ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1 | январь 2016

Издаётся при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

№1
январь
2016

ТЕЛЕСКОП АРЕСИБО

КРУГ И ПРЯМЫЕ УГЛЫ

ВЕЛОЗАДАЧИ

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Оформить подписку на «Квантик» вы можете в отделениях связи Почты России или через интернет.

Подписаться со следующего месяца можно до 10 числа текущего месяца.

Подписка на почте:

КАТАЛОГ **«ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»** (индекс **84252**)

КАТАЛОГ **РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ «ПОЧТА РОССИИ»** (индекс **11346**)

Подписка на сайте vipishi.ru:

КАТАЛОГ **«ПОЧТА РОССИИ»** (индекс **11346**)

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.de**

Подписка на электронную версию журнала по ссылке: **http://pressa.ru/magazines/kvantik#/**

Подробнее обо всех видах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**

Редакция «Квантика» выпустила новый комплект плакатов.

В комплекте 10 плакатов с занимательными задачами для школьных кабинетов математики и физики.

Кроме журнала, «Квантик» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок. Подробнее о продукции «Квантика» и о том, как её купить, читайте на нашем сайте **kvantik.com**

Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик»

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12
facebook.com/kvantik12

6+

ISSN 2227-7986

Главный редактор: Сергей Дориченко
Редакция: Виктор Дрёмов, Дарья Кожемякина, Елена Котко, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Верстка: Рафида Шагеева, Ира Гумерова
Обложка: художник Анна Горлач
Формат 84х108/16.
Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 5000 экз.
Адрес издателя: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел.: (499) 241-08-04.
e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (495) 745-80-31;
e-mail: biblio@mccme.ru

Подписаться можно в отделениях связи Почты России или на сайте **vipishi.ru**

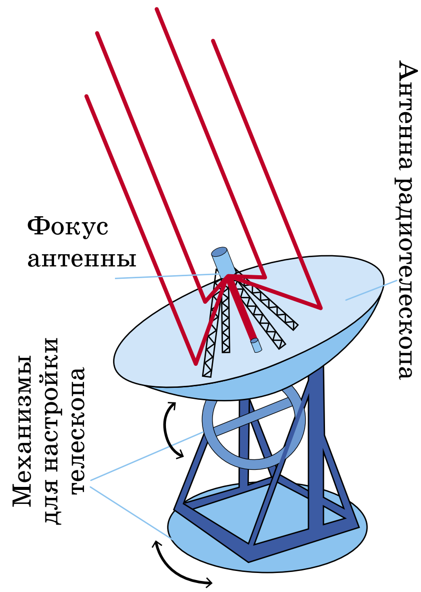
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Рожковская

ТЕЛЕСКОП АРЕСИБО

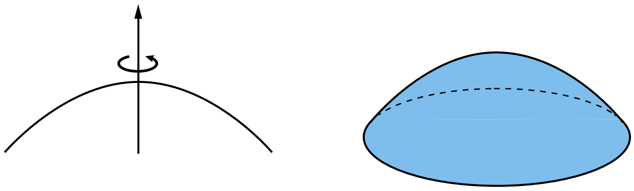
Иногда в тихую ясную ночь мы выходим посмотреть на небо. Мы даже можем взять с собой бинокль или телескоп, чтобы лучше разглядеть далёкие планеты и звёзды. Однако каким бы великолепным ни было наше зрение и какими бы сильными оптическими приборами мы ни вооружились, мы не сможем заметить всё, что звёзды и планеты хотят нам рассказать о себе. Ведь когда мы смотрим на небо невооружённым глазом или через обыкновенный телескоп, мы видим звёзды и планеты потому, что они излучают или отражают свет. Однако кроме видимого света многие объекты во вселенной испускают излучения, которые наши глаза не приспособлены воспринимать и различать. Но если воспользоваться специальными приборами, можно поймать эти невидимые волны и узнать много нового о далёких космических объектах.

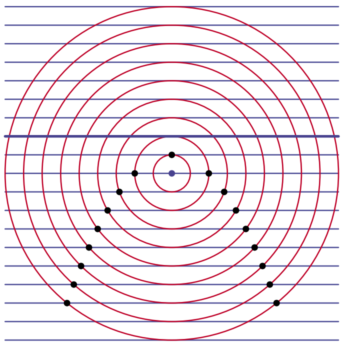


Один из таких чудесных приборов – это радиотелескоп, удивительное изобретение человечества. Если видимый свет состоит из волн длиной 380–780 нанометров, то с помощью радиотелескопов астрономы фиксируют волны длиной от долей миллиметров до нескольких десятков метров.

Самая впечатляющая часть любого радиотелескопа – это его антенна, похожая на огромную круглую тарелку. Антенна – это «радиозеркало», её предназначение заключается именно в том, чтобы отражать невидимые нам радиоволны, точно так же, как обычное зеркало отражает свет.

Большинство радиотелескопов имеют антенны параболической формы: поверхность такой антенны образована вращением кривой, называемой параболой (см. рисунок).





Саму параболу можно определить как геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой и от заданной точки, называемой фокусом параболы.* Например, на рисунке справа чёрные точки лежат на некоторой параболе.

Параболическая антенна обладает удивительным геометрическим свойством. В астрономических наблюдениях изучаются столь отдалённые объекты, что лучи, приходящие к нам от одного объекта, например звезды, можно считать параллельными друг другу. Параболическое зеркало собирает лучи, параллельные его оси вращения, в одной точке – в фокусе, – тем самым усиливая сигнал, приходящий с этого направления. Собранные сигналы передаются на радиометр – этот прибор преобразует их в удобную для обработки форму. Чтобы сфокусировать радиотелескоп на другой звезде, нужно направить ось телескопа в направлении этой звезды. Поэтому многие радиотелескопы обладают специальным механизмом, поворачивающим антенну в разные стороны.

Кроме описанных выше «стандартных», существуют особенные радиотелескопы с удивительными возможностями исследований космоса. Некоторые из них, безусловно, заслуживают звания чуда инженерного искусства.

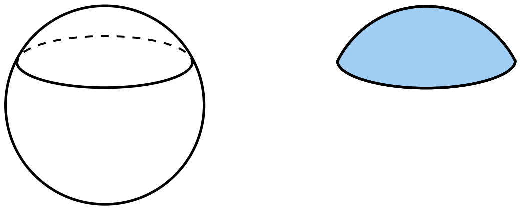
Большинство исследований радиообсерватории Аресибо в Пуэрто-Рико проводится на огромном сферическом телескопе с диаметром антенны 305 метров! Издали этот удивительный инструмент напоминает огромную чашу, вкопанную в вершину высокого холма.

* Подробнее о параболе читайте в статье Дарьи Русаковой «Парабола из листа бумаги» в «Квантике» № 12 за 2015 год.

Чаша – это и есть антенна телескопа. Она состоит из 38 778 алюминиевых решётчатых панелей, отражающих радиоволны нужной длины, но пропускающих воду и свет: растения, приспособившиеся жить под телескопом, сохраняют почву от эрозии.

Район Аресибо был выбран для постройки такого телескопа не случайно. Здесь вода, стекая по карстовым холмам, образовала множество гигантских воронок, одну из которых и использовали как основание для огромной антенны радиотелескопа. Удалённость обсерватории от населённых пунктов позволяет уменьшить досадные радиопомехи (и между прочим, на территории обсерватории запрещено пользоваться сотовыми телефонами), а близость к экватору позволяет исследовать с помощью этого телескопа интересный участок космоса.

Форма антенны телескопа Аресибо тоже необычна. Сама антенна слишком большая и поэтому неподвижна: её нельзя направить в ту или в другую сторону. Параболическая антенна в этом случае имела бы существенный недостаток: она бы собирала в фокусе волны, приходящие исключительно из одного направления. Поэтому поверхность антенны телескопа Аресибо – это часть огромной сферы.



Конечно, поверхность сферы не собирает лучи в точечный фокус, однако, к счастью, небольшую область сферы трудно отличить от небольшой области параболической поверхности. Поэтому лучи, отражённые с достаточно маленького кусочка сферы, сойдутся если не в точке, то в достаточно маленькой области.

Вдоль краёв антенны установлены три высоких столба (см. фото вверху с. 4). Между ними растянуты 18 стальных тросов, удерживающих над антенной на высоте 137 метров треугольную платформу. От трёх вершин платформы вниз, к огромным бетонным блокам под антенной, тянутся три пары тросов.

С их помощью высота каждого угла платформы может быть отрегулирована с точностью до 1 мм. Под треугольной рамой платформы расположена конструкция, напоминающая арку моста. Эта конструкция может поворачиваться по кругу, а вдоль арки передвигается необычный купол (см. фото слева) с двумя дополнительными радиозеркалами внутри. Эти радиозеркала перена-

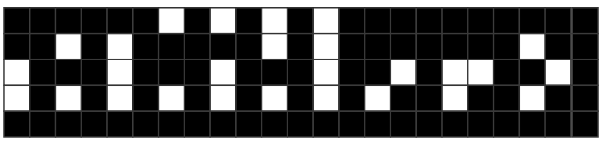
Художник Анна Горлач

правляют сигнал с основного зеркала на специальные антенны.

За пятьдесят лет с помощью обсерватории Аресибо удалось узнать много нового о космосе и верхних слоях атмосферы. Буквально через несколько месяцев после начала работы радиотелескопа было установлено, что Меркурий вовсе не повёрнут к Солнцу все время одной стороной, как считалось раньше, и совершает один оборот вокруг своей оси не за 88 земных суток, а всего лишь за 59.

Одним из самых значительных достижений обсерватории стало открытие в 1974 году нового объекта во вселенной – радиопульсара, входящего в состав двойной звёздной системы. Это открытие было удостоено в 1993 году Нобелевской премии по физике, потому что двойные пульсары позволяют экспериментально проверить теории из других областей физики.

За долгую научную жизнь телескоп использовался не только для серьёзных научных исследований, но и для совершенно неожиданных заданий. Фантастический вид чаши телескопа не раз привлекал режиссёров кинофильмов. Например, здесь однажды снимали фильм про приключения секретного агента 007 Джеймса Бонда. А в 1974 году телескоп отправил в направлении звёздного скопления M13 символическое послание внеземным цивилизациям, закодированное последовательностью нулей и единиц. Вот так выглядело начало послания, если вместо нулей поставить чёрные, а вместо единиц – белые квадратики:



Смогли бы вы как представитель нашей цивилизации понять, что написано в этих строчках?

Вероятно, очень скоро телескоп Аресибо перестанет быть самым большим радиотелескопом в мире. В Китае в провинции Гуйчжоу в 2016 году будет завершена постройка нового чуда – сферического телескопа с диаметром антенны 500 метров. Какие открытия принесёт новый гигантский радиотелескоп? Ответ на этот вопрос мы узнаем уже через несколько лет.

Фотографии предоставлены Обсерваторией Аресибо и Национальным центром астрономии и ионосферы. Автор благодарит сотрудников обсерватории Рут Торрес Эрнандес и Фила Перилалата за помощь при подготовке материалов.

ВОТ ТЕБЕ И РАЗ!

