых состоит только из цифр* 7.

**Ответ:** $777+777+77+77+77+77+77+77+7$.

**52.** *Квадрат* $N\times N$ *разбит на клетки* $1\times 1$. *Изначально все они белые. Каждую минуту, пока это возможно, Квантик выбирает белую клетку, с которой соседствует по стороне чётное число чёрных клеток* (0, 2 *или* 4), *и красит её в чёрный цвет. Какое наибольшее количество клеток квадрата может закрасить Квантик?*

**Ответ:** все клетки. Пусть сначала Квантик закрасит $N$ клеток на диагонали (у каждой из них 0 чёрных соседей). Далее можно закрасить диагонали, соседние с закрашенной (на них у каждой клетки ровно два чёрных соседа). Продолжая красить диагонали, соседние с уже закрашенными, Квантик закрасит весь квадрат.

**53.** *Петя написал на доске строчку из натуральных чисел. Каждое следующее больше предыдущего. Начиная с третьего, каждое число равно сумме двух предыдущих. Вася стёр первое число. Среди оставшихся чисел есть* 100. *Есть ли среди них* 600?

**Ответ:** нет. Пусть перед числом 100 шло число $a<100$ (возможно, $a$ стёрли). После числа 100 идут числа $a+100<200$, $a+200<300$, $2a+300<500$, $3a+500$, $5a+800>800$, и так далее – из всех этих чисел может быть равно 600 только $3a+500$, остальные либо меньше 500, либо больше 600. В этом случае $3a=100$, но число $a$ натуральное, а 100 не делится на 3 – значит, число 600 встретиться не могло.

**54.** *Боб решил отправить Алисе несколько бобров. Оказавшись на почте, Боб обнаружил, что не помнит, сколько бобров он положил в каждую из четырёх коробок. К счастью, на почте нашёлся старенький боброметр – устройство, позволяющее узнать суммарное количество бобров в коробках, помещённых в него. Однако его гарантийный срок давно истёк, и поэтому боброметр при измерениях может ошибаться, но не более чем на* 17 *бобров. Боб по очереди загрузил всевозможные пары коробок в боброметр и получил такие результаты:* 43, 99, 123, 141, 233, 255. *Сколько всего бобров Боб хотел отправить Алисе?*

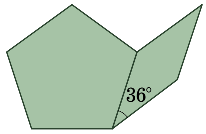
**Ответ:** 298. Пусть в коробках $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ бобров (будем называть эти коробки $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно). Тогда справедливы соотношения:

$$a+b\leqslant a+c\leqslant b+c\leqslant b+d\leqslant c+d,$$
$$a+b\leqslant a+c\leqslant a+d\leqslant b+d\leqslant c+d.$$

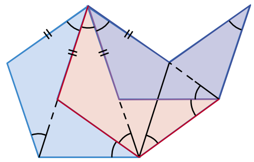
Для пары коробок $C$ и $D$ боброметр должен был показать самый большой результат, поэтому даже если ответ «255» был получен не для этой пары, количество бобров в коробках $C$ и $D$ всё равно отличается не более чем на 17 от 255. Аналогично, количество бобров в коробках $A$ и $B$ отличается не более чем на 17 от 43, в коробках $A$ и $C$ – от 99, а в коробках $B$ и $D$ – от 233. Значит, для одной из пар коробок $A$, $D$ и $B$, $C$ правильный результат измерений отличается не более чем на 17 от 123, а для другой пары – от 141.

Оценим теперь сумму $a+b+c+d$ двумя способами. С одной стороны, $(a+d)+(b+c)$ лежит в промежутке от $123+141-2\cdot17=230$ до $123+141+2\cdot17=298$ бобров, а с другой стороны, $(a+c)+(b+d)$ лежит в промежутке от $99+233-2\cdot17=298$ до $99+233+2\cdot17=366$. Значит, бобров может быть только ровно 298.

