ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№8

август 2015

УСКОРИТЕЛЬ РЕЗИНОВЫХ МЯЧИКОВ

ЧАСОВАЯ МЕДИАНА

СПИЧЕЧНЫЕ ГРАФЫ

Enter

№ 8 | август 2015
Издаётся при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы можете оформить подписку на «Квантик» в любом отделении Почты России. Подписаться на следующий месяц можно до 10 числа текущего месяца. Наш подписной индекс **84252** по каталогу «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать».

Почтовый адрес:
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик».

Кроме журнала, «Квантик» выпускает:

Альманахи – материалы журналов за очередное полугодие в едином издании; вышли в свет уже 5 выпусков!

Плакаты – в комплекте 10 плакатов с занимательными задачами для школьных кабинетов математики и физики.

Календарь загадок – календарь на текущий год с задачей-картинкой на каждый месяц.

Всё это можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, сайт **biblio.mccme.ru**, или заказать по электронной почте **biblio@mccme.ru**

Где ещё можно купить продукцию «Квантика», смотрите по ссылке:
kvantik.com/kupit.html

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

6+

ISSN 2227-7986
08

Можно подписаться на электронную версию журнала!
Подробности по ссылке: **http://pressa.ru/magazines/kvantik#/**

Главный редактор: Сергей Дориченко
Редакция: Александр Бердников, Дарья Кожемякина, Елена Котко, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Верстка: Рая Шагеева, Ира Гумерова
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84х108/16.
Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 5000 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел.: (499) 241-08-04.
e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСОВАЯ МЕДИАНА

Игорь Акулич

– Даня! Как говорят в Одессе, ты сейчас будешь дико смеяться. Знаешь, почему?

– Догадываюсь, Федя. Небось, опять задачу про часы нашёл.

– Верно... Твоя интуиция поразительна!

– Скорее, опыт. Ты ведь кроме этого, ни о чем думать не можешь. Ладно, что за задача-то?

– Она как бы про часы, но изрядно отличается от тех, что мы раньше решали, потому что *выходит за пределы циферблата*. Вот послушай: «На столе както лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов (часы считаются идеально плоскими)»[1].

– Ну и как, решил ты её?

– Честно признаюсь, не совсем. То есть подсмотрел в ответы. Оказывается, ключ к её решению – *медиана*!

– Что ещё за медиана? Откуда она в часах взялась-то?

– Сейчас узнаешь. Оказывается, решение основано на известной геометрической теореме: удвоенная медиана, проведённая из любой вершины треугольника, меньше суммы двух сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

– Что-то мне эта теорема неизвестна. И вообще она какая-то сомнительная. Конечно, если треугольник, допустим, правильный, то у него любая медиана меньше любой стороны, и потому теорема верна. Если же он прямоугольный или тупоугольный, и медиана проводится из вершины острого угла – то там ещё вопрос, что больше! Вот посмотри: медиана AM треугольника ABC, конечно, меньше стороны AB, но больше стороны AC (рис.1). И в сумме стороны AB и AC могут оказаться и меньше *удвоенной* медианы...

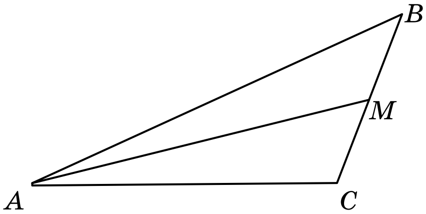


Рис. 1

[1] Эта задача была предложена на X Всесоюзной математической олимпиаде в 1976 году. Автор, к сожалению, неизвестен.

– А вот и нет! Погляди-ка сюда. Давай *достроим* твой треугольник ABC до *параллелограмма* $ABDC$ так, чтобы сторона BC оказалась диагональю этого параллелограмма (рис. 2). Тогда AD – вторая его диагональ, и она как раз равна удвоенной медиане AM треугольника ABC. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $BD = AC$, и сумма сторон $AB + AC$ равна сумме $AB + BD$. Но ведь очевидно, что $AB + BD$ больше, чем AD, поскольку в треугольнике ABD (как, впрочем, и вообще в любом треугольнике) сумма двух сторон всегда больше третьей. Теорема доказана!

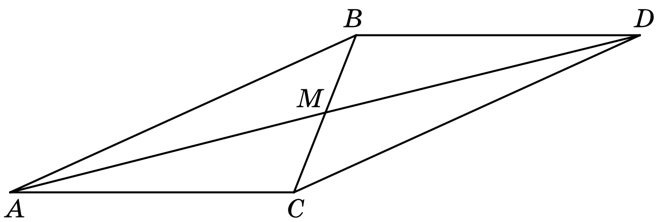


Рис. 2

– Да, теперь согласен. Но при чём здесь часы?

– Слушай дальше. Пусть точка A – тот самый *центр стола*, а точки M_1, M_2, M_3, ..., M_{50} – центры всех часов, пронумерованные в произвольном порядке. Возьмём любой момент времени, и пусть концы минутных стрелок часов находятся в точках B_1, B_2, B_3, ..., B_{50} соответственно. Тогда ровно через полчаса все минутные стрелки продвинутся ровно на пол-оборота, и их концы окажутся в точках C_1, C_2, C_3, ..., C_{50}, которые симметричны точкам B_1, B_2, B_3, ..., B_{50} относительно центров часов. То есть для каждых часов мы получим картинку, похожую на рисунок 1, только на рисунке номера не расставлены и углы со сторонами могут быть другими. Поэтому в силу только что доказанной теоремы $AB_1 + AC_1 > 2AM_1$, $AB_2 + AC_2 > 2AM_2$ и так далее вплоть до $AB_{50} + AC_{50} > 2AM_{50}$.

– Минуточку! Дальше всё ясно! Надо сложить все эти неравенства, верно? И получим:

$$(AB_1 + AC_1) + (AB_2 + AC_2) + \ldots + (AB_{50} + AC_{50}) >$$
$$> 2(AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{50}).$$

Теперь в левой части сгруппируем слагаемые в другом порядке, то есть:

$$(AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_{50}) + (AC_1 + AC_2 + \ldots + AC_{50}) >$$
$$> 2(AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{50}).$$

Выражение в первых скобках левой части – это сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок в выбранный нами произвольный момент времени, а в правых скобках – сумма тех же расстояний через полчаса. Ясно, что хотя бы одна из этих двух сумм обязана быть больше, чем сумма в скобках правой части – иначе левая часть будет *не больше* правой. Вот тогда-то сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок и окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов. Теорема доказана!

– А ты заметил, что часы не обязаны лежать на столе, а могут вообще-то располагаться где попало и как попало?

– Конечно! Более того – и точка, от которой измеряются все расстояния, тоже может находиться где угодно: хоть в центре стола, хоть на верхушке Останкинской телебашни!

– И ещё: вместо минутных стрелок могут фигурировать секундные или часовые! Рассуждения те же, только рассмотренный интервал времени будет не полчаса, а 30 секунд либо же 6 часов – чтобы стрелка прошла пол-оборота.

– Да и количество часов может быть любым, а не только 50. Красивая задача!

– А теперь вот тебе сюрприз: я эту задачу *троекратно усилил*.

– Это как?

– Я доказал, что существует момент времени, когда и сумма расстояний от произвольной точки до концов секундных стрелок, и сумма расстояний от неё до концов минутных стрелок, и сумма расстояний до концов часовых стрелок – то есть *каждая* из трёх сумм! – больше суммы расстояний до центров часов! Как тебе это нравится?

– Нет, но это уж чересчур... Стрелки-то «увязаны» между собой, и если одна сдвинется, то остальные две тоже, но на другие углы. Так что здесь я не уверен.

– Опять сомневаешься? Зря! Смотри: в силу доказанного нами в некоторый момент времени сумма расстояний от произвольной точки до концов *секундных* стрелок больше, чем сумма расстояний до центров часов. Верно?

– Да, согласен.

– Рассмотрим этот момент, а также момент ровно через полчаса. Обрати внимание: положения *секундных* стрелок всех часов в оба момента одни и те же! Так что для них утверждение теоремы сохраняется. А для минутных хотя бы в один из этих двух моментов сумма расстояний до концов *минутных* стрелок больше суммы расстояний до центров часов. То есть мы выловили момент, когда утверждение справедливо и для секундных, и для минутных стрелок. Ну, а теперь «подключим» и часовые стрелки, рассмотрев этот последний найденный нами момент, а также тот, который наступит ровно через 6 часов. Положения секундных и минутных стрелок будут прежними (и для них всё останется в силе), а для часовых стрелок хотя бы в один из этих двух моментов тоже станет выполнено нужное требование. Всё!

...Оставим на этом наших собеседников. Обратим лучше внимание на одну неувязку в их рассуждениях. Доказывая неравенство для минутных стрелок, Федя предположил, что «для каждых часов мы получим картинку, похожую на рисунок 1». Но точки B_1 и C_1 могут попасть на луч AM_1, и тогда мы не сможем применить теорему о медиане. В этом случае неравенство неверно и превращается в равенство. Если такое совпадение случится у всех часов, то неравенство в задаче Феди не будет выполнено. Можно было бы заменить в формулировке и решениях Фединых задач строгие неравенства «больше» менее категоричными «больше или равно» (или по-другому говоря, «не меньше»). Разница вроде бы невелика, но всё-таки не хотелось бы отступать с завоёванного рубежа. Подумайте: нельзя ли спасти задачу? Если не сумеете, посмотрите ответ на с. 30.

Художник Ольга Демидова

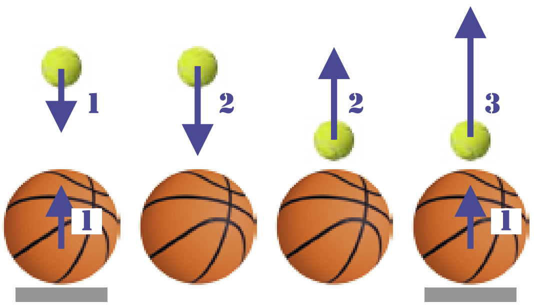
Алексей Колчин,
Андрей Щетников

УСКОРИТЕЛЬ РЕЗИНОВЫХ МЯЧИКОВ

ЭКСПЕРИМЕНТ

Возьмём в руки баскетбольный мяч, положим на него теннисный и отпустим их одновременно. Теннисный мячик взлетает неожиданно высоко – в несколько раз выше исходной точки, с которой его отпустили. Разберёмся, в чём тут дело.

Сначала рассмотрим опыт с одним мячом. Если бы скорость мяча после удара осталась той же, он поднялся бы на исходную высоту. Физики называют такой удар абсолютно упругим. В опыте с двумя мячами, положенными друг на друга, высота подъёма теннисного мяча увеличилась. Значит, скорость теннисного мяча после отскока также увеличилась.



Как связаны между собой скорость мяча после отскока и высота его подъёма? Если скорость мяча после отскока увеличится в 2 раза, то и время подъёма, в течение которого скорость уменьшится до нуля, тоже увеличится в 2 раза. И скорость, и время выросли в 2 раза, значит, высота увеличилась в 4 раза. Если скорость вырастет в 3 раза, высота увеличится в 9 раз. И вообще, высота подъёма пропорциональна квадрату скорости мяча после отскока.

ИДЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УСКОРИТЕЛЯ

Теперь сделаем два важных упрощающих допущения. Во-первых, будем считать все удары абсолютно упругими. Во-вторых, будем считать, что теннисный мяч много легче баскетбольно-

го, и тем самым отдачей баскетбольного мяча при ударе можно пренебречь.

В процессе падения баскетбольный и теннисный мячи набирают одинаковую скорость. Примем скорость обоих мячей непосредственно перед ударом за единицу. Баскетбольный мяч ударяется об пол первым и отскакивает вверх с единичной скоростью. А теннисный мяч всё ещё продолжает лететь с единичной скоростью вниз.

С точки зрения баскетбольного мяча теннисный мяч налетает на него со скоростью 2 единицы. Поскольку удар абсолютно упругий и поскольку отдачей можно пренебречь, теннисный мяч после отскока удаляется от баскетбольного с такой же скоростью 2 единицы. Сам баскетбольный мяч летит вверх с единичной скоростью, поэтому от пола теннисный мяч удаляется со скоростью 3 единицы.

Скорость теннисного мяча после отскока увеличилась в 3 раза – следовательно, в рамках нашей идеальной модели он поднимется на высоту в 9 раз большую той, с которой его отпустили! Такая система и в самом деле работает как «ускоритель резиновых мячиков».

ПРИБЛИЖЕНИЕ К РЕАЛЬНОСТИ

В действительности скорость мяча после отскока уменьшается из-за потерь энергии. Наш дополнительный опыт показал, что скорость баскетбольного мяча после отскока от пола будет равна не единице, а 0,8. Ещё один опыт показал, что после отскока от неподвижного баскетбольного мяча скорость теннисного мяча составляет 0,7 от первоначальной.

Теннисный мяч сближается с баскетбольным со скоростью $0{,}8 + 1 = 1{,}8$. После отскока он будет удаляться от баскетбольного мяча со скоростью $0{,}7 \cdot 1{,}8 \approx 1{,}3$. Значит, от пола он будет удаляться со скоростью $0{,}8 + 1{,}3 = 2{,}1$. Высота подъёма брошенного вверх тела пропорциональна квадрату скорости отскока. Значит, теннисный мяч поднимется выше первоначальной высоты падения в $2{,}1^2 \approx 4{,}4$ раза. Этот расчёт отлично согласуется с нашими опытами (4,1–4,3 раза)!

ЗАДАЧА

Возьмём поставленные друг на друга три мяча, каждый из которых во много раз легче мячей, находящихся под ним. Какое увеличение высоты по сравнению с первоначальной даст такой упругий ускоритель? Сделайте расчёты как для абсолютно упругих соударений, так и для реалистичного коэффициента восстановления скорости 0,8 при всех ударах.

Художник Наталья Гаврилова

Иван Кобиляков

Двенадцать месяцев оленевода

Лето

– Надо идти, – говорит сестре Мукулай.

– Надо остаться и ждать, – возражает брату Огдо.

Каждый стоит на своём и не уступает. Давно в стойбище у долган[1] не было такого разлада! Но случай и впрямь непростой.

Несколько дней назад произошло несчастье. Через то место, где паслись олени родителей Мукулая и Огдо[2], прошло огромное стадо диких оленей. Домашние олени затерялись среди чужаков. Напрасно оленеводы пытались докричаться до своих любимцев. Ничего не помогло: их олени ушли вместе с дикими.

Отец только и успел, что выловить из оленьей реки четырёх своих самых преданных любимцев. Несколько часов сидел он, повесив голову: ещё бы, в один день стал бедняком! А потом вдруг запряг нарту и вместе с женой пустился в погоню за стадом.

Ребятам нелегко живётся без родителей. Но они не унывают.

Отец научил Мукулая ставить петли на зайцев и куропаток, кидать маут[3], запрягать нарту. В свои десять лет он уже хороший охотник и оленевод. Может и рыбу поймать в реке. Старшей сестре Огдо – двенадцать. Пока нет матери, она управляется с домашним хозяйством: носит воду из реки, готовит пищу, колет дрова и прибирается в балке[4]. Если остаётся время, Огдо собирает у реки дикий лук и щавель.

[1] Долганы – самый молодой и самый многочисленный из таймырских народов. Всего их около 6000 человек. В венах долган смешалась кровь эвенков, якутов, нганасан, ненцев и энцев. В формировании этого народа сыграли большую роль и затундренные русские крестьяне, которые с первой половины XVII века стали селиться на Таймыре. Живут долганы на северо-западе Таймыра, на реках Попигай и Хатанга, а также в районе Норильских озёр.

[2] Нередко долганы называют детей русскими именами, но на свой манер. Мукулай – это долганский вариант имени Николай, а Огдо – имени Евдокия. Интересно, что если ребёнок в раннем детстве много болел, то ему меняли имя. Считалось, что это убережёт от злых духов.

[3] Маут – аркан, которым ловят оленей.

Мукулай – добытчик, Огдо – хранительница очага. Одним словом, они оба уже очень самостоятельные. Поэтому и спор у них такой горячий.

– Отец велел ждать, значит, мы будем ждать. А если хочешь идти на выручку, нужен хороший план, – говорит Огдо, которая всегда слушалась своих родителей и была очень благоразумной девочкой.

– А вдруг с родителями что-то случилось? Надо скорее найти их! – не уступает Мукулай, который, несмотря на свой юный возраст, уже очень смел и силён.

В трудных спорах долганы всегда обращались за советом к старикам. Решили и ребята спросить у дедушки Огоньора, как им поступить.

Дедушка Огоньор сидит в старом балке напротив печки, прислушиваясь, как потрескивают угольки.

Ребята входят в балок и спрашивают:

– Дедушка, как нам поступить?

Немного подумав, дедушка Огоньор отвечает тихим голосом:

– Надо вам идти на север вслед за родителями и помочь им отыскать оленей...

– Я же тебе говорил, что нужно спешить на помощь, – шепчет сестре Мукулай и хлопает в ладоши, то ли от радости, то ли пытаясь прихлопнуть залетевшего в балок комара.

– ... только нужно сперва подумать, как помочь, – после небольшой паузы заканчивает дедушка Огоньор начатую фразу.

– Я же тебе говорила, что нужно всё обдумать! – оборачивается к брату Огдо.

– Ну, полно вам ссориться, ребята! Тундровые люди тем и сильны, что умеют слушать и наблюдать...

[4] Бало́к – тип кочевого жилища, который был заимствован долганами от русских купцов, ездивших с товарами по тундре. Представляет собой передвижной домик на полозьях, обтянутый шкурами. В балке есть дверь, два небольших окна, железная печь и высокие лежанки (нары).

Июнь для оленеводов – месяц отдыха. Погода становится теплее. Пищи для оленей становится вдоволь, и до сезона комаров можно особенно не беспокоиться о стаде. В июне оленеводы рыбачат и охотятся на водоплавающую птицу.

Традиционные названия июня у народов Таймыра: месяц гнездования птиц (ненцы); месяц отёла оленей (долганы, нганасаны); время лова рыбы (энцы). Эвенки летом месяцы не считали «по случаю тепла» – мол, и так хорошо.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

С этими словами дедушка Огоньор открывает заслонку печи и кидает в огонь сырую ветку. Из печи от этого вырывается сизый дымок и облетает комнату. Недобитый Мукулаем комар, почувствовав запах дыма, спешит улететь прочь из балка.

Глаза Огдо загораются точно угольки в печке:

– Спасибо тебе, дедушка, за подсказку! Теперь мы точно справимся!

– Не за что, – улыбается ей в ответ Огоньор, – я буду вас ждать. Возвращайтесь скорее.

Как только ребята выходят из балка на воздух, Мукулай растерянно спрашивает сестру:

– Что такое ты поняла?

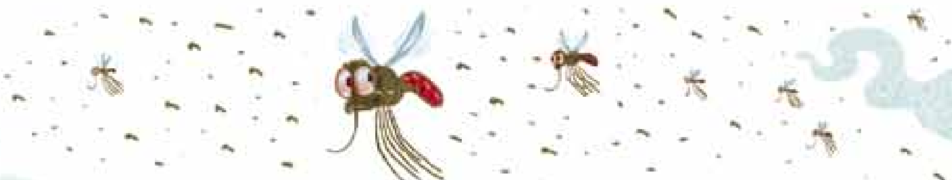
– Ты и сам всё скоро поймёшь, братец – отвечает Огдо. – Собирайся в дорогу. Да не забудь спички прихватить!

Самый страшный зверь на Таймыре – не волк и не медведь, а комар. С одним комаром легко разделаться, но как быть, если миллионы насекомых висят над тобой в воздухе, заслоняя солнце и жужжа на все лады?

У человека, чтобы отгонять комаров, есть руки. Но кровожадные насекомые нападают и на беззащитных оленей, чем причиняют немало беспокойства. Спасения от укусов олени ищут в местах с сильным ветром, который сдувает комаров. А самый сильный ветер, как известно, на берегу Ледовитого океана. В сторону океана вслед за сбежавшими оленями по совету дедушки Огоньора и поспешили Мукулай и Огдо.

Сколько дней они шли – не разберёшь. Полярный день, и солнце не садится за горизонт. А часов у ребят нет.

Наконец поднялись они на холмик и видят: внизу течёт оленья река, на соседнем холмике, словно на острове, стоит чум. А рядом с чумом – нарты родителей.

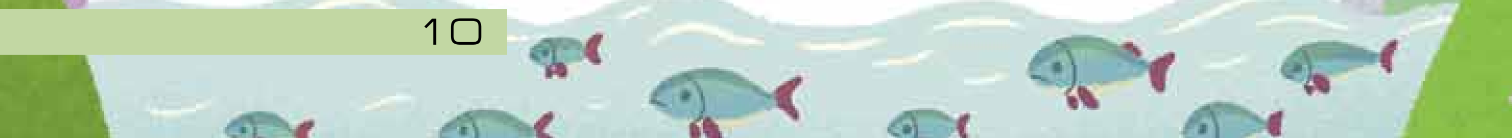


Июль – это тревожное время для людей и оленей из-за комаров. Если нет сильного ветра, оленеводам приходится разжигать костры-дымокуры, в дыму которых олени могут укрыться от назойливых насекомых. В этом месяце оленеводы содержат своё стадо в местах, богатых зеленью и хорошо обдуваемых со всех сторон. В июле самый разгар рыбной ловли.

Традиционные названия июля у народов Таймыра: месяц комаров (ненцы); месяц половодья (долганы); месяц появления рыбы (нганасаны); середина лета (энцы).

Август. В августе заканчивается тундровое лето и наступает осень, а вместе с ней и время перекочёвок на зимние пастбища. В этом месяце оленеводы заготавливают шкуры и шьют одежду; чинят старые пасти (ловушки на пушного зверя) и нарты, готовясь к зиме. В конце лета заканчивается сезон рыбной ловли. Считается, что к августу нужно раздать все долги.

Традиционные названия августа у народов Таймыра: месяц оводов (ненцы, долганы); месяц линьки гусей (нганасаны); первый снег (энцы).



Как только увидели это Огдо и Мукулай, сразу у них сил прибавилось, быстро дошли до чума. Входят внутрь, а там – отец, мать и еще один человек. Мать обрадовалась встрече, отец нахмурился, что непослушные дети покинули стойбище, а незнакомец представился:

– Меня зовут Лисю. Я – нганасанский[5] охотник. Садитесь, ребята, чай пить – будем думать, как заставить оленей вернуться к вам в стойбище.