Игорь Акулич

> ...за ним судья с растопыренными руками, присевший почти до земли и сделавший движенье губами, как бы хотел посвистать или произнесть: «Вот тебе, бабушка, и Юрьев день!»
>
> *Н. В. Гоголь. «Ревизор».*

Учась ещё в шестом или седьмом классе, я случайно познакомился с теоремой, которая формулировалась очень просто: *сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше* 2 (причём равенство достигается, только если одно из слагаемых равно 1; тогда и второе равно 1). В виде формулы она записывается так:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

Согласитесь – красиво!

Удалось мне ознакомиться и с двумя доказательствами.

Первое было таково. Пусть x – некоторое положительное число. Стартуем от очевидного неравенства:

$$(x-1)^2\geqslant 0$$

(причём равенство будет только при $x=1$, а при других x – строгое неравенство!). Раскроем скобки:

$$x^2-2x+1\geqslant 0.$$

Перенесём $2x$ в правую часть с обратным знаком:

$$x^2+1\geqslant 2x.$$

Наконец, поделим обе части на *положительное* число x (при этом знак неравенства не меняется!) и получим:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2,$$

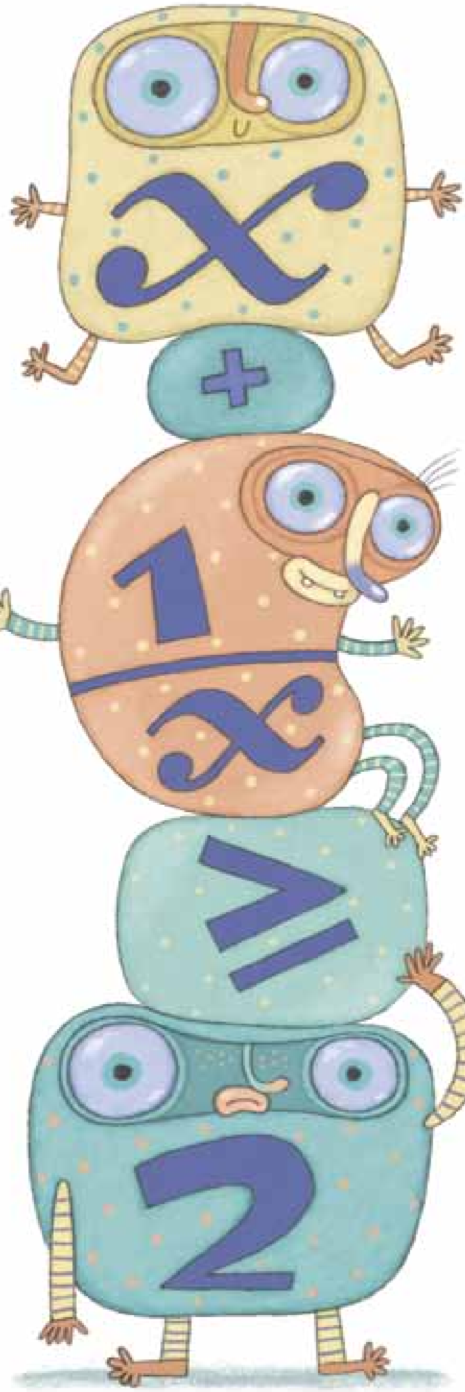
что и требовалось доказать.

Другое доказательство покороче. Преобразуем сумму двух взаимно обратных положительных чисел следующим образом:

$$x+\frac{1}{x}=2+\left(x-2+\frac{1}{x}\right).$$

А теперь заметим, что выражение в скобках равно $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$, то есть заведомо неотрицательному числу (причём оно равно нулю только при $x=1$). Поэтому сумма $x+\frac{1}{x}$ *не меньше* 2, что и требовалось доказать.

Что ж, доказательства вполне понятные и достаточно компактные, но, если вдуматься, представляют собой, по сути, *подгонку* под заранее известный ответ.



И просто так, «с нуля», до них не додумаешься. Поэтому знание такой эффектной теоремы позволяло мне смотреть на соучеников несколько свысока (мысленно, конечно): дескать, я-то *такое* знаю, чего вам самим ни за что не постигнуть!

И вот однажды, чтобы лишний раз утвердиться в своём превосходстве, я предложил однокласснику задачу, найденную в какой-то книге и основанную именно на доказанном неравенстве:

У продавца имеются неравноплечие весы и килограммовая гиря. Покупатель попросил взвесить ему 2 килограмма сахара. Продавец на это сказал:

– Так как весы неравноплечие, я сначала поставлю гирю на одну чашку весов, а на вторую буду досыпать сахар, пока не наступит равновесие. Потом поставлю гирю на вторую чашку весов, а на первой уравновешу её сахаром. В одном случае получится недовес, в другом – перевес (или наоборот), а в сумме должны получиться те самые 2 килограмма.

Спрашивается: действительно ли при таком способе покупатель получит ровно 2 килограмма? А может быть, меньше? А может, больше? Собственным весом чашек и рычагов пренебречь.

«Ну, сейчас ты осрамишься!» – предвкушая удовольствие, думал я, поскольку знал, что неравенство, связанное с суммой двух взаимно обратных чисел, однокласснику незнакомо. А ведь задача, как легко видеть, именно об этом! В самом деле, если одно плечо весов в x раз длиннее другого, то при установке гири на чашку, расположенную на длинном плече, она будет уравновешена x килограммами сахара, а при другом, «обратном» взвешивании – $\frac{1}{x}$ килограммами. Итого покупателю достанется $x+\frac{1}{x}$ килограммов, что, конечно (уж я-то знаю!), больше 2 при любом x.

Тем временем мой одноклассник, не подозревая о своей незавидной участи, начал монотонно и уныло рассуждать:

– Пусть одно плечо весов равно L, а второе на a больше, то есть равно $L+a$. Тогда если гирю положить на чашку у короткого плеча, то по правилу рычага на второй чашке будет при равновесии находиться $\frac{L}{L+a}$ килограммов сахара. А если гирю положить на чашку у длинного плеча, то сахара получится $\frac{L+a}{L}$ килограммов. Итого в сумме получаем...

«Ишь, наворотил! – внутренне злорадствовал я. – Вот уж закопаешься!». Он же продолжал:

– ...в сумме получаем $\frac{L}{L+a}+\frac{L+a}{L}$. Что здесь делать? Наверно, придётся приводить к общему знаменателю:

$$\frac{L}{L+a}+\frac{L+a}{L}=\frac{L^2+(L+a)^2}{(L+a)L}=\frac{L^2+L^2+2aL+a^2}{L^2+aL}=\frac{2(L^2+aL)+a^2}{L^2+aL}=$$
$$=2+\frac{a^2}{L^2+aL}.$$

Это выражение явно больше 2. Оно может равняться 2, только если $a=0$, но такого не будет, потому что весы неравноплечие. Значит, покупатель получит *больше* двух килограммов сахара. Всё!

В ответ я смог только открыть рот и вытаращить глаза. Ещё бы, потерпеть такое фиаско! Ведь фактически, вопреки моим надеждам, он не только доказал неравенство с суммой взаимно обратных чисел, но и сделал это «в лоб», напрямую, заранее не зная ответа. А я, как ни крути, с треском провалился.

Долго меня грызла досада, но постепенно всё-таки перестала. Потому что в настоящее время этот бывший одноклассник – крупный учёный, специалист в области физики элементарных частиц и астрофизики, член-корреспондент РАН Игорь Иванович Ткачёв. Такому и проиграть не зазорно!

А может, читатель предложит своё доказательство неравенства, не похожее ни на что изложенное? Так сказать, *принципиально* иное? Попробуйте! И сообщите.

Художник Елена Цветаева

ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ

Александр Бердников

Велозадачи

1. В каком положении спица тележного колеса нагружена больше: когда она находится сверху или когда снизу?

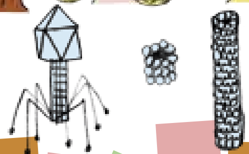
2. Почему не сгибаются под тяжестью велосипедиста тонкие велосипедные спицы? Опирается ли на них ось? В каком положении спица колеса велосипеда нагружена больше: когда она находится сверху или снизу?

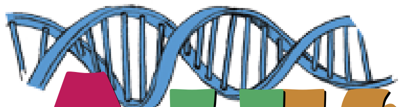
3. Зачем спицы велосипеда крепятся на два диска по бокам оси, а не на один, по центру оси?

4. Почему спицы велосипедного колеса обычно направлены не прямо к оси, по радиусам (как в колесе телеги), а наискосок?

Художник Максим Калякин

Фируза Мамедова,
Ксения Федосова





КОНСТРУКЦИИ ИЗ ДНК

Наверняка вы слышали про нанотехнологии. А знаете ли вы, что означает «*нано*»? Приставка «*нано-*» образовалась от древнегреческого слова «νᾶνος», которое переводится как «*карлик*». Она указывает, что объект имеет размер порядка стотысячной доли миллиметра. Не во всякий микроскоп его разглядишь. Уж тем более сложно сконструировать из столь малых объектов что-то полезное. А что если заставить эти объекты собираться самостоятельно? Оказывается, для этого существует подходящий наноматериал, который давно известен из биологии.

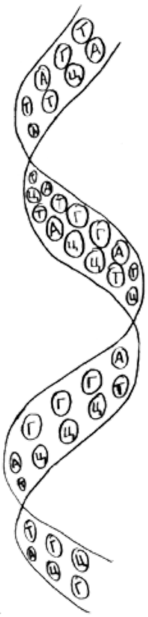
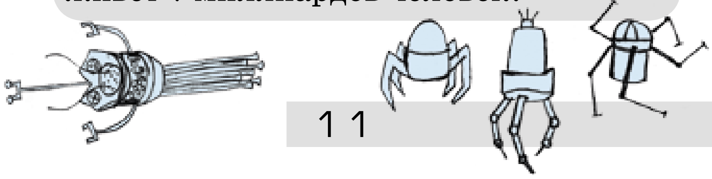


Рис. 1

В каждой клетке нашего тела есть особая молекула – ДНК. Её полное название – *дезоксирибонуклеиновая кислота*. В ней содержится вся информация о нашем теле. В ДНК зашифровано, например, будут ли наши глаза серыми или голубыми, рост – высоким или низким, волосы – курчавыми или прямыми. У каждого человека своя уникальная молекула ДНК, по которой его можно отличить от других людей. Более того, своей собственной молекулой ДНК обладает каждый живой организм, например, пингвин или картошка.

Внешним видом ДНК похожа на закрученную спираль (рис. 1), состоящую из двух нитей. На этих нитях записана информация в виде последовательности из специальных блоков – *нуклеотидов*. В молекуле ДНК бывает всего 4 вида этих блоков: *аденин*, *тимин*, *цитозин* и *гуанин*. Их обозначают буквами А, Т, Ц и Г. Нити в ДНК слипаются друг с другом за счёт притяжения нуклеотидов, сидящих на них. Более того, блоки склеиваются друг с другом по определённым правилам: аденин может связываться только с тимином, а цитозин – только с гуанином. Говорят, что аденин *комплементарен* тимину, а цитозин – гуанину. Таким образом, если мы знаем, что одна нить связана со второй, то с уверенностью можем сказать, что напротив аденина сидит тимин, напротив гуанина — цитозин и так далее. То есть по одной цепи молекулы ДНК мы можем однозначно восстановить вторую!

