№ 12 | декабрь 2017

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12

декабрь 2017

ЖИЗНЬ, ВОДА И СОЛНЕЧНЫЙ ВЕТЕР

РАЗНОЦВЕТНЫЕ ГИРЛЯНДЫ

КРИВАЯ СОСУЛЬКА

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в любом отделении связи Почты России и через интернет!

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Самая низкая цена на журнал!

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП

Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.ru**

Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**

По традиции в преддверии Нового года мы выпустили календарь с интересными задачами-картинками

Приобрести календарь можно в интернет-магазине «Квантик» **www.kvantik.ru** и других магазинах – подробнее по ссылке **kvantik.com/kupit.html**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2017 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, В.А.Дрёмов, Е.А. Котко, И.А.Маховая, А. Ю. Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 14.11.2017
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Валерия Сирота

ЖИЗНЬ, ВОДА И СОЛНЕЧНЫЙ ВЕТЕР

Если вы читали статьи про Венеру и Марс в №2 и №4 «Квантика» за 2017 год, то, возможно, – как и автор – удивлялись: как же получилось, что на трёх (включая Землю) соседних и с астрономической точки зрения вроде бы похожих планетах такие разные условия? У нас тут – приятный климат, чистый воздух, зелёные леса с насекомыми и зверушками, а у них... Ну ладно ещё Марс, он подальше и маленький, но Венера-то с Землёй – почти близняшки! Когда и отчего они стали так сильно отличаться друг от друга?

Оказывается, и правда, когда-то давным давно они были очень похожи. На молодой и горячей Земле тогда тоже было много активных вулканов, воздух был плотным, ядовитым и горячим. И углекислого газа в нём было полно, и разных соединений серы. И парниковый эффект был тоже...

Поразительно, но нас спасли бактерии! Первые бактерии, которые научились «есть» углекислый газ и перерабатывать его в органические вещества, заодно выделяя кислород – то есть осуществлять фотосинтез. Это благодаря им изменился состав атмосферы: в ней стало меньше углекислого газа – главной составляющей воздуха, ответственной за парниковый эффект. (Азот и кислород, которых в нашей атмосфере больше всего, парникового эффекта не создают.) Уменьшился, а потом почти прекратился парниковый эффект – снизилась температура. А при такой «нормальной» температуре уже и тяжёлые серные соединения сами «осели» на землю и превратились во всякие безвредные соли.

Получается так: не жизнь возникла на Земле потому, что здесь самый лучший климат, а наоборот – климат на Земле стал самым лучшим потому, что возникла жизнь! Но почему жизнь завелась именно и только здесь?

Биологи говорят: бактериям нужна вода. И вот важное отличие Венеры от Земли – там практически нет воды. Океаны-то испарились от жары, но куда же делся водяной пар из атмосферы? Оказывается, его «сдуло» солнечным ветром.

Солнце излучает не только свет. От него постоянно и во все стороны очень быстро летят заряженные частицы – протоны, электроны, ионы разных атомов (то, из чего, собственно, и состоит Солнце: из-за большой температуры там не газ, а плазма – часть электронов отрывается от своих атомов и летает отдельно). Попадая в атмосферу планеты, эти частицы выбивают из неё атомы, примерно как бита выбивает фигуры в игре в городки. А молекулы воды лёгкие, в плотной венерианской атмосфере они поднимаются наверх, и их вышибает быстрее всего. Остатки воды и сейчас продолжают покидать атмосферу Венеры.

То же самое происходит и на Марсе. Хоть на поверхности планеты и есть лёд, в атмосфере водяного пара очень мало: как и на Венере, лёгкие молекулы воды среди тяжёлых молекул (в основном, опять-таки CO_2) поднимаются вверх, и там их уносит солнечный ветер. Да и вся марсианская атмосфера под натиском солнечного ветра постоянно тает. Сейчас она уже такая тощая, что атмосферное давление совсем маленькое – если бы и появилась на поверхности Марса вода, она бы тут же закипела и испарилась.

А ведь раньше на Марсе текли настоящие реки! На фотографиях со спутников чётко видны высохшие речные русла. Раньше атмосфера была плотнее

Русло высохшей марсианской реки. Пока текла река, вдоль русла накопились отложения, более плотные, чем окружающий грунт; когда вода высохла, окружающие породы постепенно разрушились ветром, а плотные отложения вдоль русла остались.

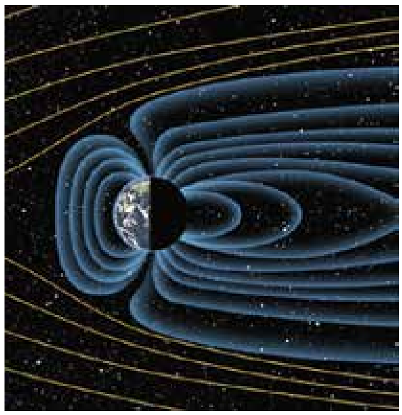
Фото en.wikipedia.org/wiki/Eberswalde_(crater)

и толще, давление у поверхности больше, и было полно воды! Хотя, честно говоря, живому существу, похожему на земное (хотя бы бактерии), трудно было бы выжить на Марсе даже в тот благополучный период. И опять из-за солнечного ветра: ведь космические лучи выбивают атомы не только из атмосферы, но и из всего, что им попадётся на пути.

Ну хорошо, но если у всех вокруг такая беда, почему же на Земле вода никуда не делась? Потому что у Земли есть специальный щит, который защищает атмосферу от солнечного ветра. Этот щит – сильное магнитное поле.

Оказывается, некоторые планеты (не все!) – ещё и гигантские магниты; как и любой магнит, они создают вокруг себя магнитное поле. Правда, на их движении это никак не сказывается: сила их магнитного взаимодействия друг с другом несравнимо меньше силы гравитационного притяжения, с которой любые массивные тела притягивают друг друга.[1] Зато...

У любого магнитного поля есть такое свойство: оно «сбивает с пути», отклоняет от прямой линии движущиеся заряженные частицы. И чем быстрее частица движется, тем сильнее магнитное поле её «заворачивает». Поэтому заряженные частицы солнечного ветра не могут проникнуть в область вокруг планеты, «занятую» магнитным полем. У Земли эта область (магнитосфера) простирается в сторону Солнца на 10–12 земных радиусов (70 тыс. км), а в сторону от Солнца – ещё раз в 10 дальше.



Магнитное поле Земли и обтекающий его солнечный ветер. Рисунок с сайта www.sciencedaily.com

Солнечный ветер «обтекает» земную магнитосферу, как вода обтекает препятствие. Так магнитное поле защищает всё живое на Земле, её атмосфе-

[1] И любая железяка (или даже магнитик) падает на Землю просто оттого, что Земля тяжёлая – то есть под действием гравитационного притяжения; сила, с которой Земля-магнит притягивает эту железяку, куда меньше.

ру и даже космонавтов на искусственных спутниках. Только небольшая доля частиц проникает в верхние слои атмосферы (на высоту примерно 100 км) в тех местах, где наш магнитный щит «прикрепляется» к планете – в окрестности магнитных полюсов: там силовые линии магнитного поля направлены не вдоль поверхности Земли, а почти вертикально. Сильно повредить атмосферу эти частицы не могут, но они ионизуют атомы азота и кислорода на своём пути – отрывают от них электроны или сильно «раскачивают» их. Эти возбуждённые атомы, снова «успокаиваясь», излучают свет, и мы видим полярные сияния.