**55.** *К стороне правильного пятиугольника приставили ромб с углом* 36°, *как показано на рисунке. Разделите получившийся семиугольник на три равные (по форме и размерам) части.*




**Ответ:** см. рисунок.



Проведём диагонали, соединяющие верхнюю вершину пятиугольника с двумя противоположными его вершинами, и отложим на них отрезки, равные стороне пятиугольника. Оказывается, после разрезания, как на рисунке, получим три одинаковых равносторонних пятиугольника – синий, красный и фиолетовый (каждый составлен из двух равнобедренных треугольников: один с углами 36° при основании, а другой с углом 36° при вершине). Убедитесь в этом (подсказка: диагональ пятиугольника параллельна несмежной с ней стороне).

## СКОЛЬКО РЕК ВЫТЕКАЕТ ИЗ ОЗЕРА

**(«Квантик» № 8, 2023)**

Ответ на этот фольклорный вопрос (см., например, книгу: Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов «Удивительная физика») очень прост: из озера вода вытекает по самому низкому руслу.

Две реки, вытекающие из «молодого» озера, почти никогда не бывают одинаковыми по величине, не протекают всё время по породам, одинаково сопротивляющимся размыву. Со временем одна река быстрее углубит своё русло и понизит уровень озера настолько, что сток через вторую реку станет невозможным. Это относится к любому озеру: из Ладожского озера вытекает лишь Нева, из Онежского – одна Свирь, ...

Но из любого правила бывают исключения. Например, Энгозеро в Карелии: из него на высоте 71 м над уровнем моря вытекает река Воньга, а на высоте 71,4 м – река Калга. Обе впадают в Белое море. Самый известный пример – озеро Лешаскогсватнет на юге Норвегии. Из него на северо-запад в сторону Норвежского моря вытекает река Рёума, а на юго-восток – река Логен, которая впадает в реку Гломму, несущую воды в пролив Скагеррак между Данией и Швецией. Все эти примеры – из районов с каменными почвами.

Бывают и бессточные озёра – в них реки впадают, но ничего не вытекает, а расход воды идёт за счёт испарения. Примеры, которые «на слуху»: Чад (там, где «изысканный бродит жираф») в центральной Африке, Иссык-Куль в Киргизии, Баскунчак в России, Каспийское море. На бессточных озёрах часто добывают соль.

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ ДУШ

Давление на одной глубине одинаковое. Если бы давление было различное, то горизонтальный столб воды между этими двумя точками двигался бы (и можно было бы, например, сделать вечный двигатель, поставив внутри этого столба колёсико с лопастями).

## КОВЁР СЕРПИНСКОГО

**1.** В кубе со стороной $k$ три грани будут окрашены у 8 угловых кубиков, две грани – у каждого из $k-2$ кубиков на каждом из 12 рёбер, а одна грань – у каждого из $(k-2)^2$ кубиков на каждой из 6 граней. Не будут окрашены $(k-2)^3$ внутренних кубиков. Видно, что одно число неизменно, второе увеличивается пропорционально размеру $k$, третье – как $k\cdot k$, а четвёртое – как $k\cdot k\cdot k$.

**2.** Исходный кусок мыла в $2\cdot 2\cdot 2=8$ раз больше остатка: по одной части на 7 дней прошедшей недели плюс еще одна часть – сам остаток. Значит, мыла хватит ещё на 1 день.

**3.** Угловая точка исходного квадрата.

**4.** 8 (из 9) и 64 (из 81).

**5.** $4\cdot 3=12$, $4\cdot(3+1)=16$ справа внизу на с. 10 и $4\cdot(9+3)=48$ и $4\cdot(9+3+8\cdot 1)=80$ – на с. 11.

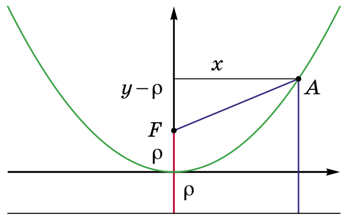
**6. Указание.** На каждом шаге площадь уменьшается вдвое и в пределе будет нулевой, а длина границы увеличивается в $\frac{3}{2}$ раза и в пределе будет бесконечной. Уменьшенная в 4 раза фигура состоит из 8 копий, а значит, размерность $d$ такова, что $4^d=8$. Тогда $2^{2d}=8=2^3$, откуда $d=\frac{3}{2}$.