Задача. Оцените минимальное количество нуклеотидов на нити ДНК человека, зная, что у каждого человека ДНК индивидуальна и что на Земле живёт 7 миллиардов человек.



ШПИЛЬКА

Если на нити ДНК будут «сидеть» две комплементарные последовательности нуклеотидов, она может изогнуться и склеиться сама с собой, образовав «шпильку» (рис. 2).

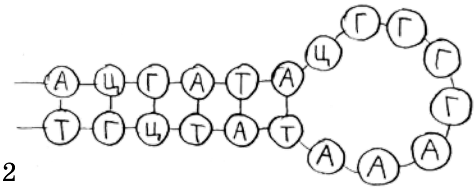


Рис. 2

Это значит, что комплементарность можно использовать как клей, который склеивает наши нити во что-то интересное. Можно даже создавать из ДНК самостоятельно собирающиеся трёхмерные структуры. Один из примеров мы сейчас разберём.

РЕШЁТКА ИЗ ЕЖЕЙ

Возьмём 7 нитей ДНК (рис. 3).

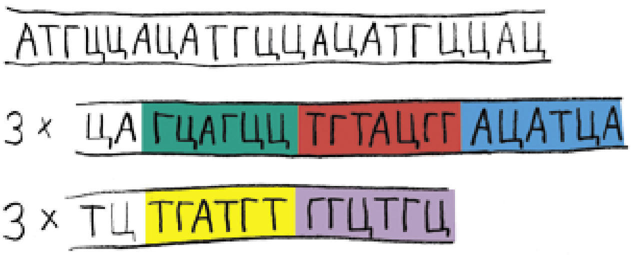


Рис. 3

Посмотрим внимательнее на первую нить. Заметим, что если мы передвинем два последних нуклеотида в начало нити, то мы получим последовательность, состоящую из трёх одинаковых блоков (рис. 4).

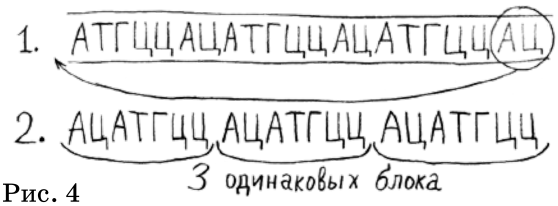


Рис. 4

Комплементарная последовательность к такому блоку есть в нитях второго вида (отмечена красным). Значит, если первую нить замкнуть в кольцо, то три нити второго вида могут к ней приклеиться (рис. 5).

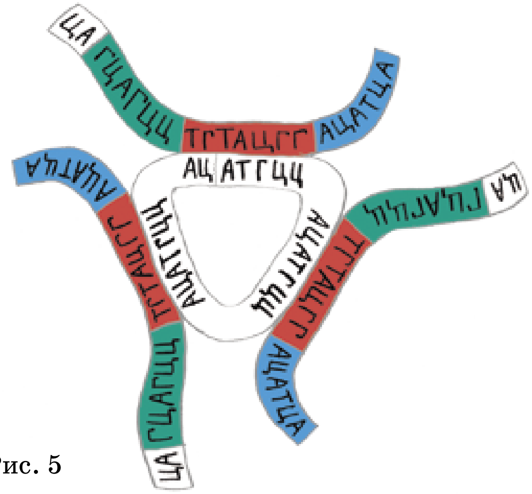


Рис. 5

К оставшимся свободным «хвостикам» могут приклеиться (правда, не целиком) нити третьего вида, посколь-

ку синие блоки комплементарны жёлтым, а зелёные – фиолетовым (рис. 6) .

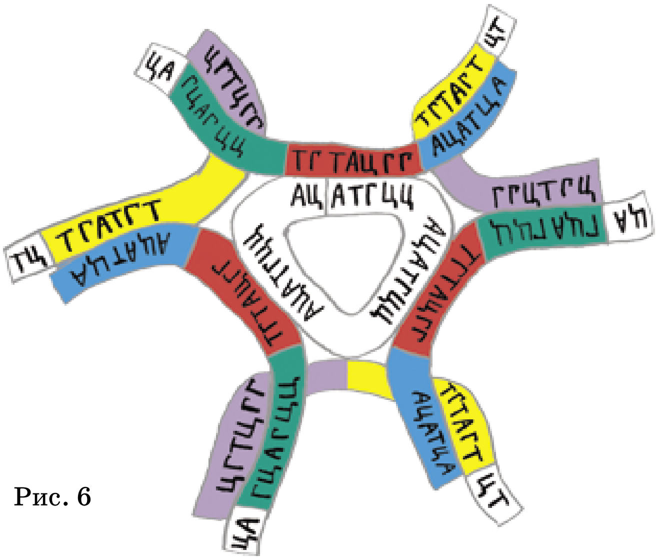


Рис. 6

Интересно понять, как склеенные нити будут ориентированы в пространстве. Оказывается, что все шесть «хвостиков» будут направлены перпендикулярно шести граням воображаемого куба, и мы получим «ежа» (рис.7).

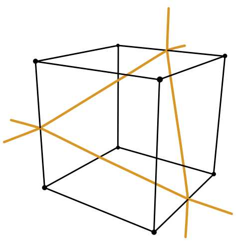


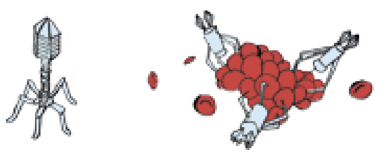
Рис. 7

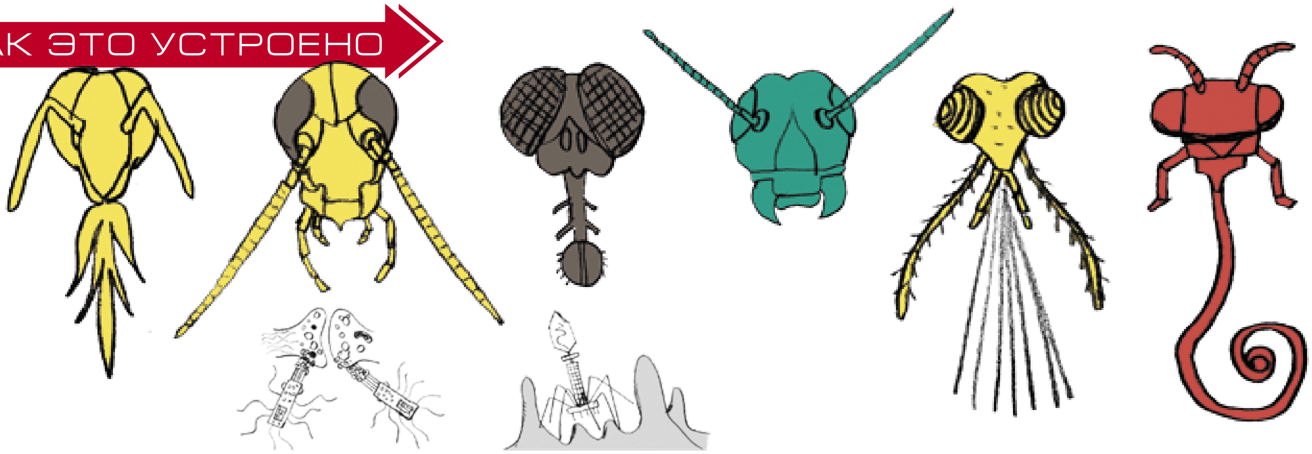
Заметим ещё одну интересную особенность: на каждом «хвостике» есть по два свободных нуклеотида ГА или ТЦ, которыми эти «ежи» будут цепляться друг к другу! То есть к каждому такому «ежу» может прицепиться ещё шесть «ежей», которые будут образовывать узлы кристаллической решётки. Таким образом, если мы выпустим в раствор большое количество нитей таких трёх видов в пропорции 1:3:3, то через некоторое время можем получить самостоятельно собравшийся кристалл из ДНК!

РОБОТ-ПУТЕШЕСТВЕННИК

Структуры из ДНК можно заставить не только самостоятельно собираться, но и даже двигаться! Правда, требуется небольшая помощь лаборанта. Один из первых таких нанороботов был создан чуть меньше 10 лет назад и представлял собой цепочку ДНК, путешествующую в растворе по заранее подготовленной поверхности. Двигался этот наноробот не вполне самостоятельно: для каждого его шага лаборантам необходимо было слегка изменить состав раствора. А как – мы сейчас расскажем.

В основе движения этой молекулы-робота лежит очень простая идея. Представим, что у нас есть нить из 10 нуклеотидов, например, АТГЦАТГЦТТ .





К ней мы добавим вторую нить из пяти нуклеотидов, комплементарную к кусочку первой: АЦГТА.

Вторая нить прикрепится к первой. Теперь запустим в раствор третью нить из 10 нуклеотидов, которая была бы полностью комплементарной первой нити. Что произойдёт в этом случае? Третья нить подходит к первой цепочке лучше, чем вторая, поэтому через какое-то время она вытеснит вторую и приклеится к первой (рис. 8).

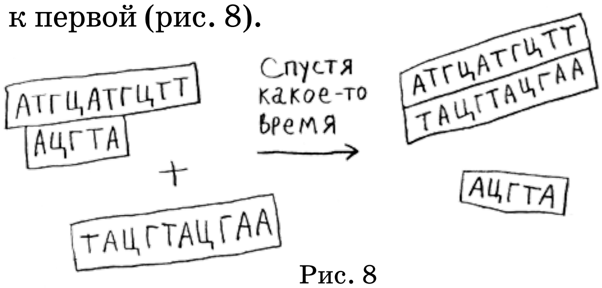


Рис. 8

Именно на этом принципе («скорее всего, соединятся наиболее подходящие нити») и работает наноробот. Сам наноробот состоит из двух склеенных последовательностей цепочек нуклеотидов:

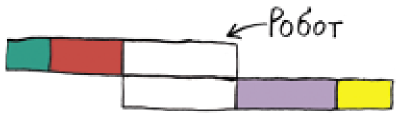


Рис. 9

Он будет ходить по подложке, на которой закреплены нити нуклеотидов на одинаковом расстоянии (рис. 10). Каждая закрепленная нить состоит из трёх блоков, причём второй и третий блоки зеркально-комплементарны друг к другу, а первый блок комплементарен одному из блоков робота (одинаковые блоки не отличаются штриховкой и одного цвета, а комплементарные блоки отличаются штриховкой и одного цвета): таким образом, каждая нить изогнута в «шпильку».