Магнитные полюсы Земли близки к географическим, хотя и не совпадают с ними. (Этой близостью все мы пользуемся, когда берём в руки компас: ведь он показывает нам не на географический, а именно на магнитный полюс.) Поэтому полярные сияния обычно видны только на Севере, за полярным кругом (или, наоборот, совсем уж на юге – в Антарктиде). Только во время особенно сильных магнитных бурь, когда Солнце выбрасывает особенно много частиц, некоторые из них могут случайно залететь и в более близкие к экватору районы.

Полярные сияния.
Верхние фото: Lars Tiede, flickr.com; нижнее фото: Joshua Strang

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Художник Мария Усеинова

Огромные магнитные поля есть у всех планет-гигантов. И, как и на Земле, на них бывают полярные сияния. Правда, на освещённой Солнцем планете (мы ведь смотрим со стороны Солнца!) их не видно в обычный телескоп, зато хорошо видно в ультрафиолетовом свете.

Полярное сияние на Юпитере.
Фото космического телескопа «Хаббл»
(в ультрафиолетовом диапазоне)

У Меркурия, Венеры и Марса магнитные поля тоже есть, но совсем крошечные, слабенькие. И для защиты от солнечного ветра их не хватает. Вот и тает атмосфера, вот и исчезает из неё вода.[2]

Выходит, жизнью на Земле мы обязаны в первую очередь сильному магнитному полю, защитившему нашу атмосферу и нас самих. Почему же из всех планет земной группы оно оказалось сильным только у Земли? Это до конца непонятно. Но известно, что магнитное поле создаётся токами, текущими в жидком металлическом ядре планеты. Земля большая и тяжёлая, она остывает – и ядро у неё застывает – гораздо медленнее, чем Меркурий или Марс. Но по массе Земля больше Венеры всего на четверть, а магнитное поле у неё сильнее в 20 раз!

Видимо, помогает быстрое вращение вокруг оси – у Венеры, как мы помним, ничего такого нет. И наконец, очень возможно, что нам помогла Луна – может, это она приливными силами мешает ядру застыть. Выходит, не зря и не случайно мы – единственные в Солнечной системе обладатели очень крупного спутника, сравнимого по массе с планетой. Возможно, не будь её – и некому было бы всё это изучать…

[2] А на Меркурии солнечный ветер до того сильный и атмосфера до того тощая, что частицы солнечного ветра пролетают её насквозь и вышибают атомы и ионы из грунта. Получается, что солнечный ветер не уменьшает, а увеличивает атмосферу Меркурия за счёт тяжёлых атомов с поверхности – из них она, собственно, в основном и состоит.

Разноцветные гирлянды

Александр Перепечко

Какое бы украшение сделать своими руками на новогоднюю ёлку? Конечно же, гирлянду из разноцветных флажков! Для красоты можно составлять её так, чтобы тройки идущих подряд флажков не повторялись. Скажем, если флажки всего двух цветов – красного и синего, – можно такую гирлянду соорудить:

В ней каждая тройка встречается по разу (все тройки приведены ниже), поэтому длиннее не получится.

Добавим флажки зелёного цвета. Удастся ли теперь получить все возможные тройки без повторений? Получается математическая задача! Попробуем:

Ой… Мы ещё не перебрали все тройки, но и красный, и синий, и зелёный флажок дадут повторение.

Нам поможет правило «только не красный»: начав с тройки красных флажков, будем добавлять флажок любого цвета, кроме красного – лишь бы тройки не повторялись. И только если нельзя добавить никакой другой цвет, добавляем красный. Когда не удастся добавить даже красный – гирлянда готова. Пример:

Все возможные тройки встречаются по разу (проверьте)! Можно и дальше увеличивать число цветов, правда, гирлянда станет чересчур длинной. Такие гирлянды называются *последовательностями де Брёйна*. А ещё такую гирлянду можно закольцевать: совместить первые два флажка с последними двумя. И по-прежнему каждая тройка будет встречаться ровно один раз.

Задача. Составьте гирлянду, в которой будут все возможные четвёрки красных и синих флажков.

Правило «только не красный» всегда даёт гирлянду со всеми возможными тройками (четвёрками, пятёрками...), сколько бы ни было цветов (если начинать гирлянду с соответствующего количества красных флажков). Попробуйте доказать (это непросто!).

Художник Анастасия Булавкина

Игорь Акулич

Фигурковое занятие

– Сегодняшнее занятие нашего математического кружка – фигурковое.

– Вы хотели сказать – фигурное?

– Нет, не хотел. Именно фигурковое. Потому что дело мы будем иметь с *фигурками* – *квадратиками* и *треугольничками*. Да и сам наш кружок – тоже, по сути, фигурка (шучу).

– И что мы будем делать?

– Для начала – разрезать фигуры на фигурки. Начнём с чего попроще. Итак, дан квадрат. Каждую его сторону разбили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам квадрата. В результате квадрат разбит проведёнными прямыми на одинаковые маленькие квадратики. Вопрос: сколько будет этих квадратиков?

– Это легко: n в квадрате!

– А как вы определили?

– Ну… n по одной стороне, да n по другой – и перемножить.

– Верно. А теперь та же история, но с треугольником. Итак, дан правильный треугольник. Каждая его сторона разбита на n равных частей, и через точки разбиения проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. В результате треугольник разбит на одинаковые треугольнички – вот пример на рисунке 1 для $n = 6$. Аналогичный вопрос: сколько будет этих треугольничков?

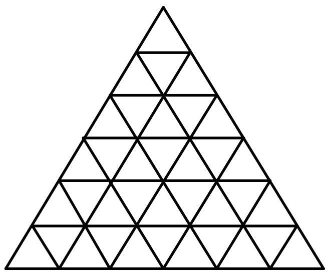


Рис. 1

(*Пауза*)

– Подумайте, я вас не тороплю. Впрочем, давайте вместе решать. Кто хочет к доске?

– Можно, я?

– Конечно.

– Как видно, треугольнички здесь хоть и одинаковые, но различаются по ориентации: одни расположены вершиной вверх, другие – вершиной вниз. Будем говорить, что горизонтальные прямые делят треугольник на *строки* (всего получается n строк). Тогда, если пронумеровать строки сверху вниз, то в k-й строке (для всех k от 1 до n) имеется ровно k треугольничков, расположенных вершиной вверх, и ровно $(k-1)$ треугольничков – вершиной вниз. Значит, надо найти *сумму двух сумм*: первая содержит n слагаемых и равна $1+2+\ldots+n$; вторая содержит $n-1$ слагаемых и равна $1+2+\ldots+(n-1)$.

– И как ты собираешься их находить?

– Такого рода суммы, как я помню, называются *арифметическими прогрессиями* – в них каждое число отличается от предыдущего на одну и ту же величину в одну и ту же сторону. Проще всего найти *среднее значение* (то есть полусумму первого и последнего слагаемых) и умножить его на количество слагаемых.

– Верно, продолжай.

– Тогда первая сумма равна $\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}$, вторая равна $\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$. А сумма сумм составляет $\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$. Ишь как – совпало с квадратами...