## СЛУЧАЙ В ЮЖНОМ ГОРОДЕ

– Видишь ли ты, Лёня, чёткую границу между мокрым и сухим участком на ступенях? – продолжил Башковицкий. – Вода в одном месте высохла, а в другом – нет. Значит, ступени были прогреты неравномерно. Так могло случиться, только если дождь был кратковременный, а перед ним сияло жаркое солнце. И только та часть лестницы, которая оказалась в тени от парапета, осталась прохладной. Так что не было никакого затяжного дождя в день, когда был сделан снимок. Твой свидетель с фотоаппаратом лжёт.

## И СНОВА ПРО КОНИКИ

**4.** Фокус лежит, конечно, на оси $y$, а директриса параллельна оси $x$. Обозначим расстояние от фокуса до вершины параболы через $\rho$, тогда координаты фокуса $(0, \rho)$. Для всех точек, в том числе для точки $(0, 0)$, расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы; значит, уравнение директрисы $y=-\rho$. Теперь возьмём любую другую точку $A$ параболы, обозначим её координаты $(x, y)$. Расстояние от $A$ до директрисы равно $y+\rho$, а расстояние до фокуса найдём из теоремы Пифагора: $|FA|^2=x^2+(y-\rho)^2$. Раз $|FA|=y+\rho$, то $x^2+(y-\rho)^2=(y+\rho)^2$. Раскрывая скобки и сокращая, получим $x^2=4\rho y$. Для параболы $y=x^2$ это выполняется при $\rho=1/4$. Итак, координаты фокуса: $(0, 1/4)$; уравнение директрисы $y=-1/4$.

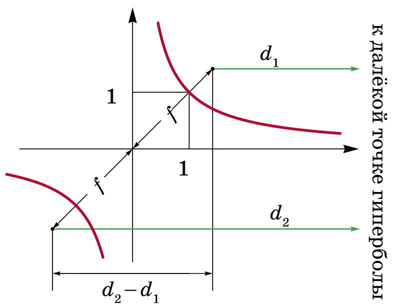



**5.** Параметр $\rho$ определяет форму параболы. Он соответствует коэффициенту $a$. Как видно из решения задачи 4, $a=4\rho$. Уравнение параболы можно переписать в виде

$$y=ax^2+bx+c=a(x+b/(2a))^2+(c-b^2/(4a^2)).$$

При заданном $a$ коэффициент $b$ в первой скобке сдвигает график на $b/2a$ вправо, а вторая скобка поднимает его вверх. Так что параметры $b$ и $c$ отвечают за положение параболы на плоскости.

**6. Ответ:** $f=2$, координаты фокуса $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Во-первых, конечно, ось гиперболы наклонена под 45° к осям координат, и по точке $(1, 1)$ мы понимаем, что разность расстояний до дальнего и ближнего фокусов равна $f+\sqrt{2}-(f-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. А дальше – хитрость: рассмотрим точку гиперболы, например, очень далеко справа. Тогда она почти на оси $x$, а расстояния от неё до каждого фокуса почти равны расстояниям от неё до проекций этих фокусов на ось $x$ (потому что соответствующие прямоугольные треугольники очень вытянутые, катет много меньше гипотенузы). Их разность, как видно из рисунка, равна $d_2-d_1=2(f/\sqrt{2})$. Значит, $2(f/\sqrt{2})=2\sqrt{2}$; $f=2$.



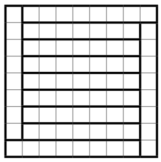
**7.** Для любой гиперболы разность расстояний до фокусов для точки, лежащей между ними, равна $(2f-\rho)-\rho=2(f-\rho)$. Для любой «школьной» гиперболы, рассматривая далёкую точку, как делали в задаче 6, получим для такой же разности выражение $d_2-d_1=2(f/\sqrt{2})$. Для всех точек гиперболы эти разности одинаковы; приравнивая их, получим $\rho=f(1-1/\sqrt{2})$.

## ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ПО НОВОМУ СТИЛЮ

Логично предположить, что пока Рахманинов жил в России, то есть с 1873 года по 1917, он праздновал день рождения 20 марта. Но какой это был день календаря в европейских странах и в США, то есть по новому стилю? До 1900 года это было 1 апреля, а с 1900 года это было уже 2 апреля, потому что по новому стилю 1900 год не високосный. Это означает, что после переезда Рахманинов продолжил отмечать свой день рождения в «тот же» день. В России мы отмечаем его день рождения 1 апреля, а на его могиле указано 2 апреля, что, конечно, неправда.

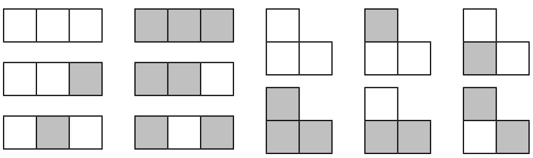
## XXVIII ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА.

### Избранные задачи



**1. Ответ:** нет. Пусть квадрат разрезали так, как на рисунке. Чтобы из полосок сложить прямоугольник $8\times 9$, нужно выбросить полоски общей площади 9. Однако все полоски состоят из 7 или 8 клеток, и суммарную площадь 9 из них получить нельзя.

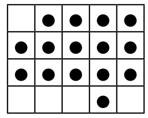
**2. Ответ:** нет. Каждая фигурка – это прямоугольник или уголок, на рисунке показаны все виды их раскрасок. Так как все грани куба одноцветны, то прямоугольники, у которых цвет центральной клетки отличается от цвета двух других клеток, не участвуют в оклейке. На оставшихся фигурках суммарно по 15 белых и чёрных клеток, этого не хватит для четырёх граней. Значит, у куба три белых и три чёрных грани.



**3.** Пронумеруем монеты по кругу числами от 1 до 8 и сравним пары (1, 5) и (3, 7).

1) Если весы в равновесии, то обе фальшивые монеты либо на весах, либо не участвуют во взвешивании. В любом случае они имеют номера одной чётности и не могут быть соседними.

2) В случае неравенства обе монеты на более тяжёлой чаше настоящие. Будем считать, что это пара (1, 5). Тогда сравним группы (2, 3, 4) и (6, 7, 8). Если они равны, то фальшивые монеты оказались на разных чашах и не являются соседними. Если же одна из групп тяжелей, например (2, 3, 4), то обе фальшивые монеты находятся на другой чаше, при этом монета 7 точно фальшивая, поэтому фальшивые монеты лежат рядом.



**4. Ответ:** при $n=15$. Коробку можно разделить прямой семью способами, для каждого есть два количества конфет с разных сторон от прямой. Значит, можно отделить не более 14 различных количеств конфет, поэтому конфет не больше 15. Пример см. на рисунке.

**5. Ответ:** при 4 мудрецах. Пусть всего мудрецов $N$, и им достались числа от 1 до $N$. Будем называть мудрецов в соответствии с числами на их лбах. В самом начале у мудреца 1 есть два варианта своего числа: 1 или $N+1$. У мудреца $N$ тоже два варианта: 0 или $N$. Остальные мудрецы сразу понимают, какие у них числа.

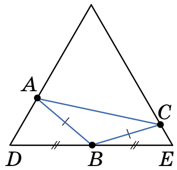
При $N=4$ если первым будет говорить мудрец 1 или 4, он не сможет назвать своё число. Если выпадет говорить первым мудрецу 2, то мудрец 4 уже не определит своё число. Ведь даже если ему придётся говорить после мудрецов 1 и 3, он не поймёт, с самого начала те знали свои числа или определили, услышав мудреца 2. А если первым будет говорить мудрец 3, то мудрец 1 не определит своё число.

Если $N\geqslant 5$, то пусть жребий выпал так, что первым говорит мудрец 2, а сразу после него – мудрец $N-1$. Они назовут свои числа, а так как эти числа не последовательные, то для мудрецов 1 и $N$ неправильные варианты отпадут, поэтому далее все мудрецы назовут свои числа.