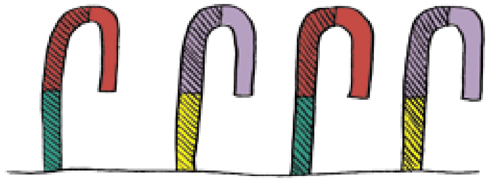
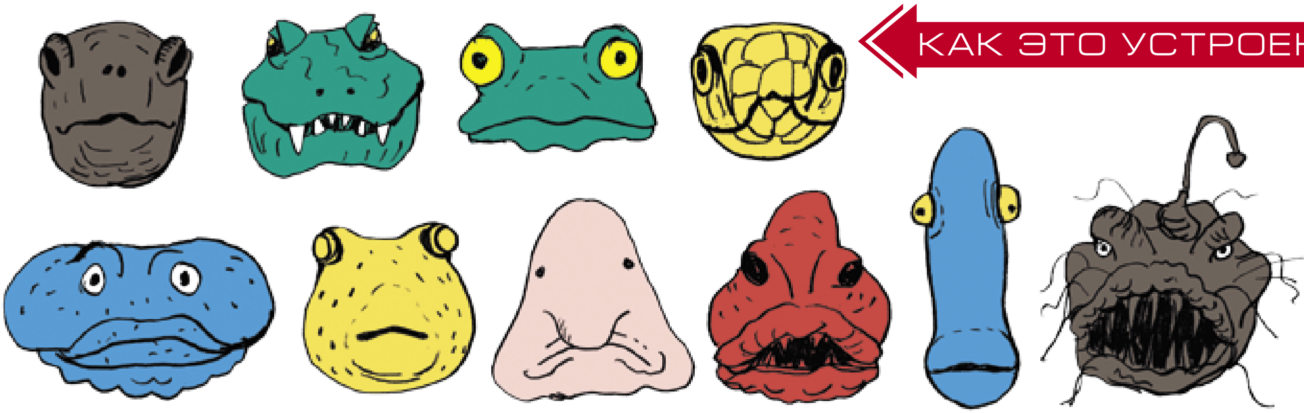


Рис. 10

Изначально робот стоит приклеенным между нитей 1 и 2 (рис. 11, а). Для того, чтобы он сделал первый шаг, выпустим в раствор молекулу, полностью комплементарную к первой нити. Она вытеснит часть наноробота, как показано на рисунке 11.



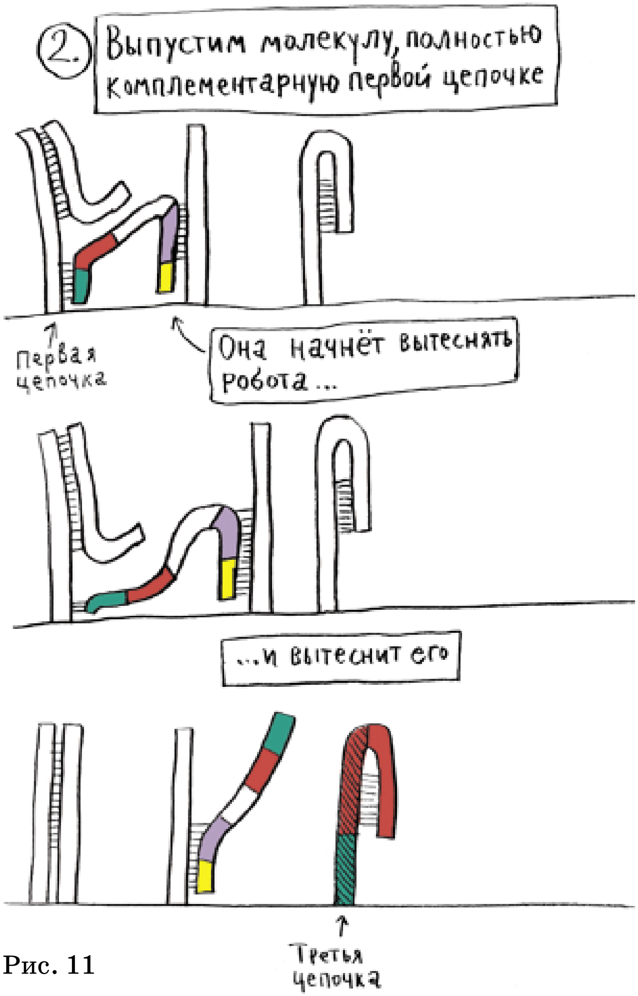


Рис. 11

Более того, эта внезапно отклеившаяся часть распрямит третью «шпильку» и приклеится к её части как более подходящая (рис. 12).

Теперь выпустим молекулу, полностью комплементарную ко второй

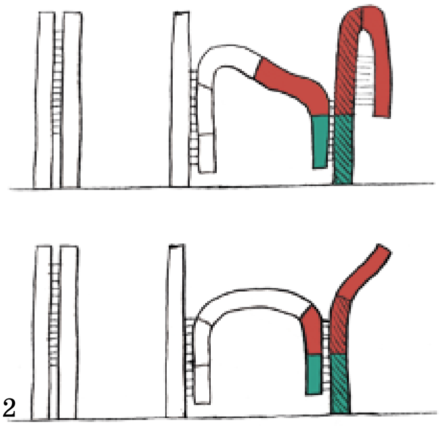


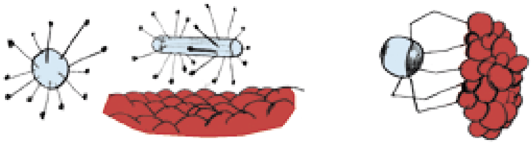
Рис. 12

нити. В результате часть нашего наноробота отклеится от второй нити и переклеится к четвёртой. Повторяя процедуру, можно заставить наноробота путешествовать по подложке!

Наш наноробот путешествовал «налегке», но существуют разработки, которые позволяют ему перетаскивать «грузы», например, молекулы золота.

Так можно собирать не только кристаллы и роботов-ходилок, но, например, коробочки, открывающиеся лишь при встрече с ключом – специальным фрагментом ДНК. Молекула, заранее припасённая внутри коробочки, не сможет ни с чем взаимодействовать, пока коробочка не откроется. В таких коробочках можно доставлять лекарства до целевых клеток и тканей человеческого организма без преждевременного высвобождения «посылки».

Художник Артём Костюкевич



ВЫПУСК 17 2/3 ПРАВ/ДЫ

Сергей Федин

МЕСТЬ СТАТУИ, ЧЕМПИОН ПОНЕВОЛЕ И НЕЧЕСТНЫЙ СУДЬЯ

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

МЕСТЬ СТАТУИ

В Древней Греции было много выдающихся атлетов. Один из самых известных – олимпийский чемпион, борец Феаген. Говорят, он победил больше тысячи соперников. Понятно, что многие из них ему завидовали, а некоторые даже ненавидели. Один из таких обиженных соперников не мог успокоиться и после того, как Феаген умер. Он часто приходил по ночам на стадион и хлестал бичом статую Феагена. Но однажды статуя упала и задавила насмерть обидчика. Тогда греки обвинили статую в убийстве и по решению суда утопили её в море.

Однако на следующий год случился неурожай, началась эпидемия, стали гибнуть люди. Напуганные жители обратились за советом к прорицательнице, и она сказала, что надо вернуть всех изгнанников. Власти разрешили всем изгнанным грекам вернуться на родину, но это не помогло.

Пришлось снова идти к прорицательнице. Она сказала только два слова: «Забыли Феагена». Люди тут же сетями вытащили статую Феагена из моря, и бедствия прекратились.

ЧЕМПИОН ПОНЕВОЛЕ

На Олимпийских играх всегда побеждали самые лучшие атлеты, но однажды чемпионом стал совершенно случайный человек. Случилось это на одной из первых олимпиад, за несколько веков до нашей эры.

Был дан старт соревнованиям бегунов, и стройные атлеты помчались к финишу. Однако через секунду после начала забега на поле выскочил какой-то невзрачный человечек, за которым неслась разъярённая женщина со сковородкой в мощной руке. В ужасе мчался несчастный вперёд, то и дело оглядываясь на рассвирепевшую жену. Через несколько мгновений он догнал и перегнал бегунов, но продолжал нестись дальше. Только на финише он остановился, заметив, что жена безнадёжно отстала. Перекрестившись, он в изнеможении рухнул на землю…

Посовещавшись, судьи единогласно именно ему присудили лавровый венок победителя.

НЕЧЕСТНЫЙ СУДЬЯ

Обычно Олимпийские игры проходили честно. Наверное, потому, что судьи перед соревнованиями клялись судить справедливо, да и атлетов за обман наказывали суровыми штрафами. Но всё же бывали и случаи жульничества.

Один борец должен был встретиться на олимпиаде с немым соперником, которого звали Эгмий. Думая, что немой никак не сможет на него пожаловаться, он заранее подкупил судью, чтобы тот судил в его пользу. Однако заметив нечестное судейство, Эгмий настолько разгневался, что впервые в жизни заговорил.

Художник Капыч

Константин Кохась

КАК БУСЕНЬКА УКРАШАЛА ТОРТ

Таракан Кузька сидел возле почти готового торта и, задумчиво шевеля усами, перебирал какие-то крошки.

– Тогда здесь мы положим четыре, а сюда нужно положить две. Нет, сюда нельзя две. Два у нас уже есть! Значит, этот вариант тоже отпадает.

Тут на кухню вошли Бусенька и Огрыза.

– Пора украшать! – сказала Огрыза, подходя к Кузьке. – Я привела тебе в помощники прекрасную художественную натуру, – кивнула она на Бусеньку. – Ты готов?

– Никак не получается. В третий раз уже расставил почти все числа, но последнее – снова повторяется.

– Кузька, ты же утверждал, что прекрасно помнишь рецепт!

– Конечно, помню! Рецепт был напечатан на листике отрывного календаря от 5 марта. Я нашёл его возле тумбочки.

Кузька встал, приподняв одну из передних лап вверх, полузакрыл глаза и стал читать по памяти скучным монотонным голосом, размахивая поднятой лапой: «Когда торт готов, следует обмазать его верхнюю сторону белым ванильным кремом, а клубничным розовым кремом расчертить верх торта на квадрат 3×3 из 9 клеточек, после чего разложить по клеткам 45 вишенок, так чтобы на всех клетках было разное число вишенок, но при этом суммарное количество вишенок в каждом вертикальном, горизонтальном и диагональном ряду было бы одним и тем же. Это делается следующим образом: в угловую клетку следует положить...»

– Ну?

– Страница на этом кончилась! Продолжение смотри на листке от 18 апреля! А у меня нет этого листка!

– Давайте сами придумаем, как расставить, всего делов-то, – сказала Огрыза. – Можете мне разложить в клетках квадрата 3×3 три нуля, три единицы и три минус единицы так, чтобы в каждом ряду сумма чисел была равна нулю?

– Запросто, – сказал Кузька, стараясь загладить свой промах. – Вот так:

1	–1	0
–1	0	1
0	1	–1

– Посмотрим, посмотрим, – пробормотала Огрыза, внимательно разглядывая Кузькину таблицу. – Ой какая хорошая табличка получилась! Присаживайтесь поудобней, сейчас вы увидите работу настоящего мастера. Во-первых, мы заведём ещё одну таблицу, состоящую из одних единиц. Потом мы возьмём Кузькину таблицу и отразим её по вертикали. Значит, всего у нас получится три таблицы:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	–1	0
–1	0	1
0	1	–1

0	–1	1
1	0	–1
–1	1	0

А теперь мы ак-ку-рат-ненько наложим эти таблицы одна на другую, чуть-чуть сдвигая влево!

1 1 0	1 –1 –1	1 0 1
1 –1 1	1 0 0	1 1 –1
1 0 –1	1 1 1	1 –1 0

Готово! Кружочки вы сами нарисуете. – И Огрыза победно посмотрела на собеседников.

– Что готово? Какие кружочки? – не понял Кузька.