– Некогда нам чай пить, – возражает Мукулай, – работы много.

Взрослые с удивлением смотрят на ребятишек. А Огдо продолжает за брата объяснять их план, возникший сразу после встречи с мудрым дедушкой Огоньором:

– Нужно развести большие дымные костры, которые отпугивают комаров. Олени соберутся у этих костров, и мы сможем отловить тех, что были в нашем стаде. А остальных отпустим.

Родителям и Лисю понравился план ребят. Так и решили поступить: нарвали сырых веток и запалили большие костры-дымокуры.

Измученные комарами олени подходят к кострам, а оленеводы к ним присматриваются. Домашних оленей ловят, диких отпускают[6]. Не всё стадо, конечно, удалось вернуть… Многие домашние олени так и ушли с дикарями к океану.

Благодарят долганы гостеприимного Лисю за помощь и отправляются в обратный путь. Будут теперь внимательно за своими оленями смотреть: ограждать их от диких, чтобы не уходили; устраивать дымокуры, чтобы не докучали комары. А на следующий год родители, может быть, возьмут с собой Мукулая, Огдо и мудрого дедушку Огоньора и станут к океану кочевать, где сильный ветер и богатые пастбища.

[5] Нганасаны – самый северный народ нашей страны. Один из пяти коренных народов, населяющих Таймырский полуостров. Число нганасан в настоящее время – 800 человек.

[6] Домашние олени долган принадлежат к двум породам: низкорослой тундровой и крупной лесотундровой. Опытные оленеводы без ошибки могут не только отличить диких оленей от домашних, но и знают многих оленей из своего стада «в лицо».

Художник Евгений Паненко

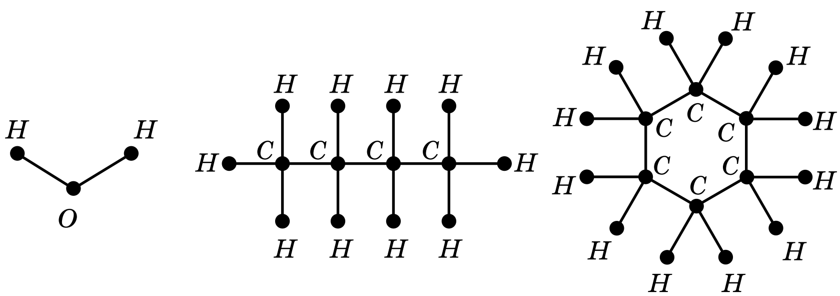
Ксения Пахомова

Спичечные графы

В «Квантике» №10 за 2014 год мы рассказывали о гороховом конструкторе. Надеемся, что ты, дорогой читатель, построил множество многогранников, замков, мостов и других замечательных вещей.

А знаешь ли ты, что с помощью гороха и зубочисток строятся красивые и ажурные графы на плоскости, да и сами задачи теории графов изучаются веселее? Слово «граф» в математике означает картинку, где нарисовано несколько точек, некоторые из которых соединены отрезками или дугами. Точки называются вершинами графа, а отрезки (дуги) – его рёбрами. В нашем случае вершины – горошины, прямые рёбра – зубочистки. В ходе конструирования получаются элегантные и прочные конструкции.

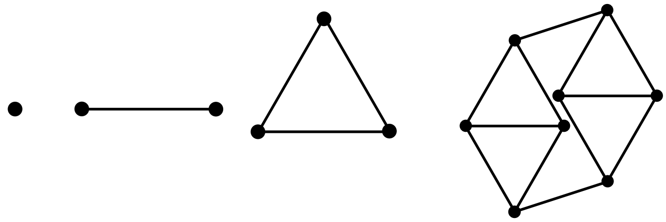
Методы теории графов завоевали признание не только математиков, но и инженеров, экономистов, психологов, лингвистов, биологов, химиков. Последние часто с помощью графов изображают молекулы различных веществ. Попробуй построить сам, например, молекулы воды, бутана и циклогексана:



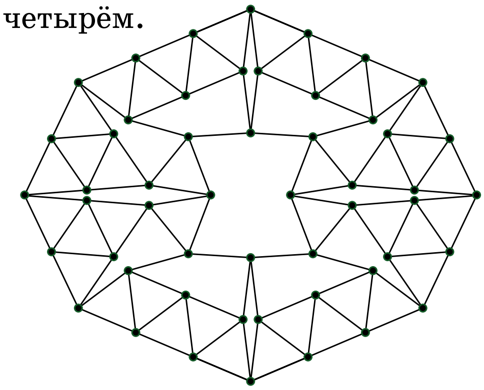
Ты уже заметил, что все рёбра этих трёх молекулярных графов имеют одинаковую длину и не пересекаются? Такие графы в математике называются спичечными. Получили они своё название, потому что легко выкладываются на плоскости с помощью спичек.

Построить спичечные графы несложно. В конце прошлого века появилось большое число математических результатов по спичечным графам, которые во многом связаны с такими характеристиками, как количество вершин, набор степеней и другие.

Степенью вершины называется количество выходящих из неё рёбер. Если все степени у графа одинаковые, то он называется *регулярным*. Ниже изображены регулярные спичечные графы степени 0, 1, 2 и 3, соответственно.

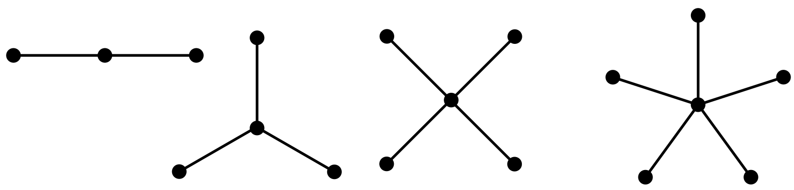


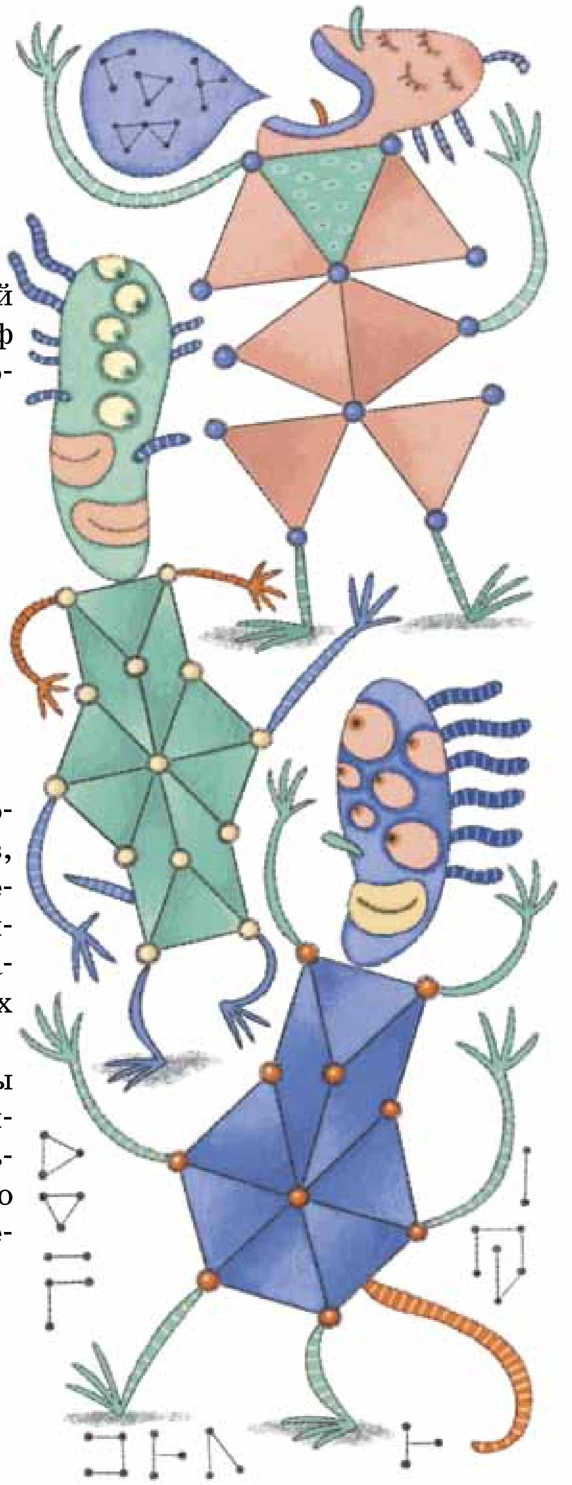
В 1986 году Хейко Харборт нашёл регулярный спичечный граф, который получил его имя – граф Харборта. В нём 104 ребра и 52 вершины, степени которых равны четырём.



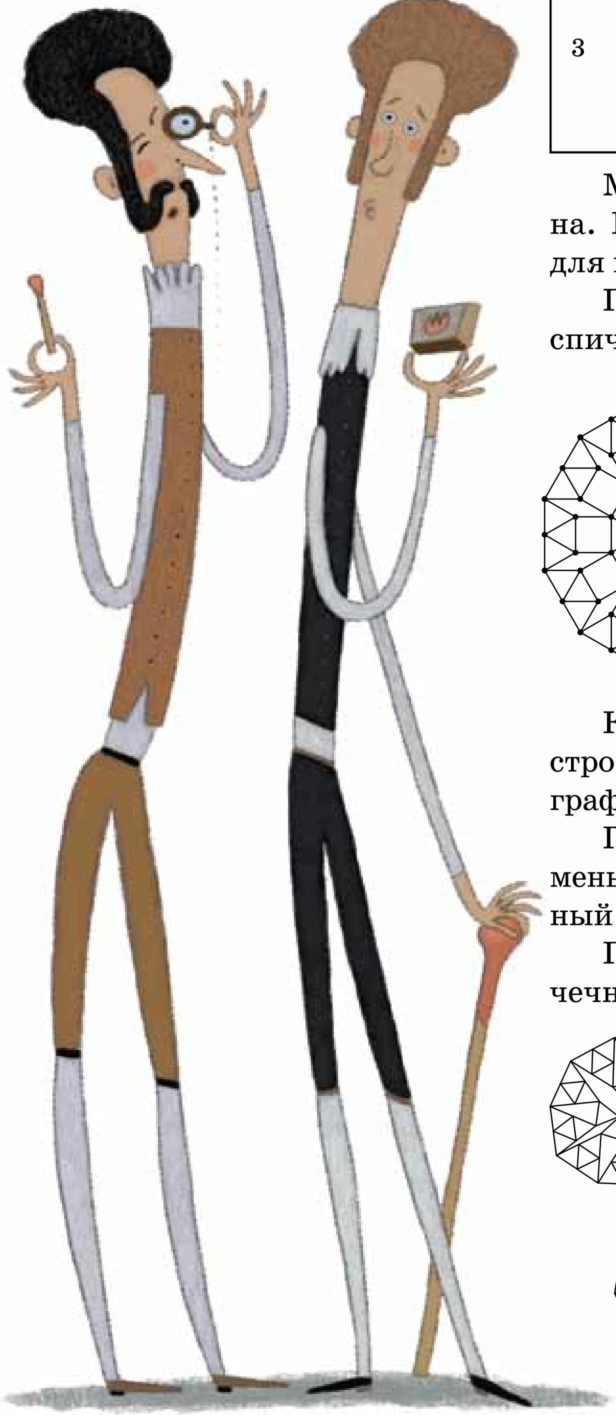
Интересной математической задачей является поиск наименьших спичечных графов, то есть графов, обладающих наименьшим количеством вершин и имеющих наперёд заданный набор степеней. Из приведённых выше регулярных графов про первые четыре доказано, что они наименьшие. А регулярных спичечных графов степени 5 и выше не существует.