– Насчёт «совпало» мы ещё поговорим. Итак, решение имеется. Конечно, оно не единственно возможное. В статье Егора Бакаева «Рисуем сумму нечётных чисел» из «Квантика» №3 за 2015 год приводится ещё несколько. Самое короткое из них основано на известной теореме о том, что если размеры подобных фигур отличаются в n раз, то их площади отличаются в n^2 раз. Поэтому площадь треугольничка ровно в n^2 раз меньше площади большого треугольника, и для его покрытия нужно ровно столько же, то есть n^2 треугольничков. Кстати, и для разбиения квадрата на квадратики справедливы такие же рассуждения. Поэтому совпадение ответов – вовсе не совпадение, иначе и быть не могло! Но это только присказка – сказка впереди. Именно одинаковое количество квадратиков и треугольничков привело к созданию вот такой задачи – из двух частей:

1) По указанной схеме квадрат разделён на n^2 квадратиков, а треугольник – на n^2 треугольничков. Сначала в каждом квадратике сидело по мухе. Затем они перелетели в треугольнички так, что в каждом

треугольничке оказалось по одной мухе и любые две мухи, бывшие соседями в квадрате, оказались соседями и в треугольнике. При каких n такое возможно?

2) Тот же вопрос, если сначала мухи сидели в треугольничках, а потом перелетели в квадратики.

– А что значит «соседи»?

– Законный вопрос. И здесь наиболее логичными представляются два варианта:

***а*) соседними считаются квадратики либо треугольнички, имеющие общую сторону;**

***б*) соседними считаются квадратики либо треугольнички, имеющие общую сторону или хотя бы вершину.**

Поэтому фактически мы имеем дело с четырьмя задачами: 1*а*, 1*б*, 2*а* и 2*б*. Что ж, приступайте. В любом порядке, как вам удобней.

– А частные случаи можно рассматривать?

– Не возбраняется.

– Тогда есть первый ответ: во всех четырёх задачах перелёт возможен при $n=1$.

– Грандиозно! Нет сомнений, что если муха единственная, то и соседей у неё как не было, так и не стало. Но всё-таки сей факт представляется как-то очень уж тривиальным. Поэтому давайте в дальнейшем считать, что $n \geqslant 2$.

(*Долгая пауза*)

– Есть результат по варианту «*а*»!

– Для какой задачи – первой или второй?

– Для обеих!

– Ишь как! Это серьёзно. Ну, выходи, рассказывай.

– И квадратики, и треугольнички можно раскрасить в белый и чёрный цвета так, чтобы соседние по стороне фигурки были окрашены в разные цвета. Для квадрата это обычная шахматная раскраска, а для треугольника – все треугольнички, расположенные вершиной вверх, будут одного цвета, а вершиной вниз – другого. Так как соседи каждой мухи в исходном и итоговом положении остаются её соседями, то все мухи, что сидели изначально в фигурках одного цвета, после перелёта опять оказались в фигурках одного цвета.

У квадрата с шахматной раскраской либо поровну чёрных и белых квадратиков (при чётном n), либо квадратиков одного цвета на один больше, чем второго (при нечётном n). А для треугольника мы уже считали – там треугольнички одного из цветов сориентированы вершиной вверх, то есть их $\frac{n^2+n}{2}$, а треугольнички другого цвета сориентированы вершиной вниз, то есть их $\frac{n^2-n}{2}$. Так как при любом натуральном n эти значения заведомо не равны, то для чётных n мухам не удастся перелететь так, как требуется. А для нечётных должно выполняться равенство: $\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2-n}{2}=1$, откуда $n=1$, но этот случай уже рассмотрен. Значит, для задач 1*а* и 2*а* ответ одинаков: это $n=1$.

– Отлично. Обратите внимание, как пригодилось найденное здесь решение, в котором суммировалось количество треугольничков каждого вида по отдельности. А для варианта «*б*» есть достижения?

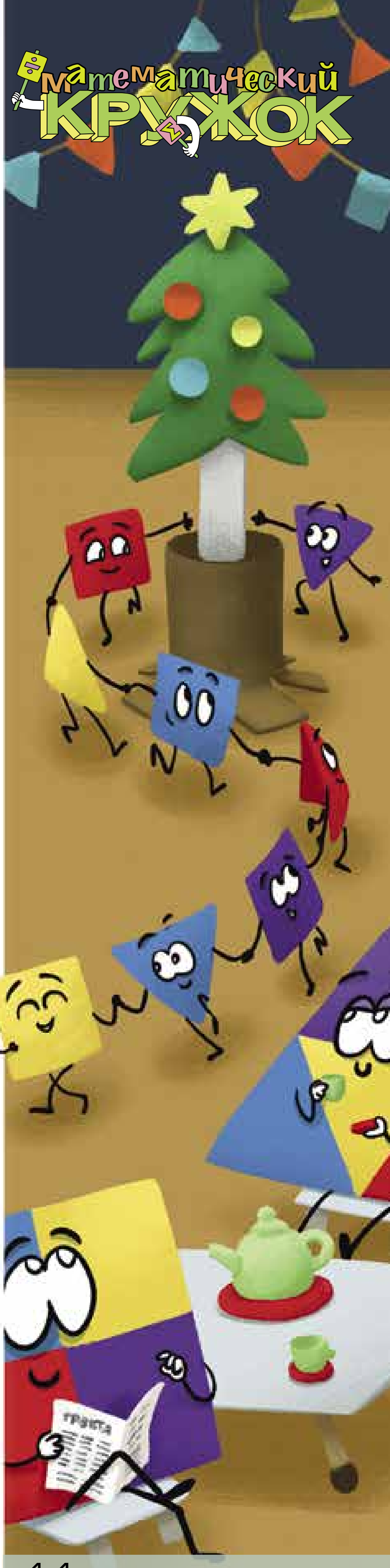
– У меня для задачи 2*б* получен ответ: перелёт возможет только для $n=2$ (если не считать тривиального $n=1$). Я рассуждал так. Если $n=2$, то все треугольнички являются соседями между собой, и все квадратики – тоже. Поэтому и перелетать они могут как им вздумается, лишь бы в итоге в каждом квадратике было по одной мухе. Если же $n\geqslant 3$, то только у трёх треугольничков (угловых) имеется по 3 соседа, а у остальных – больше (7 или 12).

– И что?

– А на квадрате есть целых 4 квадратика, имеющих трёх соседей. И потому хотя бы в один из них должна сесть муха, которая изначально сидела *не в угловом* треугольничке, и потому имела *больше* трёх соседей. Поэтому после перелёта не все её бывшие соседи остались соседями. Противоречие. Значит, при $n\geqslant 3$ перелёт невозможен.

– Блестяще! Итак, что нам осталось? Только задача 1*б*. Так как времени у нас не осталось, и новых идей пока не видно, оставим эту задачу на дом. Фигурковое занятие закончено, до свидания!

...Вот такая история. Как видим, её участники лихо одолели три задачи из четырёх, а последнюю обдумают позже. Но кто мешает читателю сделать то же самое прямо сейчас? Попробуйте! А потом сверьте свои результаты с решениями в следующем номере.