– Да-да, – воскликнула Бусенька, – спасибо, конечно, нарисуем! – И она быстро обвела в кружок каждую цифру в таблице.

1 1 0	1 –1 –1	1 0 1
1 –1 1	1 0 0	1 1 –1
1 0 –1	1 1 1	1 –1 0

– Это числа, записанные в троичной системе счисления[1], – объяснила она Кузьке. – Они показывают, сколько вишенок следует положить в каждую клеточку.

– И это разные числа? – не поверил Кузька.

– Ну да, разные. Записи любых двух чисел отличаются хотя бы одной цифрой. Это же видно!

– И во всех рядах суммы одинаковые?

[1]Подробнее о троичной системе счисления и записи чисел в ней вы можете узнать из сказки «Как Бусенька меняла знак числа» в «Квантике» № 12 за 2014 год.

– Конечно, одинаковые! Это ясно, если смотреть по отдельности на каждый разряд! В первом разряде тут и проверять нечего – у всех чисел в этом разряде единицы. А во втором разряде стоят цифры из твоей таблицы, ты же сам подобрал, чтобы все суммы были одинаковые – нулевые. И в третьем разряде тоже так.

– Здорово! – похвалил Кузька. – Тогда давайте украшать торт! Но... ты знаешь, я как-то в троичной системе не очень разбираюсь...

– Ладно, сейчас переконвертируем, – кивнула Бусенька.

12	5	10
7	9	11
8	13	6

– Нет, так не годится, – сказала она Огрызе, – тут слишком большие числа. Нам не хватит 45 вишенок.

– Ну что такое, – заворчала Огрыза, – ничего сами сделать не могут! Вы же видите, в моей таблице у всех чисел в первом разряде стоит единица. Если мы уберём первый разряд, числа всё равно будут различные, и суммы по-прежнему будут равны. Зачем, спрашивается, нам вообще тогда нужен первый разряд?

– Зачем? – повторил Кузька. Он часто, когда чего-нибудь не понимал, повторял слова собеседника, словно дразнился.

– Чтобы все числа были положительные! Если вам не нужны такие большие числа, то вместо единицы первого разряда – а в этом разряде единица обозначает число 9 – возьмите число поменьше. Например, 5. Короче, отнимите от всех чисел 4!

– Готово! – сказала Бусенька. – Получается как раз 45 вишенок!

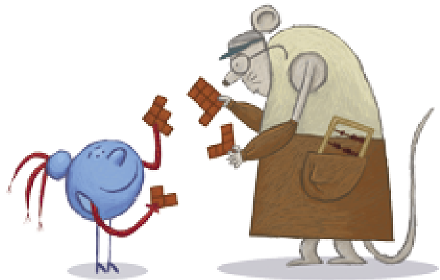
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Только погодите, вы что, собираетесь подарить этот торт на день рождения дятлу Спятлу? Да он просто свихнётся, увидев такой узор!

– Но в рецепте было указано именно это! – возразил Кузька.

– Рецепты пишутся не для дятлов! – строго сказала Бусенька. – Надо как минимум это зашифровать! Вернёмся к троичной таблице. Обозначим для начала единицу первого разряда буквой a, единицу второго – буквой b, единицу третьего – буквой c.

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

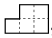
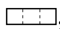
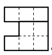
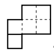
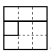
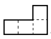
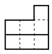


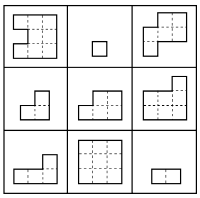
– Так он ещё сильнее свихнётся, – предположил Кузька.

– Для самой последней таблицы эти обозначения тоже годятся, – заметила Огрыза. – Здесь получается, что $a=5$, $b=3$, $c=1$.

– А теперь давайте считать, что a, b и c – это не числа, а фигуры! Скажем, клетчатые! – нехорошо сверкая глазами, заявила Бусенька. – Фигура a состоит из пяти клеток, фигура b – из трёх, а c – из одной!

– Ага, так ты, значит, собираешься складывать и вычитать фигуры? – настолько иронично, как это только можно ожидать от таракана, спросил Кузька.

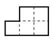
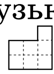
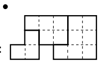
– Да! Вместо сложения будем приставлять фигурки друг к другу, а вместо вычитания – вырезать одну фигурку из другой! К делу! Пусть $a=$ , $b=$ , $c=$ . Приступаем к вычислениям! $a+b=$ , $a+c=$ , $a+b+c=$ . Ну, тут всё понятно. В качестве $a-c$ возьмём , $a-b=$  и $a-b-c=$ . Теперь, когда у нас уже есть $a-b$, можно взять $a-b+c=$ , а глядя на $a-c$, можно считать, что $a-c+b=$ . Получается вот такая табличка:



– Скажи ещё, что суммы во всех рядах – это клетчатые дятлы! – продолжал ехидничать Кузька.

– Клетчатые дятлы – это слишком помпезно, – возразила Бусенька. – Суммы – это клетчатые слоники!

– Слоники? – жалобно простонал Кузька.

– Да. Слоники. Вот такие:  +  +  = .

– Со слониками он точно не догадается*, – подытожила Огрыза. – А клеточки этих фигур сделаем из маленьких шоколадок!

*А читатель, вероятно, уже догадался, что каждый ряд этой таблицы позволяет составить слоника. Составьте! Фигурки при этом можно поворачивать и переворачивать.

Художник Инга Коржнева

ДЕТЕКТИВНЫЕ ИСТОРИИ

Борис Дружинин

Пока Лиза и Вова посещали школу, Квантик «глотал» книгу за книгой. Начитавшись Пушкина и Ершова, он принялся сочинять стихи. И вот Вова обнаружил в компьютере стихотворение «Белки». Начиналось оно так:

Стало вдруг вокруг тепло.
Белки вышли из дуплов.

– Чего-то мне слово «дуплов» не нравится, – заметил Вова.

– Понятно! – откликнулся робот. – Это я мигом исправлю.

И он исправил.

Стало вдруг вокруг теплей.
Белки вышли из дуплей.

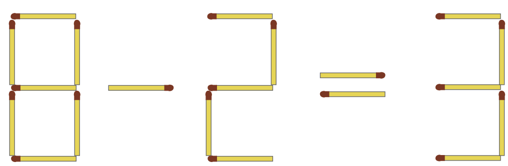
– И «дуплей» мне не нравится, – продолжал Вова.

– А как правильно? – поинтересовался Квантик. Вова задумался.

Как правильно пишется «дупло» в родительном падеже множественного числа?

Пришла Лиза и всё разъяснила. А потом она предложила съездить в Санкт-Петербург, побродить там по музеям, полюбоваться фонтанами Петергофа, посетить Царскосельский лицей. Естественно, робота Квантика взять с собой. Но при покупке билетов возникли сложности – у Квантика не оказалось документов. Пока ребята пытались уладить эту проблему, робот спокойно стоял в отделении полиции и решал очередную задачку из серии «Переложи спичку». Задачка такая.

Не перекладывая ни одной спички, получи верное равенство.



– У вас случайно нет спичек? – спросил Квантик у полицейского, чем привёл того в крайнее изумление.

– Неужто роботы курить стали? – поинтересовался полицейский.

– Нет. Я задачку решаю, – пояснил Квантик. – По картинке не получается, хочу попробовать с настоящими спичками.

Спички разложили на столе, и робот с помощью полицейского принялся решать задачку. Но пока ничего не получалось. В комнату вошли Лиза и Вова, и сразу зазвонил телефон. Полицейский снял трубку, минуту молча слушал, а затем по спецсвязи вызвал всех дежуривших на вокзале сослуживцев.

– Поступило срочное сообщение, – сообщил он собравшимся. – На станции Бологое опасный преступник, уходя от погони, успел в последний момент запрыгнуть в скорый поезд. До Москвы поезд нигде не останавливается. Особых примет преступник не имеет. Надо его задержать.

Полицейские недоумённо переглянулись.

– Как его задерживать, если нет особых примет? – спросил старший лейтенант. – Он что, в тюремной одежде?

– Нет, – ответил первый полицейский. – Он сбежал через двадцать минут после ареста и одет в нормальную гражданскую одежду.

В это время поезд плавно подошёл к перрону, и пассажиры стали постепенно покидать вагоны.

– Как мы его обнаружим? – недоумевал сержант. – Ведь особых примет у него нет.

– Обратите внимание вон на того гражданина, – посоветовала Лиза.

– Да, утверждать, что именно он преступник, нельзя, но проверить у него документы стоит, – согласился с подругой Вова.

Увидев приближающихся к нему полицейских, гражданин бросился бежать, но разве от Квантика убежишь? Пойманного доставили в отделение полиции. Вова и Лиза не ошиблись – это был тот самый преступник.

На кого показала Лиза? Почему ребята его заподозрили?

После такого происшествия вопрос с билетом для Квантика был решён за одну минуту. А тот от радости так же быстро решил задачку про спички.

Как он решил задачку?

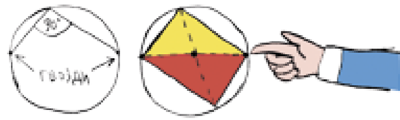
Художник Максим Калякин

Наталья Рожковская,
Максим Прасолов

Круг и прямые углы

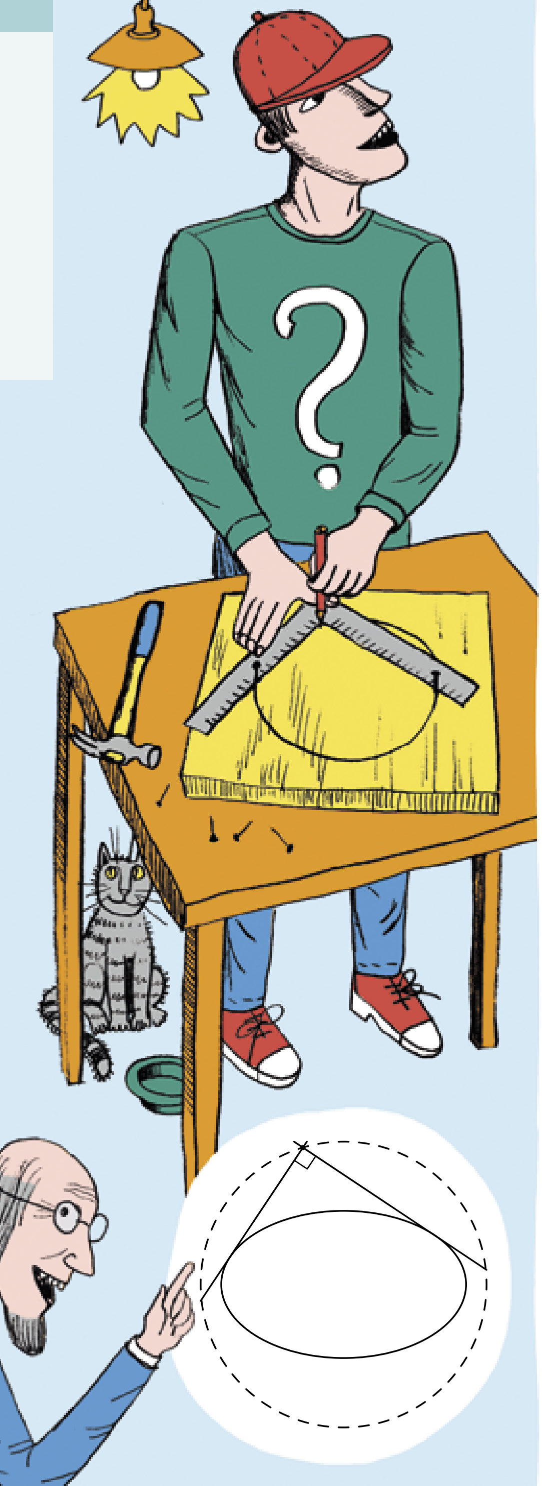
Удивительный факт заключается в том, что круг «дружит» с прямыми углами.