Рассмотрим спичечные графы, у которых вершины имеют два различных значения степени $\{m, n\}$. Наименьший спичечный граф со степенями $\{0, n\}$ – это объединение одной вершины и наименьшего спичечного графа степени n. Наименьший спичечный граф со степенями $\{1, n\}$ – это граф-звезда с $n+1$ вершинами.

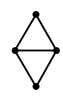
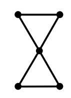
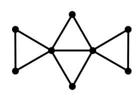
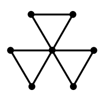
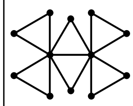
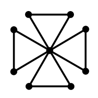
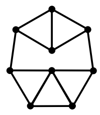
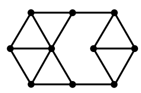
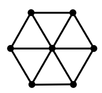
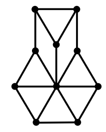
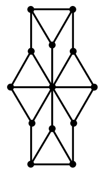




СМОТРИ!

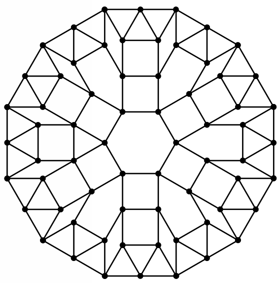


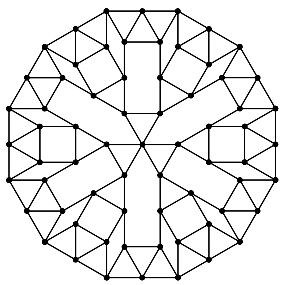
Ниже в таблице представлены наименьшие известные спичечные графы со степенями $\{m,n\}$:

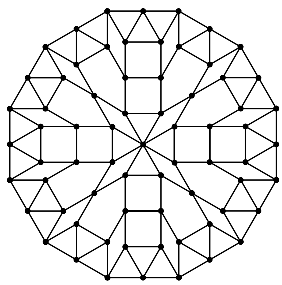
$m \backslash n$	3	4	5	6	7	8
2						
3						

Минимальность графов из первой строки доказана. Попробуйте продолжить эту строку – постройте для каждого $n = 9$, 10, 11, ... граф со степенями $\{2,n\}$.

Посмотрите, как красивы наименьшие известные спичечные графы со степенями $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{4,8\}$:

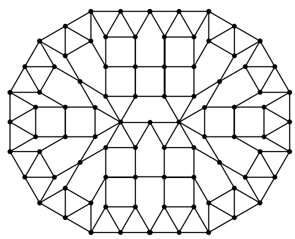




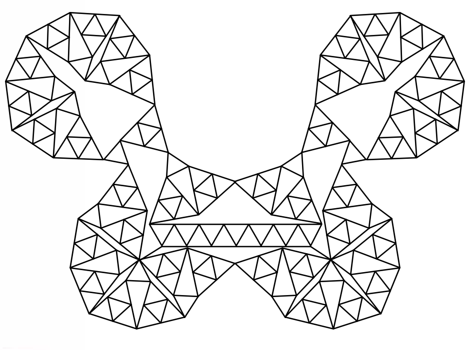


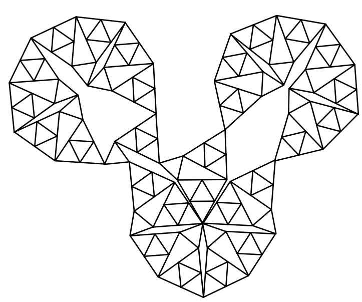
Кстати, попробуйте-ка быстро отыскать на первом из этих графов вершину степени 5.

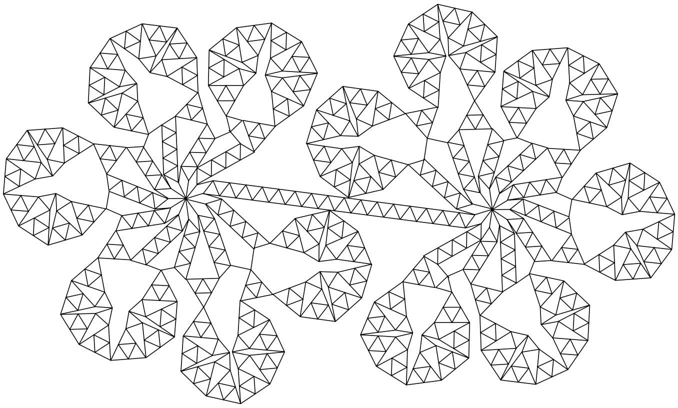
Гэвин Теобальд нашёл наименьший известный спичечный граф со степенями $\{4,7\}$:



Перед вами примеры наименьших известных спичечных графов со степенями $\{4,9\}$, $\{4,10\}$, $\{4,11\}$:



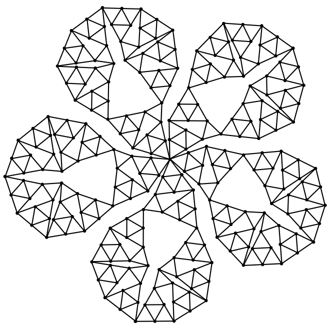




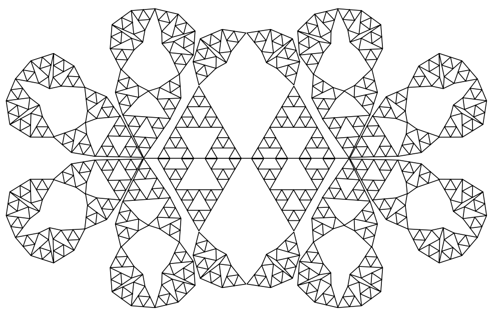
Спичечный граф со степенями {4,12} пока не найден. Возможно, что при $n \geqslant 12$ спичечных графов со степенями {4, n} нет. А вот графов со степенями {m,n}, где m и n больше 5, точно не существует.

Имеются и другие задачи со спичечными графами, причём как на плоскости, так и в пространстве[1]. И многие вопросы ещё остаются открытыми. Замечательно, что такое простое занятие, как конструирование из гороха, позволяет прикоснуться к серьёзным проблемам, которые волнуют современных математиков.

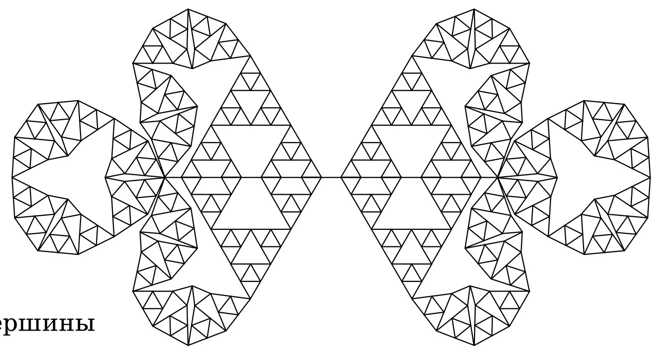
Напоследок приведём несколько не минимальных, но очень красивых спичечных графов.



{4,10}, 260 вершин



{4,9}, 806 вершин



{4,9}, 404 вершины

[1]Подробнее о других задачах на спичечных графах можно прочитать на сайте: http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html

Художник Елена Цветаева

Сергей Федин

АРХИМЕД, ЧАПЛИН, МОЦАРТ

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

АРХИМЕД

Знаменитый древнегреческий учёный Архимед очень любил принимать ванну. Однажды он в очередной раз плескался в тёплой воде, размышляя над тем, почему ему так не хочется вылезать. Но тут как раз отключили горячую воду, и на голову Архимеда упала из крана первая холодная капля. Гений поёжился, но стерпел. Однако холодные капли падали всё чаще, превратившись в ледяную струю. Тут уж покрытый несколькими слоями мурашек Архимед не выдержал.

– Эврика!!! – гневно закричал великий учёный, вспомнив, как зовут раба, подогревавшего воду, и выскочил из ванны. Схватив мочалку, он голышом помчался по улицам бить несчастного Эврику...

История умалчивает, что стало с рабом, когда его нашёл Архимед, но зато навсегда сохранился закон, который учёный открыл благодаря этому событию: *на тело, погружённое в холодную воду, очень быстро начинает действовать выталкивающая сила.*

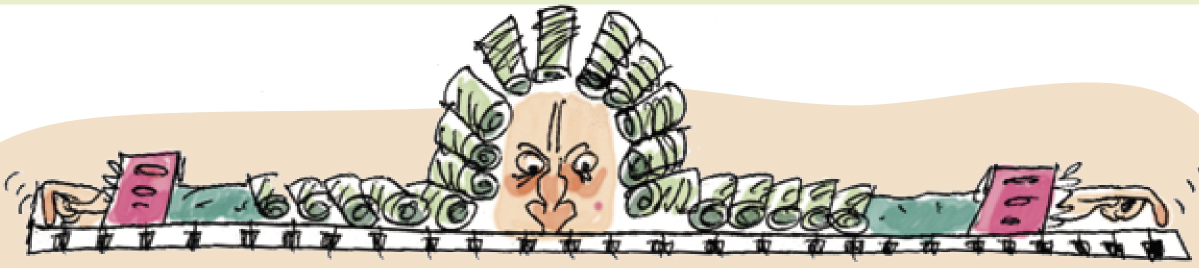
Это замечательное правило с тех пор называется законом Архимеда.

ЧАПЛИН

Великий комик Чарли Чаплин в детстве был большим шалуном. Как-то раз он случайно разбил витрину магазина и в испуге бросился наутёк. Однако хозяин успел выскочить на улицу и схватить Чарли за воротник.

– Попался, негодник! – закричал он. – Теперь тебе придётся заплатить за разбитое стекло.

– Конечно, дяденька, – согласился хитроумный малыш. – Я как раз бежал домой за деньгами.



МОЦАРТ

Гениальный композитор Моцарт был очень жизнерадостным человеком, любил шутки и розыгрыши. Однажды на званом обеде он сказал композитору Гайдну, что может написать пьесу, которую тот не сможет сыграть. Гайдн, сам прекрасный исполнитель, конечно, не поверил. Тогда Моцарт тут же на спор сел и написал несколько строчек. Гайдн сел за фортепиано и легко начал играть. Через несколько секунд он вдруг остановился:

– Я не могу сыграть это место! – с изумлением сказал он. – Обе руки у меня исполняют пьесу в разных концах клавиатуры, а тут ещё надо сыграть одну ноту посередине.

– Позвольте, я покажу вам, как это сделать, – улыбнулся Моцарт и сел за инструмент. Дойдя до трудного места, он наклонился и нажал нужную клавишу носом.

Гости расхохотались, а Гайдну пришлось признать своё поражение.

Художник Капыч

Заусенцы с завитками

Александр Бердников

Рис. 7

Два крючка на рисунке 1 можно расположить так, что, двигая в плоскости, расцепить не получится (рис. 2).