Художник Мария Усеинова

КРИВАЯ СОСУЛЬКА

Обычно сосульки вырастают прямыми. Но на фото сосулька свисает с карниза, плавно загибаясь. Как такое могло получиться? Считайте, что, пока сосулька росла, ветра не было.

Автор Александр Бердников

Фото автора
Художник Алексей Вайнер

Василий Птушенко

ПОЗИТИВ И НЕГАТИВ НА БЕЛОМ СНЕГУ

Помните стихотворение Генриха Сапгира «Принцесса и людоед»?

Погода была ужасная,
Принцесса была прекрасная...
А может, всё было наоборот?..
Погода была прекрасная,
Принцесса была ужасная...

Глядя на фотографии, помещённые на этой странице, вполне можно начать сочинять что-то подобное:

Дорога бежит чёрная
По белым полям мартовским...

Или наоборот:

Дорога бежит белая
По чёрным полям мартовским...

Словно перед нами негатив и позитив одного и того же снимка. Хотя и то, и другое – реальные изображения реальных явлений. Как же так могло получиться? Тем более что у обеих картин – одни и те же «авторы»: снег, солнце и колёса автомобилей. Попробуйте подумать сами и сформулировать свою версию, прежде чем перевернёте страницу.

А теперь сверьте свою версию с нашей. Сразу предупредим: мы не утверждаем, что только наша – верная! Может быть, вы придумали что-то не менее правдоподобное.

Оглянись вокруг

Можно догадаться, что хотя «авторы» обеих картин – одни и те же, но творили они в разных условиях. Чёрный след на белом фоне явно создавался весной. Скорее всего, проехавший по заснеженной просеке грузовик оставил на ней грязные следы (из песка, глины, щепок). И снег под этой грязью быстро протаял. На весеннем солнце достаточно тоненькой веточки (даже не обязательно чёрной, а просто чуть темнее окружающего снега), чтобы снег начал таять вокруг неё.

В отличие от чёрных следов на снегу, белые следы на тёмных пространствах полей отнюдь не свежие. Наоборот, это слежавшийся снег, который уплотняли одна пара колёс за другой, всю зиму. Почему же снег от колёсной грязи ещё тогда не протаял? Так ведь зимой солнце слабое, оно даже вокруг чёрных стволов крупных деревьев снег не растапливает до поры до времени. Да и снегопады зимой чаще бывают: выпал свежий снег и прикрыл всю грязь, вместе с уплотнённой снежной колеёй. Проедет следующая машина – ещё уплотнит. И так – слой за слоем, получается плотный слежавшийся снег, почти лёд.

Вот и почти всё объяснение. Но самый интересный вопрос возникает, если продумать «историю следов» ещё на шажок вперёд: а почему лёд или плотный снег тают медленнее, чем рыхлый? Ведь снег – прекрасное «одеяло», через которое очень медленно выходит тепло от земли. Поэтому под ним и сохраняется жизнь всю зиму, а вот бесснежные зимы – беда и для растений, корни, побеги или семена которых зимуют под снегом, и для животных. И чем более рыхлый снег, тем лучшее из него одеяло. Так что тепло внутрь этого одеяла должно проникать с тру-

дом, хоть снизу, от земли, хоть сверху, от солнца. Но... тепло-то проникает медленно, а зато сверху начинает капать вода. Снег, тающий сверху, превращается в воду и пропитывает весь сугроб под собой, как губку, разнося по ней солнечное тепло. Кстати, это хорошо видно, когда в марте бывают дожди: в пасмурную погоду, под дождём снег «съёживается» и исчезает даже быстрее, чем под солнцем. А вот лёд – нет. Похожий пример: кусок рыхлого сахара-рафинада тает в чашке горячего чая гораздо быстрее, чем леденец.

Эта особенная «живучесть» уплотнённого снега хорошо известна: весной в лесах дольше всего остаются белыми тропинки, по которым много ходили. Лыжня превращается из желобков в рельсы. Следы-столбики остаются на снегу от ног прошедшего по нему человека не только после оттепели, но и просто после сильного ветра. Словно проявляется негатив, запечатлённый когда-то на снегу.

Тем, кто встречался только с современными цифровыми фотоаппаратами, уже может быть трудно себе представить, о чём идёт речь. Но все предшествующие полтора века, с момента появления фотографии, получение чёрно-белых снимков было устроено так: сначала на фотопластинке или фотоплёнке возникало изображение фотографируемого предмета, в котором было «всё наоборот» – его светлые участки изображались тёмным, а тёмные – светлым. Это изображение называлось негативным, а сама фотоплёнка или фотопластинка – негативом. После этого с негативов «делали отпечатки» – засвечивали через них фотобумагу, и на ней оказывалось уже правильное изображение: белое было белым, чёрное – чёрным. Такое изображение называлось позитивным, а сама фотокарточка – позитивом.

Фото автора
Художник Ольга Демидова

Материал подготовил
Михаил Евдокимов

НЕОБЫЧНЫЕ

Обычно в геометрических задачах на построение разрешается использовать только циркуль и линейку, на которой нет делений. Такие задачи решали ещё древние греки. Мы же хотим показать вам несколько необычных задач на построение, где нельзя использовать циркуль.

1. Построение одним угольником

На плоскости нарисована окружность. Постройте её центр, если у вас есть только угольник и карандаш.

2. Построение одной монетой

Пятирублёвую монету положили на лист бумаги и обвели по контуру. Можете ли вы построить центр получившейся окружности, если у вас нет ни циркуля, ни линейки, а только эта пятирублёвая монета? (Считаем, что, двигая монету, можно построить окружность, касающуюся другой окружности, а также окружность, проходящую через две заданные точки, если они не лежат далеко друг от друга).

ПОСТРОЕНИЯ

3. Построение без инструментов

Дан квадратный лист бумаги. Разделите диагональ квадрата на 3 равные части (лист можно сгибать, в том числе по любому отрезку с концами на краях бумаги, и разгибать обратно; после разгибания на бумаге остаётся след от линии сгиба).