Американский журнал «Хендимен» адресован тем, кто любит мастерить и строить своими руками. В ноябрьском выпуске 2012 года читателям был предложен такой совет:



Нарисуйте круг с помощью угольника.

Вот как можно нарисовать небольшие круги или дуги. Вбейте в доску два гвоздя – расстояние между ними задаст диаметр вашего круга. Держа карандаш у вершины прямого угла, перемещайте угольник так, чтоб его стороны все время касались гвоздей. Возможно, стоит слегка смазать угольник воском, чтобы он легче скользил по поверхности доски. Не спрашивайте нас, почему этот метод работает – всё, что мы знаем, это то, что он действительно работает.



Если бы редакторы журнала хорошо помнили школьную геометрию, они, конечно, знали бы, почему это работает. Прямоугольный треугольник, вершины которого – два гвоздя и острие карандаша, – это половинка прямоугольника. Достроим прямоугольник до целого: его диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам. Значит, острие карандаша находится на окружности с центром в середине отрезка с концами в гвоздях и радиусом, равным половине длины этого отрезка. Понятно, что так можно получить любую точку этой окружности.

Но есть куда более удивительный факт. В прошлом номере «Квантика» мы писали, как нарисовать эллипс: накиньте на гвозди верёвочное кольцо, оттяните его карандашом и ведите карандаш, всё время оставляя кольцо натянутым. Оказывается, если теперь приложить угольник к эллипсу и вращать его так, чтобы он всё время касался эллипса своими сторонами, то карандаш, расположенный в вершине прямого угла, снова опишет окружность. Проверьте!

Художник Артём Костюкевич

XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

11 и 25 октября 2015 года состоялся осенний тур XXXVII Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового варианта и избранные задачи сложного варианта для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1 (3 балла). Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

Егор Бакаев

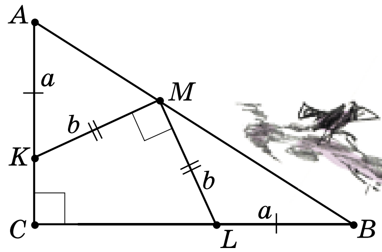
2 (4 балла). Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

Егор Бакаев

3 (5 баллов). Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Егор Бакаев

4 (5 баллов). На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB – точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.



Егор Бакаев

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число эре. Для любой пары городов A и $Б$ перелёт из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелёт из $Б$ в A. Средняя стоимость перелёта равна 1 эре. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m эре, если

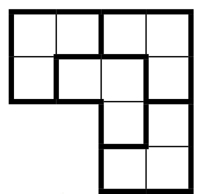
а) (3 балла) $m = 99$;

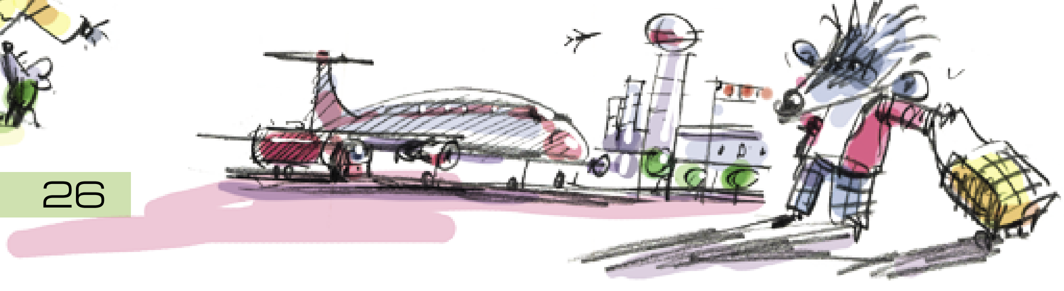
б) (3 балла) $m = 100$?

Егор Бакаев

Избранные задачи сложного варианта

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).





а) (2 балла) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

б) (3 балла) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

Егор Бакаев

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

а) (2 балла) $k = 9$;

б) (4 балла) $k = 8$?

Александр Шаповалов

3. (8 баллов) Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки – одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

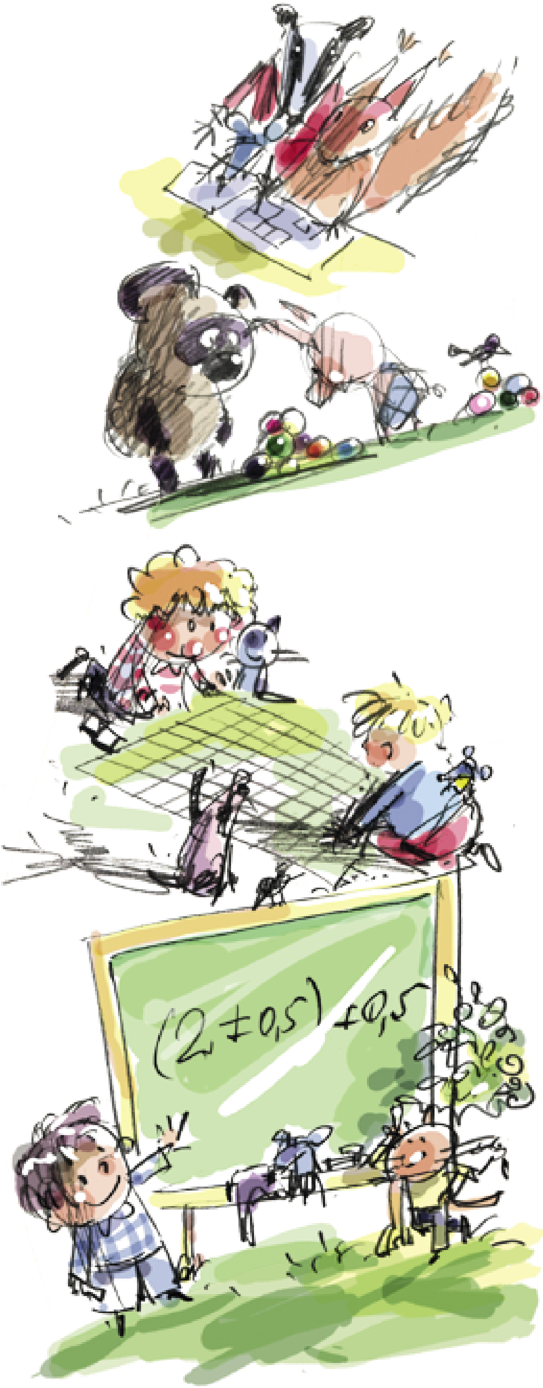
Александр Шаповалов

4. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «+», «–», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «+», либо «–» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0{,}5) \pm 0{,}5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) (3 балла) числа 1, 2, 4;

б) (7 баллов) любые 100 различных чисел?

Ко Бонгюн (Южная Корея)



Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Приглашаем всех желающих принять участие в очередном конкурсе по русскому языку (итоги конкурса прошлого года будут подведены в номере 4).

Возможно, вам, дорогие читатели, привычнее задачи по математике и физике, но попробуйте порешать и эти задачи, не пожалеете! А ещё покажите их своим друзьям-гуманитариям и любимому учителю русского языка.

Для победы вовсе не обязательно решить всё – присылайте то, что получится.

Решения первого тура ждём по адресу kvantik@mccme.ru не позднее 1 апреля.

Победителей ждут призы. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы!

I ТУР

1. Глагол *надоесть* происходит от глагола *есть* (это хорошо видно, например, по его спряжению: *надоем*, *надоешь* и т.д.). Смысловая связь между *есть* и *надоесть* хотя и улавливается с трудом, тем не менее существует. Какое ещё русское слово можно привести в доказательство существования этой связи?

И.Б.Иткин

2. Название перочинного ножа происходит от выражения *чинить перья*, то есть заострять гусиные перья для письма. А как выглядит совершенный вид глагола *чинить* в этом значении?

А.С.Панина

3. Что начинается и заканчивается одним и тем же звуком и содержит *ы*, *ъ* и *щ*?

С.И.Переверзева

4. В окончаниях родительного падежа единственного числа мужского и среднего рода прилагательных буква «г» читается как [в]: например, *большого* читается как *большо*[*в*]*о*. Найдите прилагательное, в котором буква «г» читается как [в] **в словарной форме**.

Е.А.Ренковская

5. Есть такая игра: игрок загадывает слово и должен объяснить его, используя только слова на какую-нибудь одну букву (разумеется, само загаданное слово вовсе не обязательно начинается на эту же букву). Одному игроку досталась буква Щ. Вот его объяснение:

– *Щемит, щиплет?.. Щурится, щупает щёки, щупает щиколотку…*

Какое существительное было загадано?

ЛИТЕРАТУРА И МАТЕМАТИКА
(«Квантик» №11, 2015 год)

1. *На мельницу доставили четыреста пятьдесят мешков ржи, по восемьдесят килограммов в каждом. Рожь смололи, причём из шести килограммов зерна вышло пять килограммов муки. Сколько понадобилось машин для перевозки всей муки, если на каждой машине помещалось по три тонны муки?*

Из рассказа Николая Носова «Федина задача»

В 450 мешках привезли $450\cdot80$ кг ржи, из которой сделали $450\cdot80\cdot\frac{5}{6}$ кг муки и увезли на $\dfrac{450\cdot80\cdot\frac{5}{6}}{3000}$ машинах. Сделав сокращения, получим ответ: 10 машин.

2. *Стоит четырёхэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше – два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. В каком году умерла у швейцара бабушка?*

Из романа Ярослава Гашека
«Похождения бравого солдата Швейка
во время мировой войны»

Данных недостаточно, чтобы установить год смерти бабушки.

3. *Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а чёрное 3 руб. за аршин.*

Из рассказа Антона Чехова «Репетитор»

Пусть было x аршин чёрного сукна и y аршин синего. Составим два уравнения: $x+y=138$ и $3x+5y=540$. Домножив обе части первого уравнения на 3 и вычтя результаты из частей второго, находим $y=\dfrac{540-138\cdot3}{2}=270-69\cdot3=270-(70-1)\cdot3=270-210+3=63$. Из первого уравнения находим $x=138-y=138-63=75$.

4. *Одному учёному нужно было узнать, сколько в пруду рыб. Для этого он забросил сеть и поймал тридцать штук. Каждую рыбу он окольцевал и выпустил обратно. На другой день он снова забросил сеть и вытащил сорок рыб, на двух из которых оказались кольца. И учёный вычислил, сколько приблизительно рыб в пруду. Как он это сделал?*

Из повести Владимира Тендрякова
«Весенние перевёртыши»

Только две рыбы из сорока вытащенных во второй раз были окольцованы. Значит, в пруду окольцованных рыб примерно каждая двадцатая. Окольцевал он всего 30 рыб. Значит, рыб в пруду примерно $30\cdot20=600$.