Рис. 1

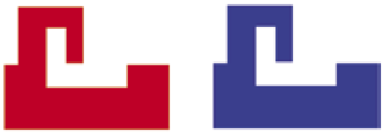
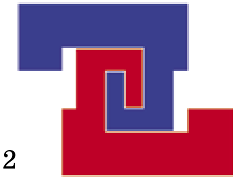


Рис. 2



Крючки можно немного видоизменить, в целом сохраняя их форму, так, что новые крючки уже можно будет расцепить (рис. 3–6).

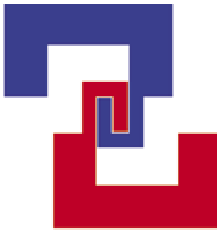


Рис. 3

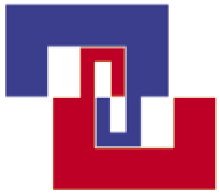


Рис. 4

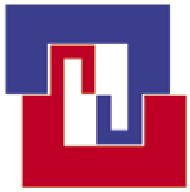


Рис. 5

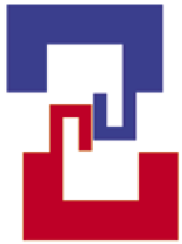


Рис. 6

Можно сделать крючки, закрученные друг вокруг друга на несколько оборотов. Но если их форма будет как на рисунке 7, то даже их можно будет расцепить.

А сколько нужно потребовать оборотов от закорючек друг вокруг друга, чтобы, какую бы им ни придали форму, их нельзя было расцепить?

Ответ довольно неожиданный. Какую бы планку ни установили, найдутся расцепляемые завитки, делающие друг вокруг друга требуемое число оборотов.

Попытаемся нарисовать такие крючки, начиная с центра, оба одновременно. Опыт предыдущих крючков подсказывает, к чему нужно стремиться. Нужно лишь следить всё время за тем, чтобы каждый новый виток был достаточно широк, чтобы потом, при их распутывании, пропустить предыдущий виток другой спирали.

Например, можно каждую следующую линию помещать на вдвое большее расстояние от центра, чем предыдущую. То есть линия с номером n находится на расстоянии 2^n от центра. Расчёт на рисунке 8 показывает, что таких расстояний хватает с запасом. Так как эти спирали могут быть нарисованы с любым числом витков, мы получили наш контрпример. Кстати, раз просветы в витках имеют большой запас, можно сделать спираль не из бесконечно тонких ломаных, а из толстеньких палочек и сделать реальную модель.

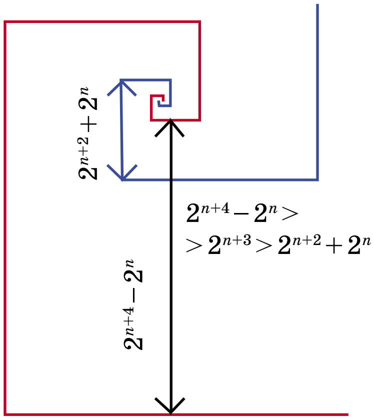


Рис. 8

Такие угловатые спирали хороши тем, что их довольно просто строить, да и доказать их «расцепимость» не так сложно. Однако есть ещё один, более сложный, пример завитков, про который хочется рассказать. Идея его состоит в том, чтобы наши ломаные спирали заменить на гладкие – логарифмические. Этого слова пугаться не надо, мы сейчас познакомим вас с этим интересным геометрическим объектом.

У наших угловатых спиралей расстояние от ребра до центра вырастало в два раза при каждом повороте на 90°. То есть у звеньев, из которых строилась ломаная, и направление, и расстояние до центра менялись скачками. Давайте попробуем эти скачки заменить равномерным движением. Для этого будем плавно двигать точку вокруг центра так, чтобы через t секунд она сделала $t/2$ оборотов вокруг центра и находилась от него на расстоянии 2^t.

Вопрос о том, что такое 2^t для нецелых t, мы оставим университетам. Скажем лишь, что если t равно отношению целых чисел p/q, то $2^t=2^{p/q}=\sqrt[q]{2^p}$.

Таким образом, точка равномерно вращается вокруг центра, удаляясь от него. После нескольких оборотов получим гладкую спираль, которая и называется *логарифмической* (рис. 9). Две такие спирали, так же, как и ломаные до этого, можно расцепить при любом числе витков.

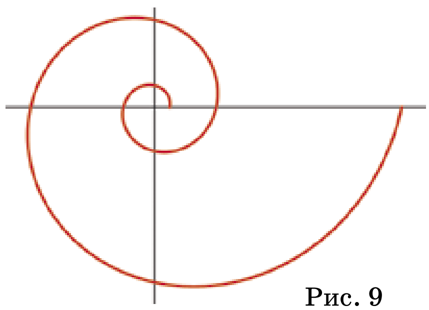


Рис. 9

Для большей эффектности продолжим спираль внутрь до бесконечности. Нужно просто крутить точку в обратном направлении, приближая её к центру (извлекая из двойки корень всё большей степени, мы получим всё меньший радиус).

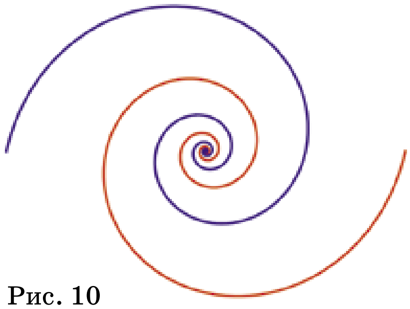


Рис. 10

Совместим центры двух таких спиралей, по-разному повёрнутых (рис. 10). Получим завитки, делающие друг вокруг друга БЕСКОНЕЧНОЕ число оборотов. Трудно поверить, но даже такие бесконечные завитки можно расцепить!

Процесс расцепления сам по себе интересный.

Заметим важное свойство логарифмической спирали: если её одновременно растянуть в 2^n раз и повернуть на $n/2$ оборотов относительно центра, то спираль перейдёт в себя (рис. 11). Почему? При её построении такое растяжение и поворот равносильны в каждый момент перемещению точки туда, где она должна оказаться только спустя ещё n секунд. То есть мы просто забегаем на n секунд вперёд при построении спирали. Но результат ведь не изменится от того, что мы его получим немного раньше. Тем логарифмическая спираль и хороша: плоскость можно так плавно растягивать и поворачивать, что спираль будет скользить вдоль себя, как скользит прямая при сдвигах вдоль неё или окружность при поворотах вокруг её центра.

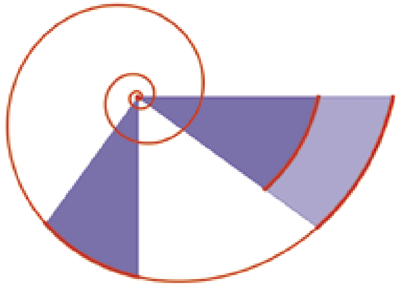


Рис. 11

Поясним это на примере поворота на пол-оборота.

Вспомним, как мы строили спираль с помощью движущейся точки. Где бы ни находилась наша точка на спирали, через пол-оборота она увеличит своё расстояние до центра в 2 раза. Поэтому если любую точку спирали отодвинуть от центра в два раза дальше, а потом просто повернуть на пол-оборота вперёд, она снова попадёт на спираль. Так можно сделать со всей спиралью сразу: растянуть в два раза и повернуть на пол-оборота – получится эта же спираль!

Из всего этого можно сделать ещё один вывод. Растянуть спираль в 2^n раз – это всё равно что повернуть её на $n/2$ оборотов в *обратную* сторону. Попробуйте вывести это самостоятельно из предыдущего свойства.

Теперь мы готовы приступить к распутыванию. Когда мы требовали, чтобы за пол-оборота спираль вырастала именно в 2 раза, а не в какое-то ещё число раз, это было не случайно. Мы подобрали форму спиралей так, чтобы они как раз вписывались друг в друга, как на рисунке 12. А теперь начнём сжимать эту картинку (центры спиралей станут сближаться), поворачивая её. При этом будем дорисовывать спирали так, чтобы они оставались постоянного размера.

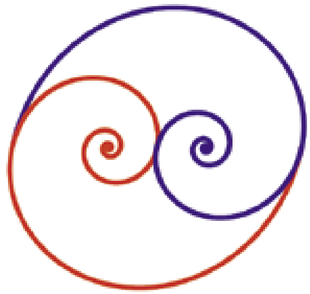


Рис. 12

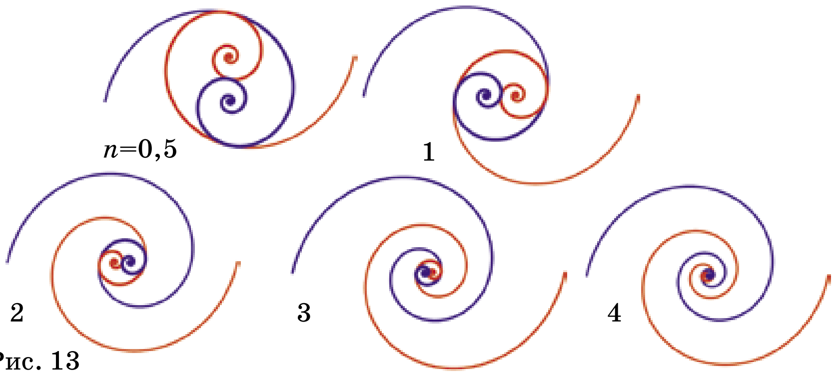
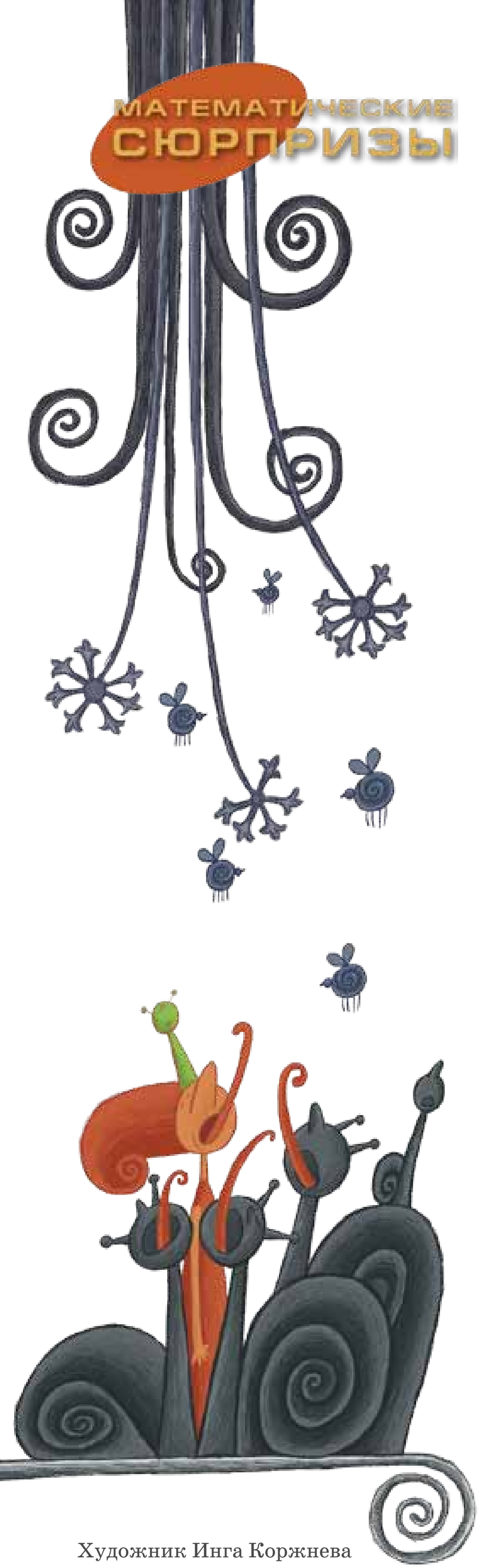


Рис. 13

Что будет происходить, если мы, сжимая картинку в 2^n раз, повернём её на пресловутые $n/2$ оборотов в обратную сторону относительно центра картинки?