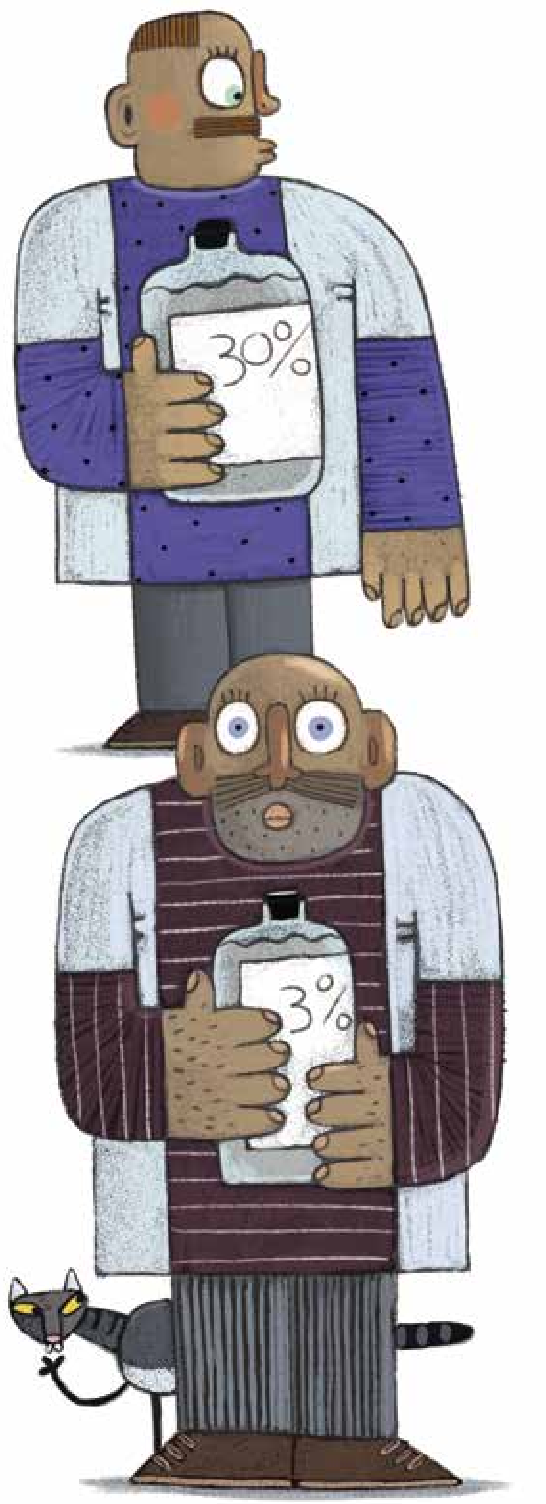
4. Построение двусторонней линейкой

На листе бумаги отмечены вершины правильного пятиугольника. Затем две соседние вершины стёрли. Как восстановить исходный пятиугольник, имея лишь обычную двустороннюю линейку без делений?

Автор задач 2 и 4 – М. Евдокимов
Художник Екатерина Ладатко

Игорь Акулич

МАТЕМАТИК В ПАРИКМАХЕРСКОЙ



Яков Исидорович Перельман, классик-популяризатор математики и других наук, в своей книге «Занимательная алгебра» описывает такой случай:

«...Однажды в парикмахерской подошёл ко мне мастер с неожиданной просьбой:

– Не поможете ли нам разрешить задачу, с которой мы никак не справимся?

– Уж сколько раствора испортили из-за этого! – добавил другой.

– В чём задача? – осведомился я.

– У нас имеется два раствора перекиси водорода: 30-процентный и 3-процентный. Нужно их смешать так, чтобы составился 12-процентный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции...

Мне дали бумажку, и требуемая пропорция была найдена. Она оказалась очень простой. Какой именно?»

Конечно, Я. И. Перельман не ограничился постановкой вопроса, но и привёл решение:

«Задачу можно решить и арифметически, но язык алгебры приводит здесь к цели проще и быстрее. Пусть для составления 12-процентной смеси требуется взять x граммов 3-процентного раствора и y граммов 30-процентного. Тогда в первой порции содержится $0{,}03x$ граммов чистой перекиси водорода, во второй $0{,}3y$, а всего $0{,}03x+0{,}3y$.

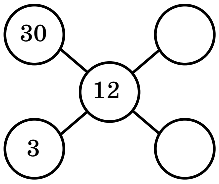
В результате получается $(x+y)$ граммов раствора, в котором чистой перекиси должно быть $0{,}12(x+y)$.

Имеем уравнение $0{,}03x+0{,}3y=0{,}12(x+y)$.

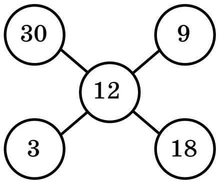
Из этого уравнения находим $x=2y$, то есть 3-процентного раствора надо взять вдвое больше, чем 30-процентного».

Оказывается, можно решить задачу *ещё проще и быстрее* – методом, получившим народное название «правило креста». Для этого нарисуем на листе бумаги четыре отрезка, образующие косой крест, предусмотрев пять пустых мест (кружочков), где будут впоследствии записываться числа (см. рисунки на с. 19).

Далее заполняем пустоты так: в два левых кружочка (верхний и нижний) записываем концентрации имеющихся растворов (в процентах), а в центральный – нужную нам итоговую концентрацию. Получится следующее (рисунок справа).



Теперь, продвигаясь направо вдоль линий, образующих крест (с «северо-запада» на «юго-восток» и с «юго-запада» на «северо-восток»), находим разности (по абсолютной величине, без учёта знака!) и записываем их в оставшиеся пустые кружочки. Так как $30-12=18$, то в правый нижний кружочек записываем 18, и, поскольку $12-3=9$, в правый верхний кружок помещаем 9. Вот что вышло (рисунок справа).



Наконец, просто посмотрим на крест и «прочитаем» результат. На одном уровне с числом 30 написано число 9, а на одном уровне с числом 3 – число 18. Следовательно, на каждые 9 частей 30-процентного раствора надо взять 18 частей 3-процентного раствора, а иначе говоря – вдвое меньше 30-процентного раствора, чем 3-процентного. И всё!

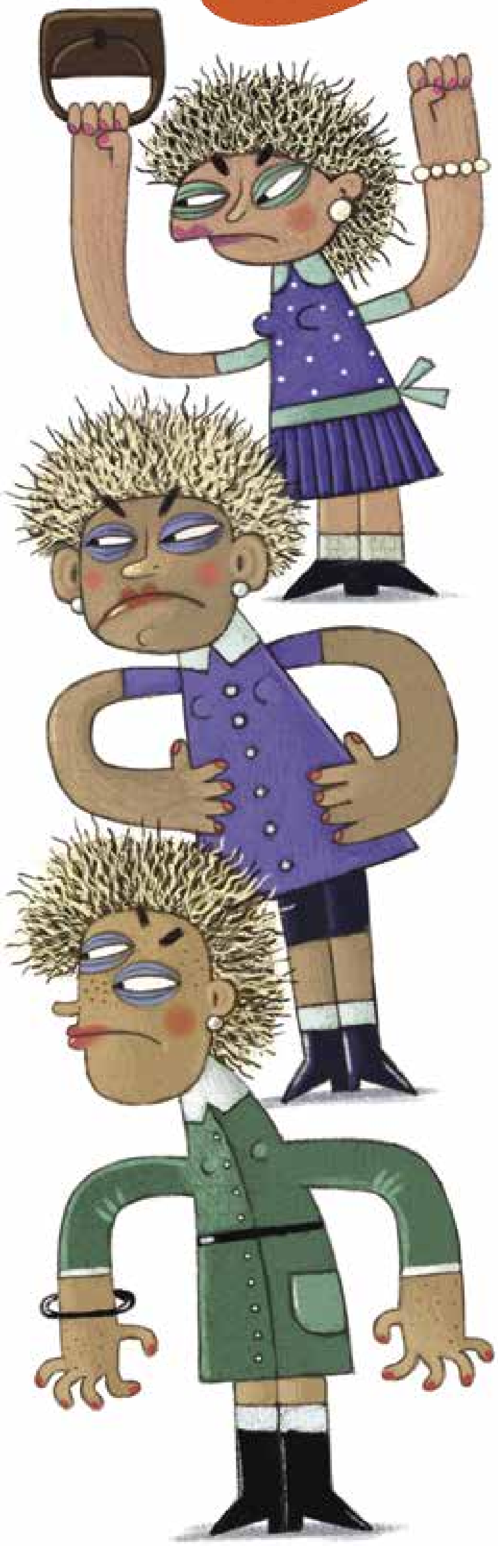
Попробуйте доказать, что правило креста даёт верный результат (если не получится – загляните в решения). Только не забывайте, что итоговая концентрация должна быть *промежуточной* между двумя имеющимися. Иначе, сколько ни смешивай, толку не добьёшься.