Поздравляем ребят, решивших все четыре задачи! Это
Бейлин Александр (5 класс, лицей 58 г. Ростова-на-Дону),
Мосейчева Юлия (5 класс, школа 57 г. Москвы),
Савченко Арсений (5 класс, школа 5 г. Магнитогорска),
Сорвин Лев (6 класс, гимназия 610 г. Санкт-Петербурга),
Федоровский Артур (5-й класс, школа 30 г. Волжского),
Ясников Алексей (7 класс, школа 58 г. Тольятти).

КАК ВЫЙТИ ИЗ ЛЕСА?
(«Квантик» №12, 2015 год)

Пусть грибник находится в некоторой точке O. Чтобы грибник заведомо вышел из леса, его путь должен пересекать любую прямую, отстоящую от точки O на расстояние 1 км. Например, как на рисунке а: сначала грибник идёт 1 км до точки O', а потом по окружности радиуса 1 км с центром в O. Длина пути равна $1+2\pi\approx7{,}3$ км. Можно короче, как на рисунке б. Вместо последней четверти окружности грибник пройдёт по перпендикуляру до прямой L – касательной к окружности в точке O': длина $2+\frac{3}{2}\cdot\pi\approx6{,}7$ км.

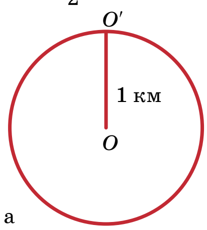


Рис. а

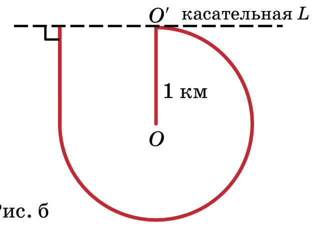


Рис. б

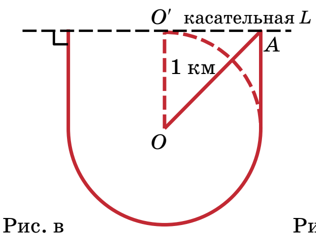


Рис. в

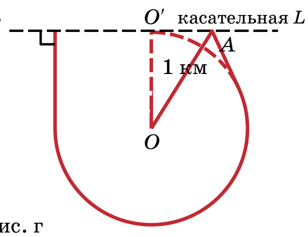


Рис. г

Можно ещё короче. Пусть A – точка на прямой L. Грибник сначала пойдёт до точки A, потом по касательной до окружности, а потом как раньше. Если $O'A=1$, то он пройдёт $\sqrt{2}+2+\pi\approx6{,}55$ км (рисунок в). OA можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAO', а отрезок касательной равен AO', потому что любые две касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны.

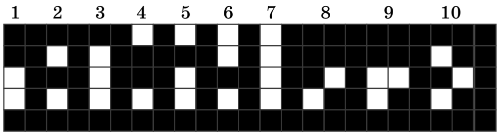
Возьмём теперь $AO'=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Проверьте, что тогда угол $O'OA$ равен 30° (рисунок г). Длина пути будет равна

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}+\pi+1=\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}+1\approx6{,}397<6{,}4\text{ км}.$$

Примечание. Точку A можно найти так: пусть O'' – точка, симметричная точке O относительно прямой L; тогда отрезок касательной из точки O'' к окружности пересечёт прямую L в точке A. Именно для этой точки A путь грибника (среди путей вида, изображённого на рисунке г) будет кратчайшим, и вот почему. По симметрии $OA=O''A$, поэтому если начало пути пройти по отрезку $O''A$ вместо отрезка OA, то длина останется прежней. Наконец, от точки O'' идти до окружности короче всего по касательной.

ТЕЛЕСКОП АРЕСИБО

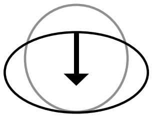
Диаграмма представляет числа от 1 до 10 в двоичной системе: 00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00110, 00111, 01000, 01001, 01010. Белые клетки обозначают 1, чёрные – 0. Белые клетки в предпоследнем ряду являются маркерами положения нового числа и не обозначают никакую цифру.



ВЕЛОЗАДАЧИ

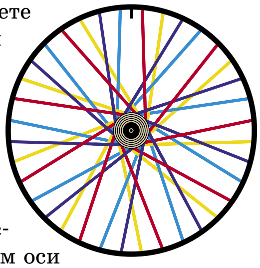
1. Больше всего спица напрягается тогда, когда на неё (через ось колеса) ложится вес телеги, то есть когда спица находится внизу.

2. В велосипедном колесе ось не опирается на спицы (они бы легко согнулись под таким весом), а висит на спицах, так что больше нагружены верхние спицы, а не нижние.



Но это не всё: если бы натягивались только верхние спицы, они бы притянули верх обода и он бы сплющился (см. рис.). Менять форму ободу не позволяют все спицы, своим натяжением стягивающие обод. Без нагрузки эти все спицы натянуты в среднем одинаково, но когда мы ставим велосипед на пол и садимся на него, нижние спицы могут расслабиться: теперь обод не притягивается спицами к оси, а толкается полом.

3. Спицы призваны делать колесо жёстким, предотвращать любые его деформации. Почему обод сложно сдвинуть в направлении оси колеса? Его должны удерживать на месте спицы. Если бы они все шли в плоскости колеса, то как их ни натягивай, они не создадут заметной силы, направленной поперёк колеса. Поэтому, чтобы колесо не болталось вправо-влево, спицы ведут наклонно: одни отклоняются к левому диску на оси и не дают ободу двигаться вправо относительно оси, другие – к правому и не дают ободу двигаться влево относительно оси.



4. Причина, по большому счёту, та же, что и в задаче 3. Крутя педали, вы вращаете по цепи осевую часть колеса. Если бы спицы шли по радиусам, то им бы потребовалось огромное натяжение, чтобы быстро передать вращение оси ободу, ведь они тянут обод к центру, что не создаёт вращательного момента. А так половина спиц (синие) расположены под углом, позволяющим оси легко разгонять колесо против часовой стрелки, а половина спиц – в противоположном. Обычно их натяжения скомпенсированы, но когда мы разгоняемся или тормозим дисковыми тормозами, половина натягивается немного сильнее, половина немного ослабляется.

КОНСТРУКЦИИ ИЗ ДНК

Вторая нить ДНК однозначно определяется по первой нити, поэтому достаточно оценить минимальную длину одной нити. На каждом месте может стоять один из четырёх нуклеотидов – А, Т, Г или Ц. Если длина равна 16, то количество возможных нитей равно $4^{16} = 4294967296$, что меньше семи миллиардов. Значит, длина как минимум 17. На самом деле длина ДНК человека обычно несколько миллиардов нуклеотидов.

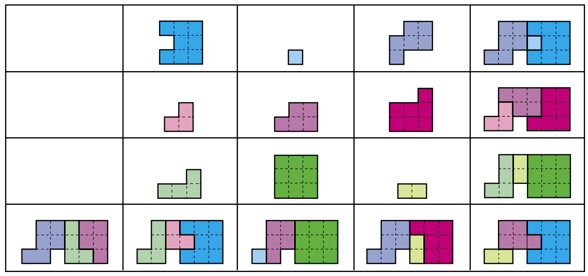
МЕСТЬ СТАТУИ, ЧЕМПИОН ПОНЕВОЛЕ И НЕЧЕСТНЫЙ СУДЬЯ

Выдумана, конечно, история про нечаянного победителя-бегуна. Во-первых, на первых олимпиадах женщин не допускали на стадионы даже в качестве зрителей. Во-вторых, креститься люди начали гораздо позже, после появления христианства.

КАК БУСЕНЬКА УКРАШАЛА ТОРТ

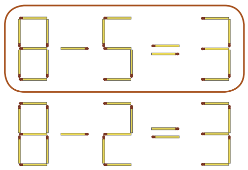
Этот удивительный магический квадрат со слониками взят со страницы http://puzzlezapper.com/blog/2011/01/magic-squares-and-polyominoes/

В приведённой табличке снаружи от квадратика 3×3 возле каждого горизонтального, вертикального и диагонального ряда показано, как следует составлять слоников из фигурок этого ряда.



Превращение обычных магических квадратов в магические квадраты с геометрическими узорами – это настоящее искусство. Квантик писал об этом в № 5 за 2013 год. Только настоящая Бусенька может справиться с такой задачей походя, за пару минут. Обычному человеку понадобится для этого немало времени, терпения и удачи.

НА ВОКЗАЛЕ



- Дупл или дупел.
- Преступником был единственный пассажир, не имевший при себе никакого багажа.
- Надо поставить зеркало, и в отражении получится верное равенство.

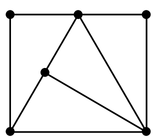
XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ

Базовый вариант

1. Ответ: верно.

Числа, начинающиеся с 1, умножим на 1. Докажем, что числа, начинающиеся с 2 или 3, достаточно умножить на 5. Пусть у нас есть такое число и в нём n цифр. Тогда оно больше или равно 20...0, но меньше 40...0 (число нулей везде n –1). После умножения мы получим число, больше или равное 10...0, но меньшее 20...0 (число нулей везде n), то есть результат начинается на 1. Аналогично доказывается, что числа, начинающиеся с 4, можно умножить на 3 (или на 4), а числа, начинающиеся на 5, 6, 7, 8 или 9 – на 2.

2. Ответ: не обязательно.



Например, возьмём равносторонний треугольник и приложим к двум его сторонам гипотенузами прямоугольные треугольники с углом 60° при общей вершине (см. рисунок). Осталось разрезать равносторонний треугольник высотой из другой вершины.

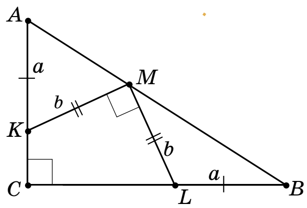
3. Будем обозначать через H количество показанных ножниц, а через K – количество показанных камней.

Докажем, что после любого количества раундов остаток от деления общего числа баллов на 3 будет такой же, как у $H-K$. Этого достаточно для решения задачи, потому что в итоге ножниц и камней было показано поровну. Чтобы доказать равенство остатков, покажем, что они меняются одинаково при любом исходе раунда. Если все игроки выкидывают один и тот же элемент, то общее число баллов не меняется, а $H-K$ либо не меняется, либо изменяется на 3. В любом случае остатки на 3 остаются прежними. Остальные исходы раундов показаны в таблице:

	ККН	КНН	КББ	ККБ	НББ	ННБ
очки	+2	+1	+2	+1	+1	+2
Н–К	−1	+1	−1	−2	+1	+2

Из таблицы видно, что остатки от деления на 3 у общего числа баллов и у $H-K$ меняются одинаково. Так как в самом начале остатки равны нулю, то они совпадают после любого числа раундов.

4. Предположим, что $a>b$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то для треугольника AKM получаем: $\angle AMK > \angle A$. Следовательно, $\angle B = 90^\circ - \angle A > 90^\circ - \angle AMK = \angle BML$, и из треугольника BML получаем, что $b>a$. Противоречие.