Вынем на минутку спираль из плоскости, забудем, из какой точки она растёт, но не её размер и как она повёрнута. Повернув и сжав её в руках, мы, как уже говорилось, по сути её не изменим, а если вовремя дорисовывать продолжение, то не изменим совсем. Теперь можно положить её обратно в плоскость. Центр спирали был сдвинут, поэтому отложим её из нового центра. В итоге получилось, что спирали просто сдвигаются вслед за своим центром, не вертясь и не сжимаясь. Это заметно на серии картинок (рис. 13), особенно если следить за внешними концами спиралей.

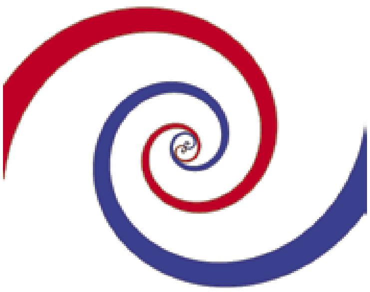


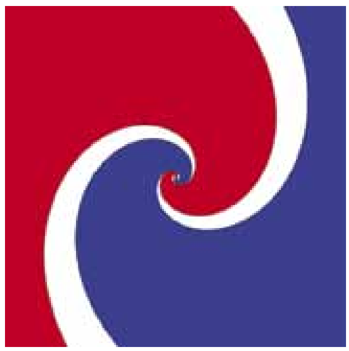
Художник Инга Коржнева

Каждый центр при этом тоже будет двигаться по аналогичной спирали, сходящейся в центр картинки. Ведь мы его двигаем как раз по правилу построения логарифмической спирали. До полного запутывания спиралей их центры сделают бесконечное число виражей. Но они это сделают за конечное время: длина «внутренней» части логарифмической спирали, по которой идёт центр, конечна (это мы доказывать не будем).

Мы научились запутывать спирали. Прокручивая процесс в обратном направлении, мы получим и распутывание («пролистайте» рисунок 13 в обратную сторону).

Зацеплять пока мы научились только бесконечно тонкие спирали, да и то с оговоркой: они касались в трёх точках. Но можно сделать спирали «покруче»: за каждые пол-оборота увеличивать расстояние до центра не в 2 раза, а больше. Они перестанут упираться друг в друга, и их можно будет рисовать не идеально тонкими, а довольно толстенькими, хоть и сужающимися к центру.





А ещё можно так же баловаться с несколькими спиралями:

Видео распутывания бесконечных спиралей вы можете посмотреть на нашем сайте kvantik.org

ФИГУРКА ИЗ ЛИСТА БУМАГИ

Возможно ли сделать из прямоугольного листа бумаги фигурку, изображённую на рисунке?

Разрешается сгибать бумагу и делать в ней разрезы (так, чтобы бумага не распадалась на части), но запрещается склеивать или складывать в несколько слоёв.

Художник Елена Цветаева

Игорь Акулич

ВОЛЕЙБОЛ ОТ ПРОТИВНОГО

Попробуйте решить следующую старинную задачу в уме, не прибегая к бумаге и карандашу, и уложиться при этом в десять секунд (больше не требуется!!!):

В волейбольном турнире каждая команда встретилась с каждой по одному разу. Оказалось, что ровно 95 % команд одержали хотя бы по одной победе. Сколько команд участвовало в турнире? (Примечание: в волейболе ничьих не бывает!).

Получилось? Поздравляем! А для тех, кто не справился, поясним, как надо было рассуждать. Задача лишь с виду кажется устрашающе сложной, а на самом деле проста, как волейбольный мяч. Если 95 % команд одержали *хотя бы по одной победе*, то остальные 5 % команд *все игры проиграли* (ничьи-то в волейболе невозможны). Но в турнире может быть лишь одна-единственная команда, проигравшая все игры! И в самом деле, допустим, что таких команд найдётся хотя бы две. Но как тогда быть с их встречей между собой? Ведь какая-то из них просто *обязана* победить другую – и тогда у неё на счету появится хотя бы одна победа!

Таким образом, все игры проиграла ровно одна команда. Но если одна команда – это 5 % от общего их числа (то есть двадцатая часть), то всего команд было в 20 раз больше, а именно – 20. Окончательный ответ: в турнире участвовало 20 команд.

Здесь давайте ненадолго задержимся и подробнее рассмотрим использованный нами способ рассуждений, когда мы доказывали, что в турнире может быть только одна команда, проигравшая все игры. Его очень любят математики и называют методом «от противного». Схема рассуждений такова. Допустим, требуется доказать какое-то утверждение «У». Для этого мы сначала предполагаем, что оно *неверно*. Далее, отталкиваясь от нашего предположения, логическими рассуждениями получаем какое-либо противоречие...

Здесь въедливый читатель может спросить: как понимать слова «*какое-либо противоречие*»? Законный вопрос. Поясняем: это может быть противоречие либо какому-то непреложному математическому факту (например, что $2 \times 2 = 4$), либо... нашему предположению или следствиям из него! Кстати, последнее бывает чаще всего (и, между прочим, в рассмотренной «волейбольной» задаче как раз такой случай имеет место).

Ну, а если получено противоречие, значит, наше предположение о неверности утверждения «У» само было неверно. Следовательно, никуда не денешься – утверждение «У» должно быть верным, что и требовалось доказать. Всё!

Применительно к задаче о турнире утверждение «У» формулируется так: «Не более чем одна команда может проиграть все игры». Мы предположили, что утверждение «У» неверно, то есть найдутся хотя бы две таких команды. Далее мы рассмотрели, что произойдёт при личной встрече этих двух команд и пришли к противоречию – у одной из них должна быть победа! Значит, предположение о неверности утверждения «У» само по себе неверно, и действительно только одна команда могла проиграть все игры.

Уважаемые читатели! Никогда не забывайте о методе «от противного»! Он может выручить вас в самый, казалось бы, безвыходный момент. А чтобы проверить, насколько хорошо вы его уяснили, попробуйте с его помощью одолеть продолжение нашей волейбольной задачи. Итак, в нашем турнире участвовали те же 20 команд, и каждые две встретились по одному разу. Допустим, имелась всего одна волейбольная площадка, и потому игры проводились по очереди, согласно какому-то расписанию. Докажите, что в промежутке между любыми двумя играми всегда найдутся две команды, которые сыграли поровну игр (возможно, ни одной). Это совсем не очевидно, но, тем не менее, именно так!

Художник Максим Калякин

Александр Бердников

Светящаяся вода

Наберите воды в светлую изнутри кружку до половины. Наклоните кружку от себя к лампе или к солнцу и встаньте так, чтобы часть стенки кружки напротив вас едва-едва попадала в тень. Найдя правильное положение, вы заметите, что кружка над водой темнее, чем под водой, вода будто светится. Почему так происходит?

Художник Артём Костюкевич

Задача 1

Какое из следующих утверждений верно? Глаголы *посадить* и *высадить*...

(А) всегда являются синонимами;

(Б) всегда являются антонимами;

(В) могут быть синонимами, но не могут быть антонимами;

(Г) могут быть антонимами, но не могут быть синонимами;

(Д) могут быть и синонимами, и антонимами.

А.И.Иткин

Задача 2

Какая из этих последовательностей слов может с большей вероятностью встретиться в написанном без ошибок тексте на русском языке?

(А) ...*а Приключения*...; (Б) ...*и Приключения*...;

(В) ...*или Приключения*...; (Г) ...*но Приключения*...;

(Д) ни одну из этих последовательностей встретить в правильно написанном тексте практически невозможно.

И.Б.Иткин

Задача 3

В «Разбойничьей сказке» Карела Чапека (перевод Бориса Заходера) старая бабка ругает напавшего на повозку разбойника:

– *Ах ты антихрист, ах ты бандит, безбожник, безобразник, башибузук, ворюга, взломщик, висельник, ах ты...*

Какое слово было следующим?

(А) *хулиган*; (Б) *грешник*; (В) *негодник*; (Г) *супостат*; (Д) *дурень*.

С.И.Переверзева

Задача 4

В Костромской губернии его называли *тропинник*, в Вятской губернии – *путник*. О чём идёт речь?

(А) о лекарственном растении; (Б) о жалящем насекомом; (В) о фольклорном жанре; (Г) о хлебобулочном изделии; (Д) о прохладительном напитке.

М.М.Руссо

Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 6)

26. *Можно ли умножить число* 101001000100001 *на другое целое число так, чтобы среди цифр произведения не было нуля?*

Ответ: да, можно умножить, например, на 11111.

Наше число состоит из единиц, между которыми идут «дырки» из нулей, причём в самой большой дырке – четыре нуля. Умножим наше число на 11111 в столбик, для этого надо будет сложить пять чисел: само число, оно же, сдвинутое на разряд, и так далее. Сдвигая число на разряд, мы будем «закрывать» дырки, и закроем их все, так как сдвигов будет как раз четыре. И при сложении пяти чисел, состоящих из 0 и 1, не произойдёт «перескока» через разряд, то есть новые нули не появятся.

$$\begin{array}{r}
\times\ 101001000100001 \\
11111 \\
\hline
101001000100001 \\
101001000100001 \\
+\ 101001000100001 \\
101001000100001 \\
101001000100001 \\
\hline
1122222112111111111
\end{array}$$

Оказывается, можно добиться существенно большего – умножить наше число (да и вообще, любое число, не делящееся ни на 2, ни на 5) на другое так, что в итоге не просто нулей не будет, а получится число из одних единиц! Это непростая задача.

27. *Сто одинаковых шкатулок расположены в один ряд. В одной из шкатулок находится бриллиант. На каждой шкатулке сделана надпись: «Бриллиант лежит в соседней шкатулке (слева или справа)». Известно, что ровно одна надпись из ста правдивая, а все остальные – ложь. Разрешается открыть ровно одну из шкатулок. Можно ли открыть такую шкатулку, чтобы после этого точно узнать, где лежит бриллиант?*

Ответ: да, достаточно открыть крайнюю шкатулку.

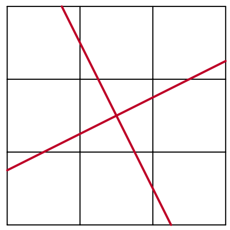
Если шкатулка с бриллиантом лежит не с краю, то на двух соседних с ней шкатулках написано верное утверждение, что противоречит условию. Значит, бриллиант в одной из двух крайних шкатулок. Если открыть одну из них, то либо мы увидим в ней бриллиант, либо узнаем, что бриллиант в другой шкатулке.

28. а) *Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки доски* 3×3*? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)*

б) *Та же задача для доски* 4×4.

а) **Ответ:** достаточно двух прямых.

Две прямые на рисунке разрезают все клетки квадрата.



Чтобы доказать, что одной прямой недостаточно, покажем, что прямая не может разрезать больше 5 клеток.

