

удивительные числа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СЮРПРИЗЫ

В. Дубровский

НЕЧЁТНЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТЫ

Чему равна сумма первых нескольких нечётных чисел?

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$1 + 3 + 5 = 9,$$



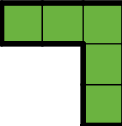
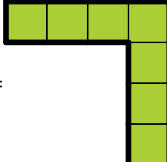
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \dots$$

Кажется, получаются точные квадраты:

$$1 = 1 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 16 = 4 \cdot 4, \quad 25 = 5 \cdot 5, \dots$$

Как же это доказать? Сделаем трюк – представим нечётные числа в таком виде:

$1 =$ ; $3 =$ ; $5 =$ ; $7 =$ ; ...

Складывая квадрат из уголков, получаем:

$1 + 3 = 2^2,$

$1 + 3 + 5 = 3^2,$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2.$

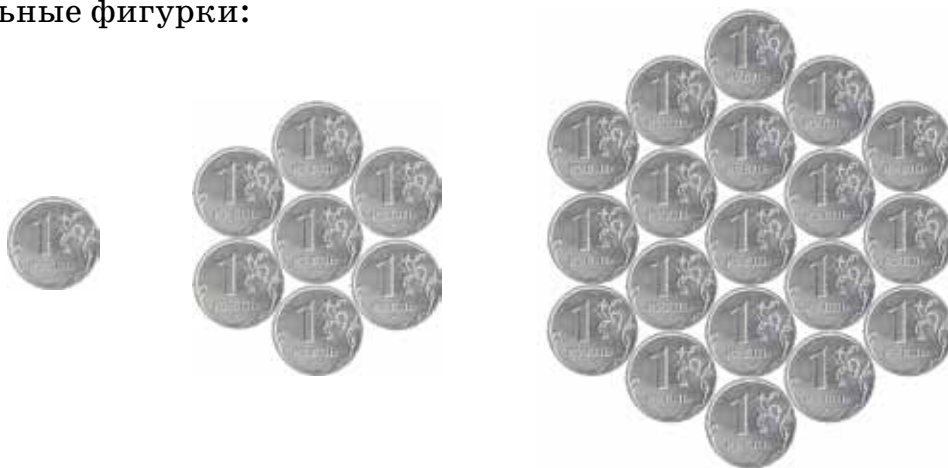
Аналогично для любого числа n мы доказали, что

сумма первых n нечётных чисел равна числу n^2 .



МОНЕТКИ И КУБЫ

Начнём издалека. Легко выложить из монеток такие шести-угольные фигурки:

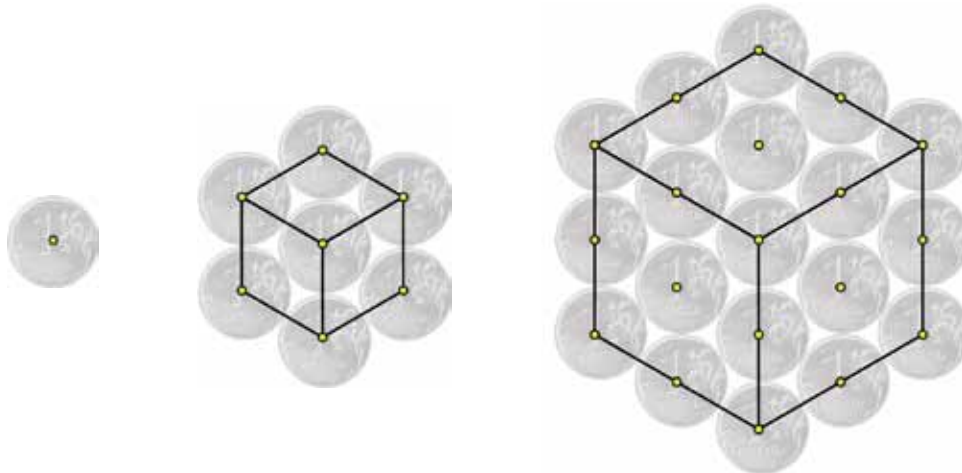


Сложим количества монеток в первых нескольких фигурках:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1, \\ 1 + 7 &= 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \\ 1 + 7 + 19 &= 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3, \dots \end{aligned}$$

Получаются третьи степени натуральных чисел, то есть точные кубы! Как это объяснить?

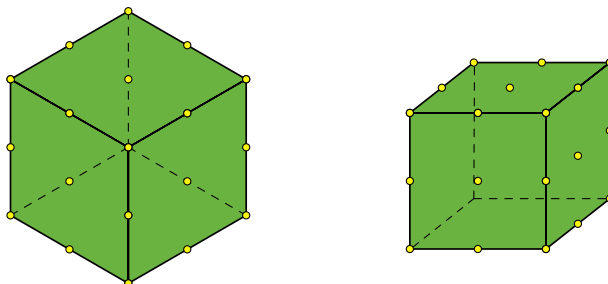
Отметим центры монеток и проведём несколько линий:



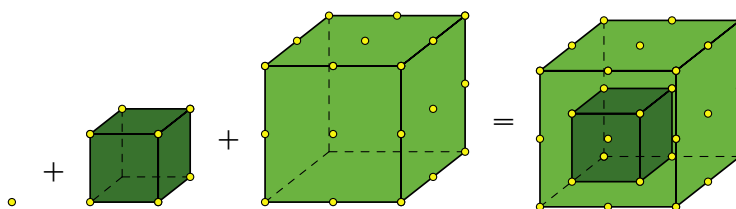
удивительные числа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СЮРПРИЗЫ

Видите передние три грани кубиков? На гранях отмечены точки; каждой точке соответствует монетка. Повернём эти кубики так, чтобы их грани были лучше видны (число точек не изменится):



Чтобы найти суммарное число монеток, подсчитаем суммарное число точек в гранях кубиков. Для этого вложим кубики один в другой, как на рисунке:



Получается один куб, заполненный точками. Количество точек легко найти: если на ребре куба n точек, то всего в кубе их ровно n^3 . Значит, именно столько монеток и будет суммарно в первых n шестиугольных фигурках.

ЗАДАЧА

Проверьте справедливость равенств

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

и докажите утверждение:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2.$$