**6. Ответ:** масса Макара, на $\frac{100}{3}$ кг. Из условия следует, что средняя масса поросят и телят на 20 кг больше средней массы поросят и на 30 кг меньше средней массы телят. Поэтому количества поросят и телят относятся как $3:2$. Аналогично средняя масса козлят и телят на 25 кг больше средней массы козлят и на 75 кг меньше средней массы телят, поэтому количества козлят и телят относятся как $3:1$. Значит, козлят в 2 раза больше, чем поросят. Разность между средней массой поросят и средней массой козлят равна 50 кг. Чтобы найти среднюю массу поросят и козлят, надо эту разность поделить в отношении

$2:1$, то есть она на $\frac{100}{3}$ кг меньше средней массы поросят, а значит, и массы Макара.

**7. Ответ:** $30°$. Обозначим через $DE$ сторону, на которой лежит точка $B$ (см. рисунок). Так как $BA = BC$, $BD = BE$ и $\angle D = \angle E = 60°$, то либо треугольники $ABD$ и $CBE$ равны, либо сумма углов, противолежащих сторонам $BD$ и $BE$, равна $180°$. Первый случай невозможен: по условию не равны соответствующие высоты этих треугольников, проведённые из вершин $A$ и $C$. Значит, $\angle BAD + \angle BCE = 180°$. Тогда $\angle ABD + \angle CBE = (180° - \angle D - \angle BAD) + (180° - \angle E - \angle BCE) = 60°$, откуда $\angle ABC = 120°$ и $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 120°) : 2 = 30°$.




**8. Ответ:** верно. Разделим торт на две равные части вертикальным разрезом (см. рисунок). Если в них поровну вишенок, то нужное разрезание найдено. Иначе пронумеруем клетки, как на рисунке, и по очереди будем менять цвета между собой у клеток с одинаковыми номерами (белая и серая части будут оставаться равными). После 18 таких шагов части поменяются местами и в белой части станет больше половины вишенок. Но на каждом шаге число вишенок в белой части меняется не более чем на одну, поэтому в какой-то момент их там будет ровно половина.

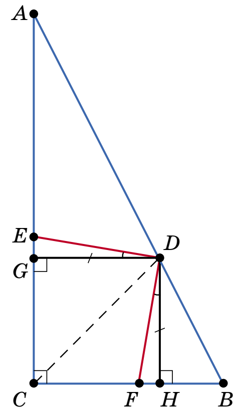
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 17 | 16 | 1 | 2 | 3 |
| 15 | 14 | 13 | 4 | 5 | 6 |
| 12 | 11 | 10 | 7 | 8 | 9 |
| 9 | 8 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| 6 | 5 | 4 | 13 | 14 | 15 |
| 3 | 2 | 1 | 16 | 17 | 18 |

**9. Ответ:** 300 рыцарей. Заметим, что «Да» ответили рыцари, стоящие между людьми разного типа, и лжецы, стоящие между людьми одинакового типа, а остальные ответили «Нет». Поэтому если оба соседа любого жителя сменят тип, то его ответ останется прежним. Также если житель сменит тип вместе с одним своим соседом, то и он не поменяет свой ответ.

Пронумеруем всех стоящих в круге: 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... Если все жители с номерами 1 и 2 сменят свой тип, то из сказанного выше следует, что никто не поменяет свой ответ. Поскольку турист смог определить, сколько в круге рыцарей, то такое изменение типов не меняет их количество, значит, среди жителей с номерами 1 и 2 по 200 рыцарей и лжецов. Аналогично 200 рыцарей среди жителей с номерами 2 и 3, а также среди жителей с номерами 3 и 1. Просуммировав эти количества, получим 600 рыцарей, при этом каждого жителя мы посчитаем дважды, поэтому всего в круге 300 рыцарей.

**10. Ответ:** Петя. Заметим, что после каждого хода количество фишек в вершинах либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, поэтому перед ходом Пети всегда будет нечётное количество свободных вершин. Значит, среди блоков пустых вершин будет хотя бы один нечётной длины. Если Петя может сходить так, чтобы забрать призовые фишки, то он делает такой ход. Иначе Петя ставит фишку в крайнюю вершину нечётного блока, делая его чётным (первый ход – в любую вершину). После такого хода Вася тоже не сможет сходить так, чтобы забрать призовые фишки. Таким образом, Вася будет иметь возможность брать призовые фишки только после ходов Пети, когда и тот берёт призовые фишки. Значит, у Пети их всегда будет не меньше, чем у Васи, и он первым соберёт 100 призовых фишек.