Аналогично, к противоречию приводит предположение $a<b$.

5. Заметим сначала, что рейс определяется своими начальным и конечным пунктами. Выбрать начальный город мы можем 100 способам, и после этого у нас есть 99 вариантов для конечного города. Итого получаем $100 \cdot 99$ возможных рейсов.

а) **Ответ:** не всегда.

Пусть все 99 рейсов из родного города и все 99 рейсов в родной город стоят по 49,6 эре. Это возможно, поскольку суммарная стоимость этих рейсов равна $99{,}2 \cdot 99$ эре, что меньше общей стоимости. Цену на оставшиеся рейсы подберём так, чтобы довести суммарную стоимость до $100 \cdot 99$. Тогда, чтобы вылететь из родного города, а потом вернуться в него, надо уже потратить больше 99 эре.

б) **Ответ:** всегда.

Вылететь из родного города можно в один из остальных 99 городов, из того – в любой из 98 оставшихся, и так далее (последним рейсом возвращаемся в свой родной город). Значит, всего имеется $99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 99!$ вариантов маршрутов.

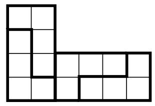
В скольких маршрутах встретится любой конкретный перелёт? Сделав этот перелёт, дальше мы можем полететь в один из 98 городов, потом – в один из 97 оставшихся, и так далее, итого получаем $98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 98!$ маршрутов.

Тогда суммарная стоимость всех маршрутов равна числу рейсов, умноженному на 98!, то есть равна $98! \cdot 99 \cdot 100$ эре. Средняя стоимость маршрута равна суммарной стоимости, делённой на число маршрутов: $98! \cdot 99 \cdot 100/99!$, а это как раз 100 эре! Значит, найдётся маршрут не дороже 100 эре (ведь если бы все маршруты были дороже 100 эре, то и средняя их стоимость была бы дороже 100 эре).

Замечание. Условие о равенстве стоимости рейсов туда и обратно – лишнее.

Избранные задачи сложного варианта

1. а) Например, подойдёт «буква Г» из четырёх клеток (см. рисунок справа):



б) **Ответ:** при любых.

Рассмотрим такую «букву Г» из n клеток, что из двух её копий складывается прямоугольник $2\times n$. Из таких прямоугольников можно сложить квадрат $2n\times 2n$, а из этих квадратов – «букву Г», подобную исходной с коэффициентом $2n$.

2. а) **Ответ:** необязательно.

Удалим числа 1, 2, …, 9. Тогда сумма даже наименьших девяти из оставшихся чисел больше 100 (она равна $10+11+\ldots+18=126$).

б) **Ответ:** обязательно.

Рассмотрим 12 пар чисел, дающих в сумме 25: (1, 24), (2, 23), …, (12, 13). После удаления 8 чисел останется не меньше четырёх нетронутых пар. Они и дадут в сумме 100.

3. Ответ: Вася.

Заметим, что перед Васиным ходом всегда будет оставаться *нечётное* число спичек.

Тогда, пока перед ходом Васи есть хотя бы два квадратика без общих сторон, он всегда сможет найти спичку, не входящую в эти два квадратика, и взять её. Действуя так, Вася всегда будет оставлять после себя хотя бы два квадратика без общих сторон.

Пусть впервые наступил момент, когда перед ходом Васи нет двух квадратиков без общих сторон. Но они были после его прошлого хода, и значит, Петя только что испортил один этих квадратиков. Поэтому остался либо всего один квадратик, либо несколько квадратиков, которые все друг с другом смежны.

В первом случае Вася разрушает оставшийся квадратик и выигрывает.

Во втором случае могли остаться только два квадратика, и они соседние (если квадратиков хотя бы три, то среди них найдутся два без общих сторон). Тогда Вася берет спичку, разделяющую эти соседние квадратики, и выигрывает.

4. Ответ: возможно.

а) $(1{,}5 \pm 0{,}5) \cdot (1{,}5 \pm 0{,}5)$.

б) Одно значение можно получить и без операций. Для добавления значения a к набору значений, получаемых выражением T, подойдёт выражение $a + (0{,}5 \pm 0{,}5) \cdot (T - a)$. Так, постепенно добавляя по новому значению, можно получить любой набор значений.

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем **математическом конкурсе**.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 февраля электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа от команды со списком участников. Результаты среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Итоги будут подведены в конце лета. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

I ТУР

1. Город разделён рекой на две половины, в каждой половине живёт по миллиону человек. В первый год 2015 человек переселились из левой половины в правую; во второй год 2016 человек переселились из правой половины в левую; в третий год опять 2015 человек переселились слева направо; в четвёртый год – 2016 человек переселились справа налево, и так далее.

Докажите, что в какой-то год в каждой из половин снова окажется по миллиону жителей. Через сколько лет это случится?

2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать две пересекающиеся прямые и 15-угольник так, что каждая вершина 15-угольника будет лежать на одной из этих прямых. Не хвастает ли барон?
(Ответ обоснуйте: либо нарисуйте пример, либо докажите, что такого примера нет.)

наш КОНКУРС олимпиады

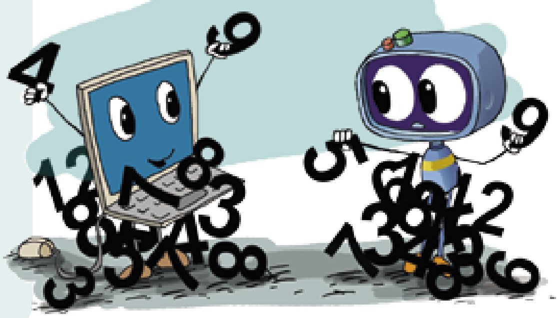
Авторы задач:
Григорий Гальперин (1), Павел Кожевников (2), Игорь Акулич (3), Сергей Дворянинов (4)

3. а) Квадратную таблицу размером 3×3 можно разными способами заполнить натуральными числами. Петя и Коля рассматривают суммы чисел по трём строкам, трём столбцам и двум большим диагоналям. Петя убеждён, что если семь из восьми указанных сумм равны между собой, то и восьмая сумма им равна. Коля считает, что не обязательно. Кто прав?

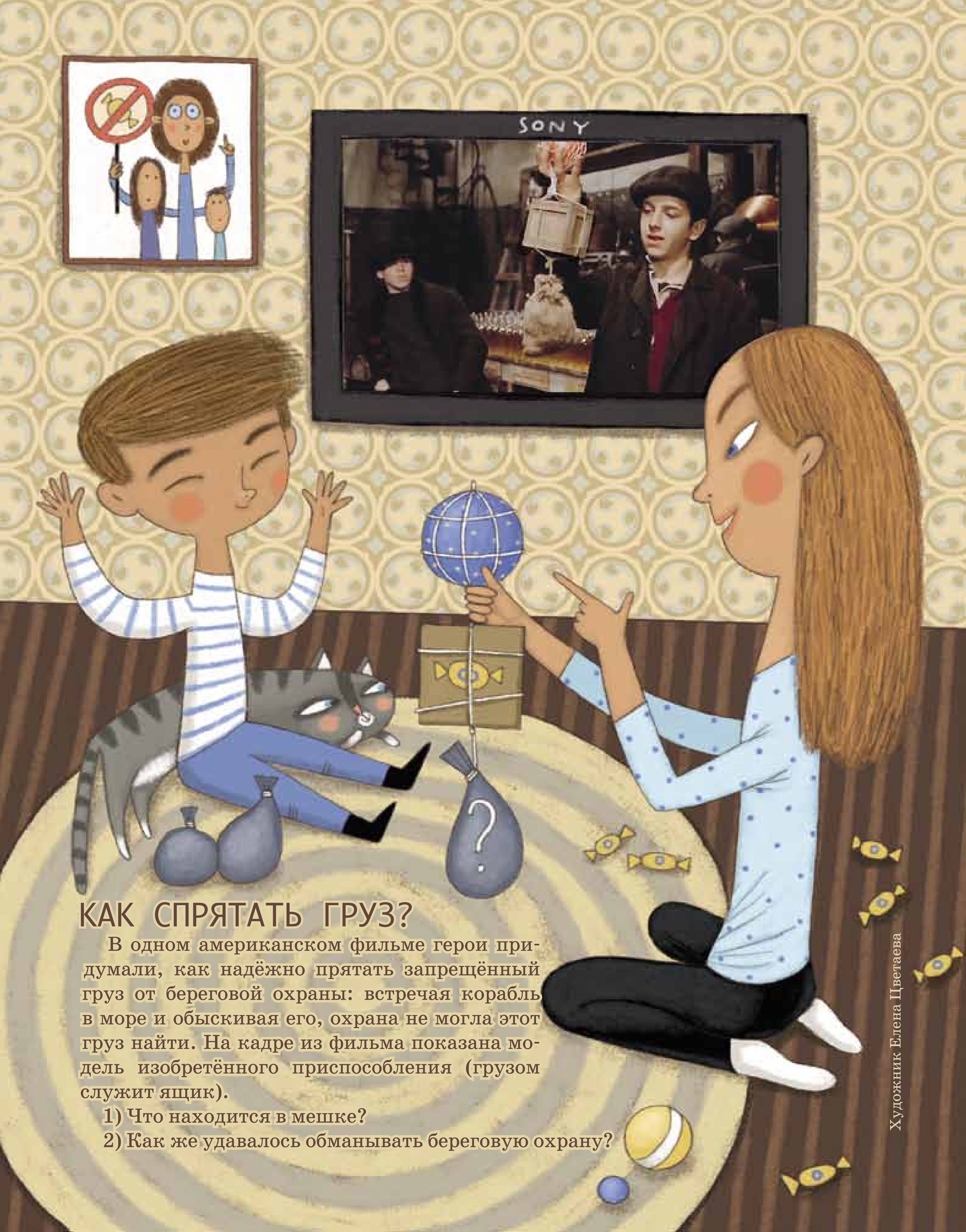
б) Ответьте на тот же вопрос, если квадрат заполнен не просто натуральными числами, а строго числами от 1 до 9 включительно.

4. На столе лежит треугольник периметра 10. На стол положили окружность длины 1 так, чтобы она касалась извне одной из сторон треугольника, и прокатили по его контуру, сделав один оборот вокруг треугольника. Какой путь прошёл при этом центр окружности? (Окружность катится без проскальзывания, оставаясь вне треугольника.)

5. На доске в ряд написаны 100 произвольных целых чисел, их сумма нечётная. Ноутик и Квантик по очереди забирают себе по числу, но брать можно только число с краю. Начинает Ноутик. Когда каждый наберёт по 50 чисел, игра заканчивается. Тот, у кого сумма чисел окажется больше, выигрывает. Может ли Ноутик действовать так, чтобы всегда выигрывать у Квантика, как бы тот ни сопротивлялся и какие бы числа ни были написаны на доске?



Художник Николай Крутиков



КАК СПРЯТАТЬ ГРУЗ?

В одном американском фильме герои придумали, как надёжно прятать запрещённый груз от береговой охраны: встречая корабль в море и обыскивая его, охрана не могла этот груз найти. На кадре из фильма показана модель изобретённого приспособления (грузом служит ящик).

1) Что находится в мешке?

2) Как же удавалось обманывать береговую охрану?

Художник Елена Цветаева