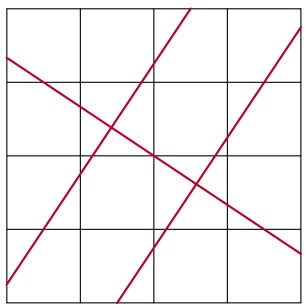
Наша доска 3×3 – это фактически клетчатая сетка, образованная четырьмя вертикальными и четырьмя горизонтальными линиями. Наша прямая, пересекаясь с этими линиями, разбивается на несколько отрезков. Концов у этих отрезков на один больше, чем самих отрезков. А всего концов не более шести: два конца лежат на границе доски, а внутри доски концов не более четырёх, потому что прямая пересекает не более двух внутренних вертикальных линий и не более двух внутренних горизонтальных.

б) **Ответ:** достаточно трёх прямых.

Аналогично пункту а) докажем, что прямая не может разрезать более 7 клеток. Прямая пересекает не более шести внутрених линий – три вертикальные и три горизонтальные, и ещё две крайние точки лежат на границе – всего получается не более восьми точек пересечения.

Значит, две прямые в сумме могут разрезать не больше 14 клеток, а всего клеток 16.

Пример трёх прямых, разрезающих все клетки квадрата, смотрите на рисунке.



29. *Петя, Коля и Вася решали задачи из задачника и решили вместе* 100 *задач, при этом каждый из них решил ровно* 60 *задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, лёгкой, а задачу, которую решил только один из ребят, – трудной. Каких задач было больше, лёгких или трудных, и на сколько?*

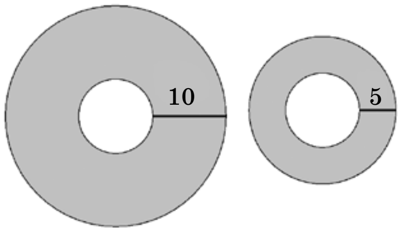
Ответ: трудных на 20 больше, чем лёгких.

Пусть было x лёгких задач, z трудных задач и y остальных («средних») задач. Всего задач 100, поэтому $x+y+z=100$.

Каждый из ребят решил по 60 задач, значит, всего решений 180. Ребята написали по 3 решения для каждой лёгкой задачи, по одному решению для каждой трудной и по два решения для каждой средней, поэтому $3x+2y+z=180$.

Домножая первое равенство на два и вычитая из него второе, получаем $z-x=20$.

30. *Тётя Маша купила рулон обоев радиуса* 15 *см на катушке радиуса* 5 *см (то есть толщина обоев на катушке равнялась* 10 *см). Она оклеила обоями половину стен в комнате, и толщина обоев стала равна* 5 *см (то есть рулон стал радиуса* 10 *см). «Ну что же, израсходовано полрулона, как раз хватит на вторую половину», – подумала тётя Маша. На какую часть стены на самом деле хватит ей оставшейся части рулона?*



Ответ: хватит лишь на 0,3 комнаты.

Длина рулона обоев – это примерно площадь поперечного сечения рулона, делённая на толщину обоев. Поэтому, чтобы узнать, какую часть рулона мы истратили, посчитаем, во сколько раз уменьшилась площадь поперечного сечения.

Сечение рулона – это кольцо, поэтому его площадь – это разность площадей кругов, ограниченных внешней и внутренней окружностями (напомним, что площадь круга радиуса r равна $\pi\cdot r^2$).

Площадь оставшегося рулона: $\pi\cdot(5+5)^2-\pi\cdot5^2=\pi\cdot100-\pi\cdot25=\pi\cdot75$. Первоначальная площадь: $\pi\cdot(5+10)^2-\pi\cdot5^2=\pi\cdot225-\pi\cdot25=\pi\cdot200$.

Получается, что у тёти Маши осталось лишь $\frac{75}{200}=\frac{3}{8}$ рулона. На половину комнаты ушло $\frac{5}{8}$ рулона. Значит, оставшегося хватит на $0{,}5\cdot\frac{3}{8}:\frac{5}{8}=0{,}3$ комнаты.

ЗЕРКАЛОЖКА («Квантик» № 7)

1. Мы уже знаем, что в вогнутом зеркале ложки мы увидим свои ноги сверху, а голову снизу. По тем же причинам справа мы в отражении увидим своё левое ухо (а слева – правое).

2. В продольном направлении поверхность ложки закругляется более плавно, чем в поперечном. Если вести взглядом вдоль ложки, поверхность, в которую будет упираться взгляд, а значит и отражение в ней, будет поворачиваться медленнее, чем если сдвигать взгляд поперёк ложки. Поэтому отражение, например, лица окажется вытянутым вдоль ложки: чтобы выйти за его пределы, вдоль ложки нужно сдвинуть взгляд на большее расстояние, чем поперёк неё.

3. Отражение в ложке кажется уменьшенным по тем же причинам, почему оно вытянуто вдоль ложки. Как мы раньше отметили, чем больше наклонена плоскость зеркала к лучу нашего взгляда, тем дальше от наших глаз будет то, что мы увидим в отражении. Поверхность ложки как бы состоит из множества маленьких плоских зеркал. Когда мы ведём взглядом по поверхности ложки, наклон этих зеркал сильно меняется – на десятки градусов на протяжении пары сантиметров. Это значительно быстрее, чем если бы мы вели взглядом по плоскому зеркалу. Поэтому мы успеваем увидеть большую часть отражения, незначительно сдвигая взгляд. Это и означает, что отражение кажется нам маленьким.

Добавим, что наши рассуждения правильные, только если мы не совсем близко от ложки. В этом случае можно пренебречь поворотом взгляда по сравнению с поворотом маленьких зеркал, чем мы и пользовались. Если же смотреть на ложку впритык, то можно увидеть даже увеличенное отражение глаза.

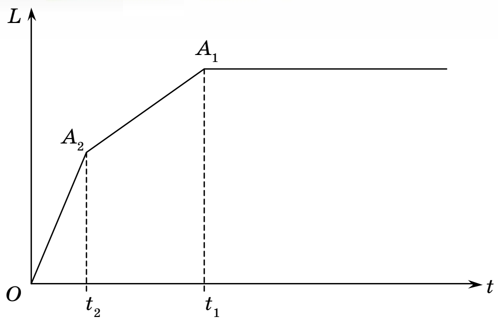
ДВЕ РАКЕТЫ («Квантик» № 7)

Поскольку ракеты летят строго навстречу, то есть по прямой, да ещё и с постоянными скоростями, то за каждую минуту расстояние между ними убывает на одну и ту же величину, численно равную сумме величин их скоростей, выраженных в км/мин. А что у нас? За последнюю минуту перед столкновением ракеты «покрыли», очевидно, остаток расстояния между ними, то есть 27 км, в течение 2-й минуты перед столкновением расстояние между ними уменьшилось на $45-27=18$ км, в течение 3-й минуты – на $57-45=12$ км, в течение 4-й – на $65-57=8$ км. Что-то несуразное: расстояния, которые должны быть одинаковы, становятся всё меньше. Мы вынуждены признать, что условие противоречиво, и потому решения просто нет. Однако... оно есть!

Подумаем: всегда ли за минуту расстояние между ракетами сокращается на одну и ту же величину? Например, ещё до старта оно вообще неизменно!

В самом деле – расстояние между ракетами не обязательно равномерно уменьшается со скоростью, равной сумме скоростей ракет. Такое справедливо, только если *обе* ракеты уже в полёте. Если же ракеты ещё не стартовали или в полёте лишь одна – то совсем другое дело! А ведь в условии ничего не сказано об одновременном старте. Вот тебе и раз – вместо жёстких рамок получаем бездну возможностей! Впрочем, не совсем бездну – вариантов не так уж много.

Для удобства анализа «обратим время вспять», то есть за начало отсчета примем момент столкновения ракет. Тогда если предположить, что первая ракета стартовала за t_1 минут до столкновения, а вторая – за t_2 минут до столкновения (для определенности $t_1>t_2$), то график зависимости расстояния L между ракетами от времени t, оставшегося до встречи, выглядит так:



Как видим, он представляет собой ломаную линию, проходящую через начало координат O (точку встречи), причем первая её часть OA_2 (самая крутая) соответствует полёту двух ракет, вторая часть A_2A_1 (более пологая) – полёту одной ракеты, и третья, правее точки A_1 (горизонтальная) – нахождению обеих ракет на стартовых площадках.

Чем мы располагаем для того, чтобы восстановить весь график? Данными в условии координатами четырёх точек: (1,27), (2,45), (3,57) и (4,65), да ещё началом координат (0,0), через которое ломаная просто обязана пройти. Несложно проверить, что эти точки могут располагаться на графике только так: точка (1,27) лежит на отрезке OA_2, точки (2,45) и (3,57) – на отрезке A_2A_1, а точка (4,65) – на горизонтальной линии правее A_1, и ломаная восстанавливается единственным образом. Точка, соответствующая моменту времени за 5 минут до столкновения, лежит на той же горизонтали, что и точка (4,65), только правее, вследствие чего расстояние между ракетами в этот момент такое же, как и за 4 минуты до столкновения, то есть 65 км.

Для особо любопытных сообщаем основные параметры графика (их легко получить, например, составив уравнения прямых): $t_1 = 11/3 \approx 3{,}67$мин, t_2=1,4 мин, а ордината точки A_2 составляет 37,8 км

ЧАСОВАЯ МЕДИАНА

Заметим такой факт: достаточно выбрать хотя бы одни часы, где неравенства для каждой стрелки – строгие. Тогда и сумма неравенств по всем часам окажется строгим неравенством для любой стрелки. Правда, для этого придётся отказаться от произвольного момента времени. Поэтому сначала выберем такое положение секундной стрелки на первых часах, чтобы она не лежала на прямой AM_1. Тогда получим, что сумма расстояний от центра стола до концов секундных стрелок будет больше расстояния от центра стола до центров циферблатов либо для выбранного положения секундной стрелки на первых часах, либо для противоположного ему. Выберем подходящее нам положение. Зафиксируем секундную стрелку, тогда для минутной стрелки на первых часах имеется 60 возможных положений на циферблате. Не более чем в двух из этих положений минутная стрелка лежит на прямой AM_1, выберем любое из оставшихся. Аналогично предыдущему, теперь мы можем добиться того, что сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок была больше, чем до центров циферблатов (возможно, заменив положение минутной стрелки на противоположное). Точно так же найдём и подходящее положение из 12 возможных для часовой стрелки. В результате на первых часах ни одна стрелка не лежит на AM_1, так что рассуждения мальчиков спасены!

УСКОРИТЕЛЬ РЕЗИНОВЫХ МЯЧИКОВ

Сделаем расчёт в общем случае. Пусть колонна из n мячей падает на пол, причём каждый мяч во много раз легче мячей, находящихся под ним. Пусть множитель для скоростей после удара равен k (упругому удару соответствует $k=1$).

Примем скорость падения мячей перед ударом за единицу. Будем на весь процесс смотреть, падая с этой скоростью. В момент отскока мы увидим, как на неподвижную колонну мелких мячиков налетает снизу пол. От него отскакивает нижний мяч колонны, который теперь будет играть роль пола. Потом от нижнего мяча отскакивает следующий, как от пола, и так далее до самого верхнего мяча.