**11. Ответ:** верно. В треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ построим биссектрису $CD$. Докажем, что биссектрисы $DE$ и $DF$ треугольников $ACD$ и $BCD$ равны. Заметим, что угол $EDF$ прямой: он образован биссектрисами смежных углов. Опустим перпендикуляры $DG$ и $DH$ на катеты $AC$ и $BC$ соответственно (см. рисунок). Так как точка $D$ лежит на биссектрисе угла $C$, то $DG = DH$. А ещё $\angle GDH = \angle EDF = 90°$, поэтому $\angle EDG = \angle FDH$. Значит, прямоугольные треугольники $DEG$ и $DFH$ равны по катету и острому углу, откуда $DE = DF$.




**12.** Выберем город $A$, из которого можно добраться до наибольшего числа других городов. Пусть из него нельзя добраться до какого-то города $X$. Тогда по условию из $X$ есть путь в $A$, а значит, из $X$ можно добраться также и до всех городов, до которых можно добраться из $A$. Но это противоречит выбору города $A$: ведь из $X$ пути ведут в большее число городов. Значит, из $A$ можно добраться до всех городов. Аналогично найдётся город $B$, в который можно попасть из всех остальных городов. Тогда, построив дорогу из $B$ в $A$, мы получим требуемую схему: из любого города можно доехать до $B$, затем переехать в $A$, а оттуда добраться до любого другого города.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
**заочном математическом конкурсе.**
Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

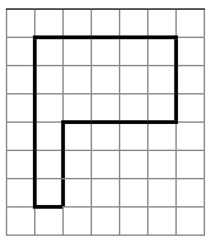
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

## I ТУР

**1.** На эскалаторе в метро ступеньки пронумерованы по порядку. На каждой пятой (5, 10, 15, ...), на первой и на последней ступеньках краской написаны их номера. Поднимаясь по эскалатору, Вася заметил три подряд идущие ступеньки, на которых были написаны номера. Он сложил эти три номера и получил некоторое число. Назовите последнюю цифру этого числа и объясните, почему она именно такая.





**2.** Разрежьте флажок на две равные по форме и размерам части.

Авторы задач: Иван Молодык (1), Михаил Евдокимов (2, 5), Татьяна Казицына (3), Александр Грибалко (4)

**3.** У Вани 4 яблока, у Коли – 41 яблоко, а у всех остальных мальчиков по 14 яблок. Мальчики могут поменяться между собой яблоками так, чтобы у всех стало поровну. Сколько всего мальчиков?



**4.** У Фелониуса Грю живут 33 миньона, все они весят одинаково. Однажды один из них стащил у Грю банан и съел его, но Грю не знает, кто это сделал. У него есть большие чашечные весы без гирь, на которых он может взвешивать любое количество миньонов. Однако если миньоны оказываются на одной чаше весов, они ссорятся и больше на одну чашу одновременно их ставить нельзя. Как Грю за четыре взвешивания найти воришку, если после съеденного банана он весит больше остальных?

**5.** Каменщик выложил стенку без дырок и полостей из одинаковых кирпичей $1\times1\times2$. Но некоторые кирпичи он положил вдоль, некоторые поперёк, некоторые вертикально, то есть длинное ребро кирпича параллельно одному из трёх направлений. Могло ли оказаться, что кирпичей каждого из трёх типов поровну, если размеры стенки:

а) $3\times8\times10$;

б) $3\times9\times10$?


Художник Николай Крутиков


# Колосс Родосский

По легенде, жители города Родос заказали скульптору Харесу статую Колосса Родосского высотой 18 м. Скульптор рассчитал материалы и запросил определённую сумму.
Но тут жители изменили заказ – потребовали сделать статую высотой 36 м и заплатили вдвое больше.
Хватило ли скульптору этих денег или нет? Почему?

ISSN 2227-7986
9 772227 798237
23009

Художник Yustas