А чтобы читатель по достоинству оценил эффективность правила креста, предлагаем одолеть с его помощью задачу, взятую из другой «классической» книги – «Математической шкатулки» Ф. Нагибина:

«*Имеется 735 г шестнадцатипроцентного раствора йода в спирте. Нужно получить десятипроцентный раствор йода. Сколько граммов спирта нужно долить для этого к уже имеющемуся раствору?*».

Рекомендуем решить задачу и «обычным» способом, а затем сравнить трудозатраты.

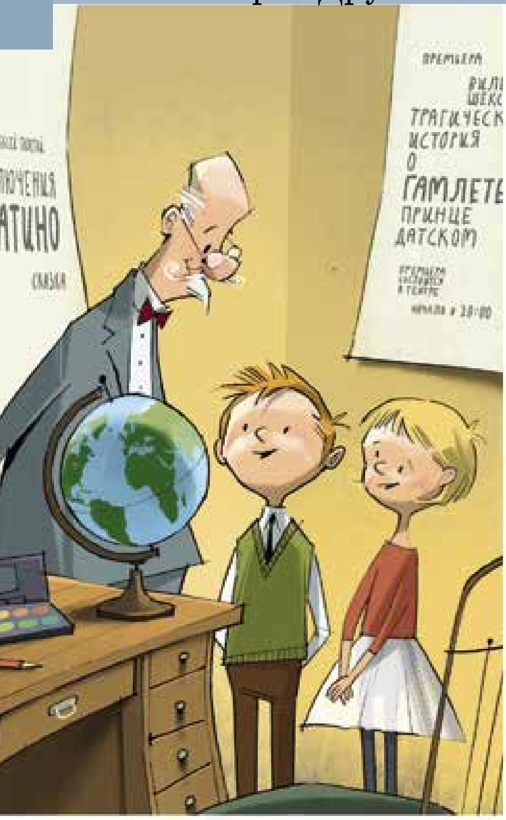
В заключение добавим, что больше всего настораживают в описанной Перельманом истории слова парикмахера «Уж сколько раствора испортили из-за этого!». Видимо, попавшие в затруднение мастера пытались приготовить раствор, смешивая компоненты наугад, но после испытаний на клиентах понимали, что получалось не совсем то... Каково было самим клиентам – думать как-то не хочется. Ничего не поделаешь – поиск истины порой требует жертв!



Художник Елена Цветаева

БЕДНЫЙ ЙОРИК

Борис Дружинин



В школе начал работать кружок юных следователей.

– Современные детективы слишком примитивны, – рассуждал руководитель кружка следователь прокуратуры Валентин Семёнович. – Только погони да стрельба. Без мобильных телефонов оперативники пропадут. К услугам сыщиков компьютеры и разные базы данных. Практически никакой работы головой. Настоящий детектив – это «Преступление и наказание» Достоевского, а Порфирий Петрович – идеальный следователь. Или «Гамлет» Шекспира. Там так всё закручено... Впрочем, предлагаю сходить в театр, посмотреть «Гамлета», а потом подробно разобрать.

И юные следователи отправились в театр смотреть легендарную пьесу Вильяма Шекспира «Трагическая история о Гамлете, принце датском». Кстати, это самая длинная пьеса Шекспира – в ней 4042 строки и 29 551 слово.

А главный режиссёр этого театра, Афанасий Спиридонович Курбский, в своё время ставил спектакль «Буратино» с Лизой в роли Мальвины. Вот он и пригласил Лизу и Вову в театр, как раз на «Гамлета».

Друзья отправились на спектакль пораньше, чтобы побывать за кулисами знаменитого театра. По пути они обсуждали домашнее задание по географии. А задание звучало так:

Где окажется человек, если будет всё время двигаться на восток? А если он будет всё время двигаться на северо-восток?

– Какие-то простенькие вопросы, – удивлялся Вова. – Тут же всё ясно. Раз Земля имеет форму шара, то человек вернётся туда, откуда начинал движение.

– Не торопись с выводами, – пробормотал шедший следом робот Квантик, до этого молча повторявший текст пьесы Шекспира.

– Ты, Квантик, чересчур умный, – ответила Лиза. – Шар – он и есть шар.

Квантик на эти слова не ответил, так как принялся освежать в памяти другие произведения великого британского драматурга.

Около служебного входа в театр беседовали двое.

– Я слышал, – сказал высокий, – тебя повысили.

– «Повысили», – с иронией ответил усатый. – Дали роль второго солдата вместо роли третьего. Был бы жив мой покойный отец, я бы давно самого Гамлета играл, а так ... – Усатый с огорчением махнул рукой.

Главный режиссёр водил друзей по театру.

– Вот это гримёрка великого артиста Ивана Петухова, – пояснял Афанасий Спиридонович. – Его, к сожалению, уже нет с нами, но в гримёрке обосновался его сын Петя. Он второго солдата сегодня в спектакле играет.

– А глобус тут зачем? – полюбопытствовала Лиза.

– Старик хотел отметить все места, где ему довелось выступать, но не успел. Но Петька сегодня его забрать обещал. Он музей своего отца организовать хочет.

За десять минут до начала спектакля в кабинет к режиссёру прибежал взволнованный Чернов, исполняющий роль Гамлета. Тот самый высокий, которого видели ребята у служебного входа.

– Афанасий Спиридонович! – закричал он. – Кто-то украл череп. Моя репутация под угрозой! Как же я буду говорить «Бедный Йорик»?

Выход нашёл мастер на все руки Петрович. Он сбегал на ближайший рынок, купил кочан капусты и вырезал из него нечто, напоминающее череп. Но Чернов так разволновался, что вместо «Быть или не быть?» сказал «Есть или не есть?».

После спектакля за дело взялся Валентин Семёнович. По его приказу юные следователи с разрешения Афанасия Спиридоновича внимательно осмотрели все служебные помещения театра, но черепа не нашли. Сам Афанасий Спиридонович стоял у служебного выхода и вежливо просил актёров показать содержимое их сумок.

– Как же вы его упустили? – неожиданно воскликнул Вова. – Он уже мимо вас прошёл и одевается в гардеробе. А череп он спрятал…

Как Вова догадался, где спрятан череп?

Череп Йорика торжественно вручили бедному Чернову, а незадачливый воришка на следующий день был с позором уволен из театра.

Художник Алексей Вайнер

Александр Рыбаков

Как чередуются календари?

Речь у нас пойдёт не о календаре-программе для телефона или компьютера, а о том, что висит на стене: о табличке, где для каждой даты какого-то года указано, какой это день недели.

Однажды Петя задумался, почему вообще календари разных лет отличаются друг от друга. Может быть, календарь 2017 года вскоре повторится? А сколько всего может быть разных календарей? Вот как рассуждал Петя.

Как известно, если номер года не делится на 4, то в нём 365 дней, а к каждому году, номер которого делится на 4, добавляют один «лишний» день – 29 февраля. Такой год называется *високосным*.

