1. “Жадные братья”

На тарелке лежит 4 яблока весом 600 г, 400 г, 300 г и 250 г. Два брата собираются их съесть. Право выбора за старшим братом; он берет одно из яблок и начинает его есть. Сразу за ним младший брат берёт одно из оставшихся яблок и тоже начинает есть. Скорость поедания яблок у братьев одинакова и время поедания яблока пропорционально весу этого яблока. Тот, кто съел свое яблоко, имеет право взять следующее из оставшихся. Какое яблоко должен взять старший брат вначале, чтобы в итоге съесть как можно больше?

Решение.

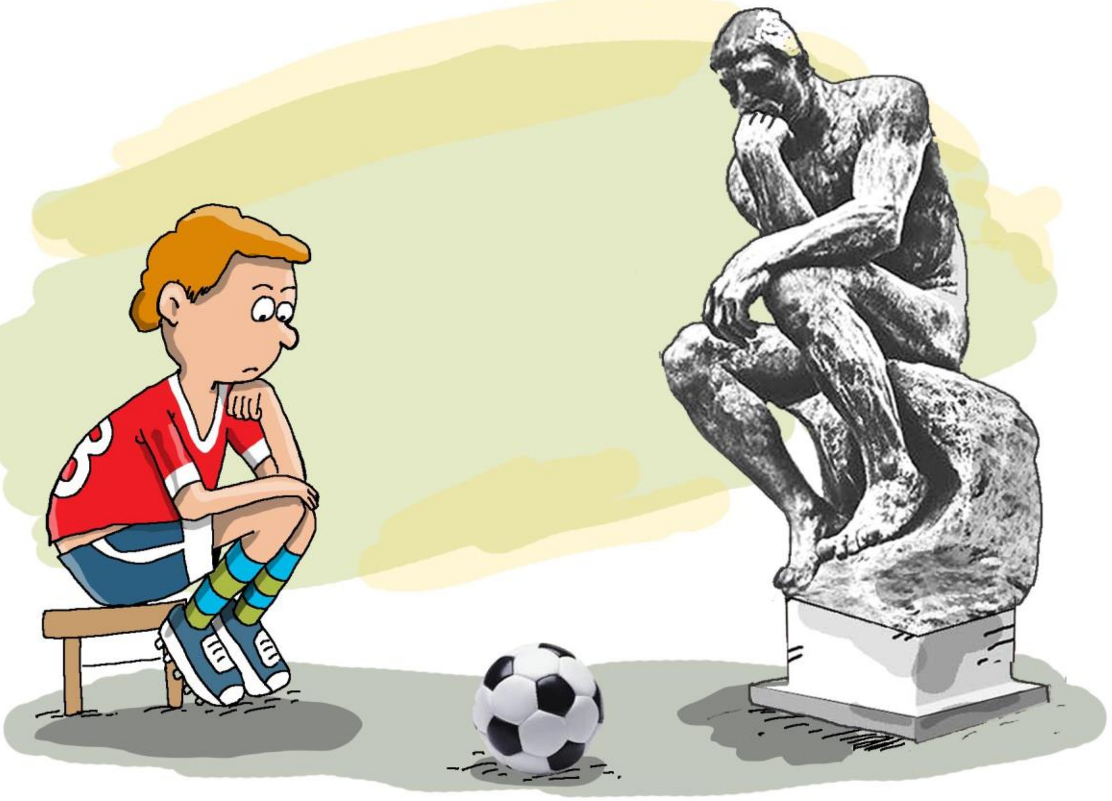
Это кажется удивительным, но старший брат должен вначале взять самое маленькое яблоко! В этом случае он может гарантированно съесть не менее 850 грамм. Ведь если младший брат не взял яблоко 600г вначале, то старший, съев маленькое яблоко первым, берёт самое большое. Если же младший вначале взял большое яблоко, то старший успеет съесть два яблока 250г и 300г и возьмёт оставшееся яблоко 400г первым (в сумме съест 950г). Покажем, что взяв любое другое яблоко вначале, старший брат не может гарантированно съесть более 850г. Изобразим возможные действия братьев в виде диаграммы:

Итак, правильной стратегией для старшего брата является “взять вначале самое маленькое яблоко весом 250г”.

2. “Футбольный мяч”

Футбольный мяч сшит из кожаных частей: черных пятиугольников и белых шестиугольников (см. рисунок). Вася легко сосчитал, что черных пятиугольников ровно 12. А сколько белых шестиугольников (пользоваться можно лишь рисунком ниже)?

Решение.