Заметим, что от удара налетающего тяжёлого мяча (или пола) неподвижный лёгкий мяч улетает со скоростью, большей в $1+k$ раз (к скорости толкателя прибавляется скорость отскока мячика от него, меньшая в k раз). Применяя этот факт n раз, мы получаем, что мяч под номером n отлетит со скоростью $(k+1)^n$.

Переходя обратно в неподвижную систему, получаем, что n-й мячик отлетает со скоростью $(k+1)^n-1$.

В случае упругого удара $k=1$ и третий шар отлетит со скоростью $2^3-1=7$ и значит, поднимется на высоту в $7^2=49$ раз большую. Если же коэффициент восстановления скорости равен 0,8, скорость третьего мяча получится равной $1{,}8^3-1 \approx 4{,}8$, а высота – равной $(1{,}8^3-1)^2 \approx 23$.

АРХИМЕД, ЧАПЛИН, МОЦАРТ

История с Архимедом, конечно, выдумана. В те далёкие времена (две с лишним тысячи лет назад) ещё не было кранов с горячей водой. К тому же «эврика» – не имя, а греческое слово, означающее «нашёл». Именно это слово закричал Архимед, открыв свой настоящий закон (не такой, как здесь).

ФИГУРКА ИЗ ЛИСТА БУМАГИ

Повернём две горизонтальные части фигурки (рис. 1) относительно нижней стороны вертикального прямоугольника в разные стороны, как показано на рисунке 2. Мы получим прямоугольный лист бумаги (рис. 3). Чтобы обратно получить фигуру, нужно сделать три вертикальных разреза, как на рисунке 3, а затем повернуть части.

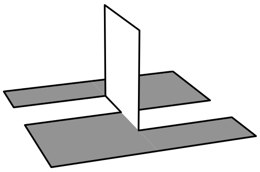


Рис. 1

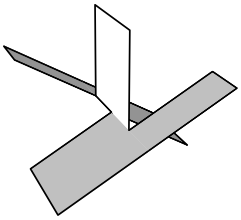


Рис. 2

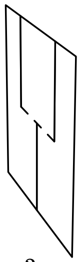


Рис. 3

СВЕТЯЩАЯСЯ ВОДА

Мы просили так расположить кружку, чтобы стенка над водой была практически вся в тени (свет лампы на неё не попадает). Однако под водой стена почему-то светлая. Кроме лампы освещать её может только свет от других частей кружки.На них падает свет лампы и отражается во все стороны (рассеивается). Если бы в кружке воды не было, то свет, рассеянный дном, осветил бы её стенки равномерно, без резких границ (рис. 1), а не как в нашем опыте, где под водой резко светлело.

Но в кружке с водой большая доля света, попав под воду, после отражения от дна не вылетает сразу на воздух, а отражается от воздуха обратно в воду (красные лучи на рисунке 2), и там становится светлее. В статье «Жидкое зеркало» («Квантик» №8 за 2013 год) мы разбирались с таким внутренним отражением.

Кроме того, на стенку начинает попадать немного света напрямую от лампы, преломлённого водой так, что он поворачивает к стене (зелёные лучи на рисунке 2).

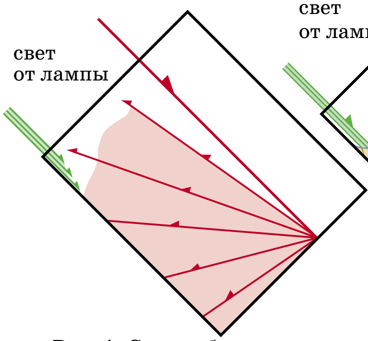


Рис. 1. Стакан без воды

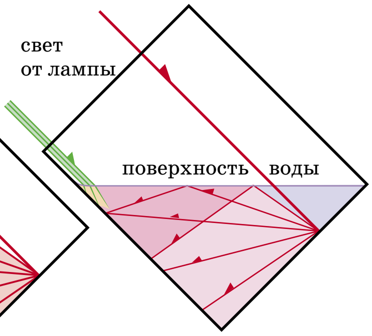


Рис. 2. Стакан с водой

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Глаголы *посадить* и *высадить* могут быть антонимами: автобус на остановке может *посадить* и *высадить пассажиров* – это два противоположных действия. Значит, утверждения (А) и (В) неверны. Глаголы *посадить* и *высадить* могут быть синонимами: можно *посадить маргаритки по краю клумбы* и *высадить маргаритки по краю клумбы* – в результате любого из этих действий клумба будет окаймлена маргаритками. Значит, утверждения (Б) и (Г) неверны. Верно лишь утверждение (Д): эти глаголы могут быть и синонимами, и антонимами. **Ответ:** (Д).

2. На первый взгляд кажется, что приведённые в задаче последовательности слов могут встретиться в русском тексте только в том малоправдоподобном случае, если в нём будет фигурировать персонаж по имени Приключение. Разумеется, заранее предугадать, после какого союза это имя будет встречаться чаще всего, никак нельзя, так что впору задуматься об ответе (Д).

Есть, однако, и другая возможность. По правилам, если название какого-либо произведения состоит из двух частей, разделённых союзом *или*, перед *или* ставится запятая, а вторая часть названия пишется с большой буквы, например: «Чёрная курица, или Подземные жители» (А. Погорельский). Самое известное произведение, удовлетворяющее условиям задачи, – это, конечно, сказка А. Н. Толстого «Золотой ключик, или Приключения Буратино». Вообще же произведений с двойным названием, вторая часть которого начинается со слова «Приключения...», очень и очень много. Вот некоторые из них: «Пелэм, или Приключения джентльмена» (Э. Бульвер-Литтон), «Путешествие по Южной Африке, или Приключения трёх русских и трёх англичан» (Ж. Верн), «Капитан Сатана, или Приключения Сирано де Бержерака» (Л. Галле), «Коралловый город, или Приключения Смешинки» (Е. Наумов), «Провинциальный детектив, или Приключения монахини Пелагии» (Б. Акунин).

Для союзов *а*, *и* и *но* никакого подобного правила указать нельзя. Таким образом, **ответ:** (В).

3. Бабка честила разбойника по алфавиту: сперва словами на букву *а*, потом – на букву *б*, потом – на букву *в*. Из перечисленных в ответах ругательств этому правилу больше всего соответствует *грешник*, поскольку это слово начинается со следующей после *в* буквы русского алфавита. **Ответ:** (Б).

Сюжет задачи навеян статьёй Б. Сарнова «Разбойник Мерзавио и редактор», опубликованной в сборнике «Редактор и книга» (М., 1962. Вып. 3). В этой статье рассказывается, как бдительный издательский редактор требовал от переводчика убрать из текста сказки все многочисленные ругательства, «кроме, может быть, двух-трёх самых безобидных». Мы, однако, нисколько не сомневаемся, что у читателей «Квантика» со здравым смыслом и чувством юмора всё в порядке.

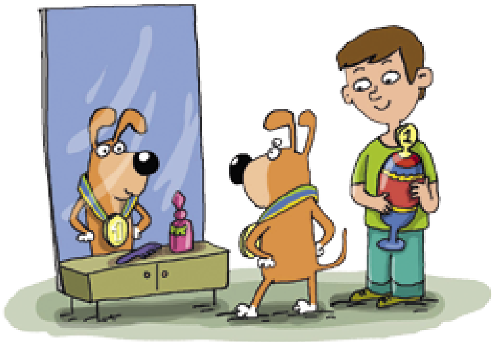
4. Так в этих говорах назывался подорожник. Во всех названиях отражена одна и та же особенность растения – оно растёт вдоль дорог, там, где ходят люди. А вот сами слова, обозначающие дорогу, использованы разные: *дорога*, *тропа*, *путь*. **Ответ:** (А).

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем **конкурсе**.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 сентября по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».



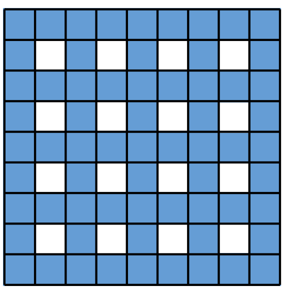
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги и диски.

Желаем успеха!

VIII ТУР

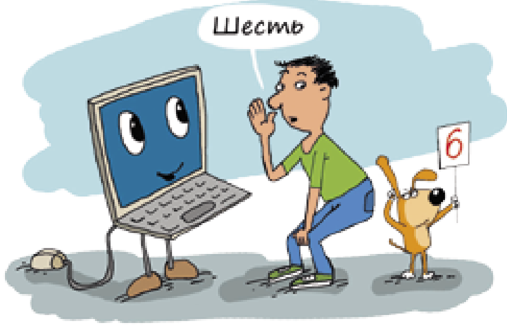
36. В поход пошли 10 человек, младше всех остальных был Гриша. Он нашёл сумму возрастов остальных участников похода и поделил на сумму возрастов всех десяти человек. Мог ли Гриша получить число меньше, чем 0,9?



37. Разрежьте нарисованную слева синюю клетчатую фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков из одной клетки.

Авторы задач: П. Кожевников (37), А. Толпыго, А. Шаповалов (38).

38. Квантик и Ноутик показывают такой фокус. Зритель задумывает любые два разных целых числа от 1 до 25 и сообщает их только Ноутику. После этого Ноутик называет Квантику какие-то другие два числа от 1 до 25 (отличные от задуманных), и Квантик тут же угадывает задуманные зрителем числа. Предложите способ, как могли бы действовать Квантик и Ноутик, чтобы фокус всегда удавался.



39. а) На одной из сторон прямоугольника выбрали любую точку и соединили с вершинами противоположной стороны. Получился треугольник (синий на рисунке 1). Докажите, что площадь этого треугольника равна половине площади прямоугольника.

б) На рисунке 2 изображены два прямоугольника – один нарисован синим карандашом, а другой – красным. Докажите, что площади этих прямоугольников равны.

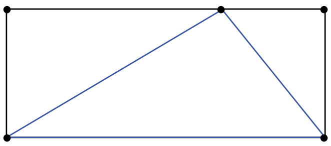


Рис.1

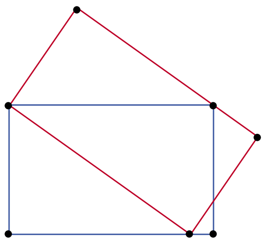


Рис.2

40. Пока Лиза и Вова, стоя на эскалаторе метро, поднялись наверх, их неутомимый друг Квантик на спор успел подняться, спуститься и снова подняться по этому же (едущему вверх) эскалатору. Бежал Квантик всё время с одной и той же скоростью. Во сколько раз эта скорость больше скорости эскалатора?

Художник Николай Крутиков

ДОМИНОШКА И НЕБОСКРЁБ

Известное развлечение – поставив доминошки в ряд и толкнув крайнюю, запустить «эффект домино»: каждая доминошка роняет следующую, и по их ряду бежит волна опрокидывания.

Представьте, что у вас есть доминошки любых размеров.

Сколько доминошек потребуется, чтобы, начав с доминошки обычного размера, по цепочке уронить доминошку размером с небоскрёб?

Решить с нуля эту задачу сложно. Вот подсказка: если правую доминошку перед Квантиком на рисунке внизу уронить на левую, то левая доминошка опрокинется. Зная это, прикиньте, сколько звеньев цепочки в задаче точно хватит: достаточно ли тысячи доминошек? А может, хватит сотни, или нужен миллион?..

Художник Tory Polska