Если мы знаем, каким днём недели будет какая-то конкретная дата, то можем восстановить и весь календарь за этот год. Первое января может быть любым днём недели, а годы бывают двух типов: простые и високосные. Выходит, что разных календарей $2\cdot 7 = 14$? Но как именно они чередуются?

Пусть 1 января простого года была пятница. С какого дня недели начнётся следующий год? Если бы год состоял из целого числа недель, то следующий год начинался бы с того же дня недели. Но дней в простом году $365 = 364 + 1 = 52\cdot 7 + 1$, то есть 52 недели и **ещё один день**. Значит, в нашем примере следующий год начнётся с субботы.

А в високосном году дней $366 = 364 + 2 = 52\cdot 7 + 2$. Значит, если високосный год начинался, скажем, с пятницы (как 2016 год), то следующий год начнется не с субботы, а с воскресенья.

Теперь легко составить такую таблицу (високосные годы выделены жирным шрифтом):

год	*1-е января*
2016	пятница
2017	воскресенье
2018	понедельник
2019	вторник
2020	среда
2021	пятница
2022	суббота
2023	воскресенье

Тут Петя заметил, что 2023 год, как и 2017, начнётся с воскресенья. Оба эти года – простые, значит, их календари полностью совпадут! Петя побежал к старшему брату.

– Я открыл закон! Календари повторяются каждые шесть лет!

– Э, нет! – возразил Николай. – Где гарантия, что и другие календари повторятся через 6 лет?

Стал Петя таблицу продолжать:

год	*1-е января*
2024	понедельник
2025	среда
2026	четверг
2027	пятница
2028	суббота
2029	понедельник
2030	вторник
2031	среда
2032	четверг
2033	суббота
2034	воскресенье
2035	понедельник
2036	вторник
2037	четверг
2038	пятница
2039	суббота
2040	воскресенье
2041	вторник
2042	среда
2043	четверг
2044	пятница

Увы, уже календарь 2019 года через шесть лет не повторяется! Подумав, Петя понял, почему: между 2017 и 2023 годом был всего один високосный год, а между 2019 и 2025 – целых два, так что за этот период пройдёт на один день больше, и 2025 год начнётся не со вторника, а со среды.

Петя хотел заполнять таблицу и дальше, но подошедший старший брат сказал:

– Хватит, дальше 2044 года идти не надо! Смотри, 2044 год високосный, начинается с пятницы, 2016 – тоже. Значит, календари этих лет совпадут, а дальше последовательность календарей будет просто повторяться. Если два года отстоят на $4 \cdot 7 = 28$ лет, то в этот период поместятся ровно 7 високосных годов и $28 - 7 = 21$ простой. За каждый високосный год день недели сдвинется на 2, за каждый простой год – на 1, а всего за это время он сдвинется на $2 \cdot 7 + 21 = 35$ «шагов». Это ровно пять недель, так что день недели останется прежним, и календарь повторится.

В заключение признаемся, что на самом деле в нашем календаре годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, являются не високосными, а простыми, и нарушают полученную нами закономерность. Ближайшим таким годом будет 2100-й.

Художник Динара Галиева

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР

8 и 22 октября 2017 года состоялся осенний тур XXXIX Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант, 8–9 классы

1 (3 балла). Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны?

Борис Френкин

2 (4 балла). Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, ..., последнее делится на 2?

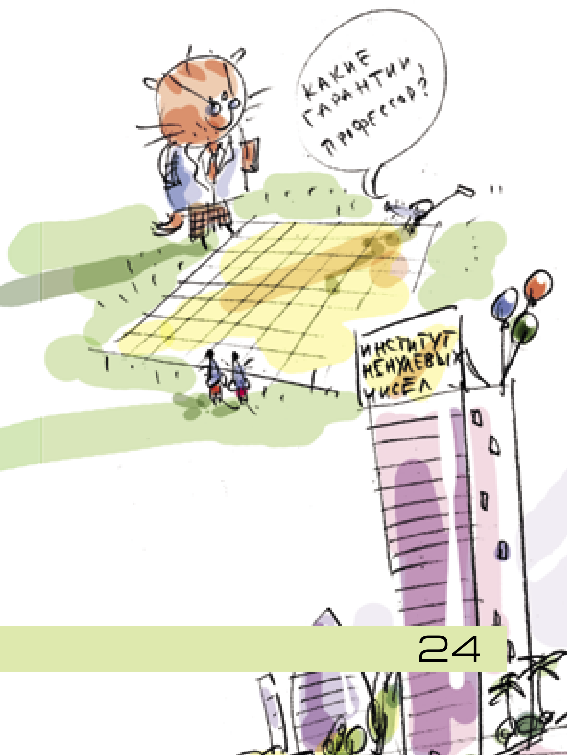
Павел Кожевников

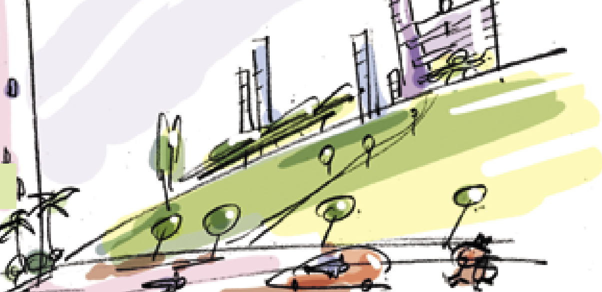
3 (4 балла). В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Рустэм Женодаров

4 (5 баллов). На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26?

Михаил Евдокимов





5 (5 баллов). Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более $1/3$ от её длины.

Михаил Евдокимов

Сложный вариант, 8–9 классы

1 (4 балла). Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравновесились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара?

Григорий Гальперин

2 (4 балла). Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?

Егор Бакаев

3 (6 балла). Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за июль, на сколько – за август и на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть если он предсказывал, что курс увеличится на $x\%$, то курс падал на $x\%$, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

Алексей Заславский

4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

а) (1 балл) 99 попыток;

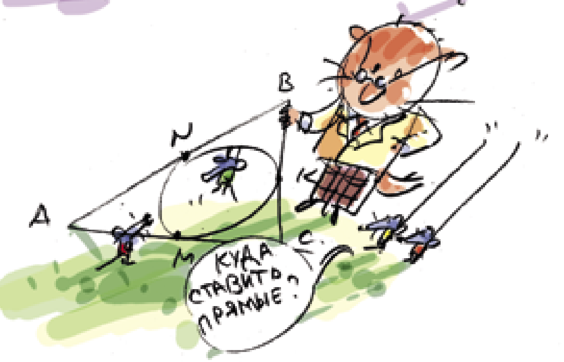
б) (3 балла) 75 попыток;

в) (4 балла) 74 попыток?

Алексей Лебедев,
Александр Шаповалов

5 (9 баллов). Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n. Могло ли получиться число, записываемое только единицами?

Фёдор Петров



6 (9 баллов). Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках N, K и M соответственно. Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

Михаил Евдокимов

7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседние по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесённом доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры

а) (5 баллов) 20×20 клеток;

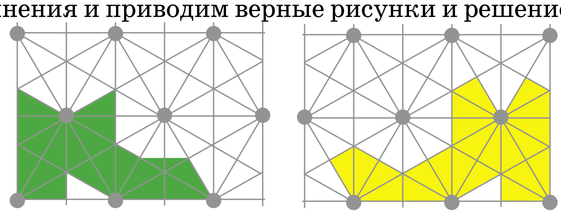
б) (5 баллов) 50×90 клеток?