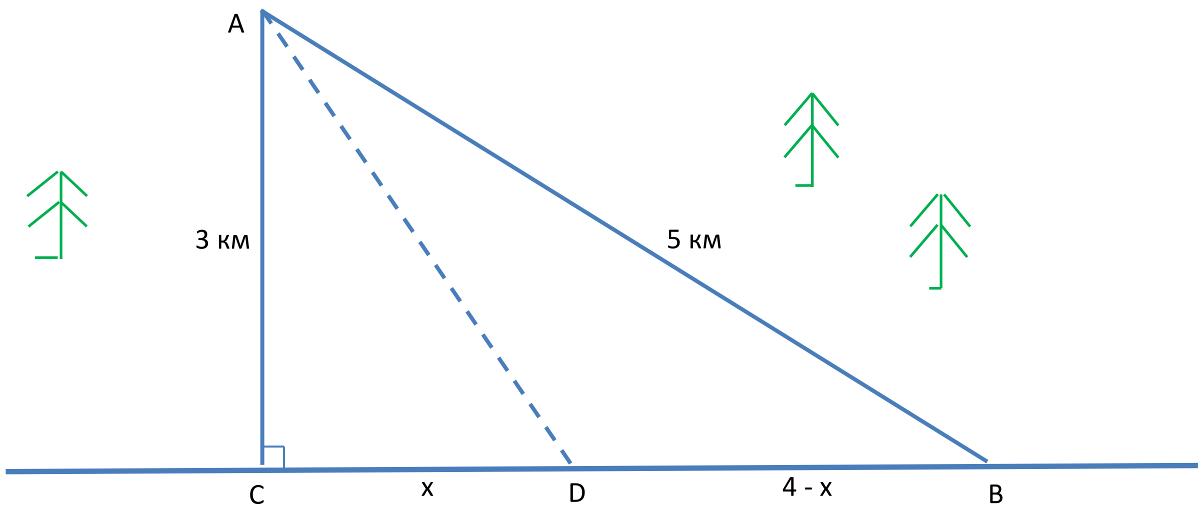
Заметим, что каждый черный пятиугольник граничит с пятью белыми шестиугольниками. При этом каждый белый шестиугольник мы посчитали трижды (так как каждый белый шестиугольник граничит ровно с тремя черными пятиугольниками, см. рисунок). Значит, всего число белых шестиугольников должно быть равно (12*5)/3 = 20.

Комментарий: Для решения можно и не знать, что черных пятиугольников ровно 12. Достаточно воспользоваться формулой Эйлера для многогранников: В + Г - Р = 2 (В – число вершин, Г – число граней, Р – число рёбер многогранника). Пусть всего имеется n пятиугольников. Тогда шестиугольников должно быть 5n/3. Далее Г = n + 5n/3, Р = (5n + 6*5n/3)/2 (делим на 2, так как каждое ребро мы посчитали дважды), В = (5n + 6*5n/3)/3 (делим на 3, так как каждую вершину мы посчитали трижды). Подставляя в формулу Эйлера, получаем: 5n + n + 5n/3 – 15n/2 = 2 ➔ n = 12. При этом 5n/3 = 20.

3. "Туристы"

Туристы находятся в лесу в 3 км от прямой дороги, идущей в деревню, и в 5 км от деревни по прямой через лес. Туристы могут двигаться по лесу со средней скоростью 3 км/ч и по дороге со средней скоростью 5 км/ч. За какое наименьшее время они могут добраться до деревни?

Решение.



Пусть A — точка, в которой находятся туристы, B — населенный пункт, C — ближайшая точка дороги, D — произвольная точка на участке CB (см. рисунок). Обозначим расстояние CD за x. Тогда время, которое затратят туристы, двигаясь по лесу до точки D и затем вдоль дороги до точки B, равно $t(x) = (\sqrt{9+x^2})/3 + (4-x)/5$. Нужно найти минимум этой функции по x, при $0 \le x \le 4$. Минимум достигается в точке x^*, где производная обращается в ноль: $t'(x) = (1/3)*2x / 2(\sqrt{9+x^2}) - 1/5 = 0 \rightarrow x^*=9/4$

При этом наименьшее время равно t(9/4) = 1 ч 36 мин

(Способ по лесу от A до B дает 1 ч 40 мин. Способ от A до C по лесу, а дальше до B по дороге дает 1 ч 48 мин).

4. “Остров сокровищ”

Десять пиратов на острове должны разделить между собой сокровище, состоящее из сотни одинаковых золотых монет. Они делят так: старший пират предлагает, как делить монеты, а потом каждый из остальных соглашается или нет с его предложением. Если по крайней мере половина пиратов, включая того кто делит, согласны, то они поделят монеты так, как предложил старший пират. Если же меньше половины пиратов согласны — они убивают старшего пирата и начинают все сначала. Самый старший пират (из тех, кто выжил) предлагает новый план, за него голосуют по тем же правилам, а потом или делят добычу, или убивают старшего пирата. Так продолжается до тех пор, пока какой-то план не будет принят. Какое наибольшее число монет может гарантированно получить самый старший пират, если пираты жадные, мыслят очень логично, не состоят в сговоре (каждый сам за себя) и все они хотят жить.

Решение.

Ситуацию с n пиратами можно анализировать на основе ситуации с (n-1) пиратом. Предположим, что пиратов только двое. Тогда достаточно одного голоса старшего пирата, чтобы предложение было принято и он заберет все 100 монет. Пусть теперь пиратов трое. Пронумеруем пиратов по старшинству: 1 — самый старший, 2 — средний, 3 — младший. Первому пирату нужно заручиться поддержкой 3-его. Для этого достаточно дать третьему одну монету. Общее распределение монет таково (99, 0, 1). Третий вынужден будет проголосовать за такое распределение, т. к. в противном случае делить будет второй пират, который все заберёт себе и третий это понимает. Теперь рассмотрим ситуацию с четырьмя пиратами. Первому нужно заручиться поддержкой третьего. Для этого достаточно дать ему одну монету. Третий вынужден поддержать, т. к. в противном случае, он не получит ничего (см. случай трех пиратов). Общее распределение монет (99, 0, 1, 0). Теперь принцип ясен. В каждом случае самый старший пират должен «купить» ровно столько голосов, сколько ему необходимо, и как можно дешевле. Все остальные деньги достанутся ему самому. В случае с десятью пиратами это приводит к распределению (96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), т. е. 96 монет заберет себе старший пират.