Михаил Мурашкин

Художник Сергей Чуб

ПОПРАВКА

В статье «Башмаки в корзине» из «Квантика» № 10, 2017, две пары башмаков нарисованы с ошибкой (некоторые части башмаков не дорисованы). В результате головоломка упрощается и имеет не единственное решение. Приносим извинения и приводим верные рисунки и решение.



НАШ КОНКУРС («Квантик» № 10, 2017)

6. *Пятачок и Винни-Пух вышли из дома Пятачка и пошли купаться на озеро, двигаясь с одной и той же скоростью. Через 15 минут, на полпути от дома до озера, Пятачок обнаружил, что забыл плавки, и побежал с вдвое большей скоростью домой и обратно к озеру, нигде не задерживаясь по дороге. Насколько позже Винни-Пуха Пятачок оказался на озере?*

Ответ: 7,5 минут. Через 15 минут после того, как Пятачок обнаружил, что плавок нет, Пух как раз дойдёт до озера, а Пятачок, бегущий вдвое быстрее, снова окажется на полпути к озеру. Значит, ему останется 7,5 минут до озера.

7. *Чему равняется сумма ТЫР + ПЫР, если известно, что ТЫР + ПЫР = 8×ДЫР? (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: Поскольку *ЫР* × 2 и *ЫР* × 8 должны кончаться одними и теми же двумя цифрами, *ЫР*×(8–2)=*ЫР*×6 кончается двумя нолями (делится на 100), а это возможно только при *ЫР* = = 50. Тогда *ТЫР* + *ПЫР* не больше 950 + 850 = =1800, а *ДЫР* не больше 1800 : 8 = 225. Значит, *Д* = 1, а *ТЫР* + *ПЫР* = 8 × *ДЫР* = 8 × 150 = 1200. Это действительно возможно, если *Т* и *П* равны (в любом порядке) 9 и 2, 8 и 3 или 7 и 4.

8. *Провожая трёх своих внуков к родителям, бабушка дала им в дорогу три пирога: с картошкой, с вареньем и с грибами. В поезде пироги были съедены, причём каждый пирог ели двое внуков. При этом тому из внуков, который терпеть не может пирогов с картошкой, не досталось и пирога с грибами. Сашенька не ел пирога с вареньем. Кто какие пироги ел, если Вовочка участвовал в поедании большего числа пирогов, чем Петенька?*

Ответ: Вовочка ел все пироги, Сашенька – с грибами и с картошкой, Петенька – с вареньем.

Для каждого пирога его не ел ровно один из внуков. Для пирога с вареньем это Сашенька, для пирогов с картошкой и грибами – один и тот же внук. Если это Сашенька или Вовочка, то Петенька участвовал в поедании всех трёх пирогов, то есть не меньшего их числа, чем Вовочка. Противоречие. Значит, не ел пирогов с картошкой и грибами именно Петенька.

9. *Известно, что несколько небольших тяжёлых ящиков можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, но нельзя увезти на меньшем количестве таких грузовиков. Докажите, что этот груз не удастся увезти а) на трёх 7-тонных грузовиках; б) на трёх 9-тонных грузовиках.*

Решим сразу п. б). Пусть груз можно увезти на трёх 9-тонных грузовиках. Покажем, как из каждого 9-тонного грузовика переложить все ящики в два 6-тонных – получим противоречие.

Так как ящики можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, то каждый ящик весит не более 6 тонн. Будем перемещать по очереди ящики с 9-тонного грузовика в 6-тонный, беря каждый раз самый тяжёлый ящик, пока либо они не кончатся, либо 6-тонный грузовик не загрузится хотя бы наполовину. Это удастся сделать, потому что первый ящик поместится, а вес каждого следующего ящика меньше, чем суммарный вес уже лежащего груза в 6-тонном грузовике.

Если ящики в 9-тонном остались, то переложим их все во второй 6-тонный грузовик.

10. *Три прямые дорожки парка образуют треугольник. В парке три входа – они расположены в серединах дорожек, а в каждой вершине расположен фонарь. От каждого из входов нашли кратчайшее расстояние до наиболее удалённого фонаря, если идти по дорожкам. Оказалось, что два из трёх полученных чисел равны. Обязательно ли тогда длины каких-то двух дорожек равны?*

Ответ: нет. Если стороны треугольника равны 3, 4 и 5, то получатся числа $5\frac{1}{2}$, 5 и $5\frac{1}{2}$.

ЖЕЛЕЗНАЯ ДОРОГА («Квантик» № 11, 2017)

1. «Поют колёса – тра-та-та» – название рассказа Виктора Драгунского. На самом деле они поют «тата́-тата́ (пауза), тата́-тата́ (пауза)...» Это колёса стукаются о стыки рельсов.

Рельсы положены не вплотную друг к другу, а так, что между их концами (стыками) остаётся пустое место (зазор) 2–3 см. Каждое колесо, проехав зазор, ударяется о край следующего рельса – получается звук «та». Но у железнодорожного вагона с каждой стороны по два колеса один за другим – отсюда «тата». И, наконец, за «задними» колёсами одного вагона после маленького перерыва стык проезжают передние колёса следующего вагона – поэтому «тата» удваивается. Потом пауза – колёса едут к следующему стыку.

Если вы стоите снаружи от поезда, в паузе чётко слышно похожее на эхо более тихое «тата-тата» от следующего стыка. Длина вагона почти равна длине рельса, поэтому время между громким «тата-тата» и «эхом» маленькое. Сидя внутри поезда близко к середине вагона, можно слышать два набора «тата-тата» почти одинаковой громкости – от стыка впереди и стыка сзади. Стук более далёких колёс сливается в гул.

Зачем нужны зазоры? С повышением температуры металлы (как и почти все тела) расширяются. В жару рельс «разбухает», удлиняется – и тем сильнее, чем он длиннее сам по себе. Зазоры между стыками уменьшаются, но рельсы не наезжают друг на друга и не перекашиваются.

2. По темпу «песни»: чем быстрее идёт поезд, тем в более быстром темпе поют колёса. Нужно измерить продолжительность «такта» – «тата-тата (пауза)». Чтобы получилось точнее, можно отсчитать, например, 10 тактов (и измеренное время поделить на 10). Это будет время, в течение которого вагон проезжает один рельс. Длина рельса 25 м, поделив её на время «такта», узнаем скорость поезда.

Заметим, что этот способ годится не везде. На некоторых участках железных дорог сделаны бесстыковые пути – по несколько рельсов сваривают в длинные «плети» 300–350 м длиной или даже больше. Такие длинные рельсы меньше изнашиваются от ударов колёс, и поезд по ним идёт тише, но зато для них требуется гораздо более тщательная подготовка полотна (щебня, шпал), и за ними нужно внимательно следить в очень жаркую или холодную погоду.

3. Электровоз работает от проводов, по которым идёт ток – так же, как и трамвай. Поэтому сверху у электровоза «усы» – токосниматели. У электричек «усы» есть не только у первого вагона, а у нескольких по всему поезду. А тепловоз и паровоз работают автономно, сами по себе, но топливо, которое они используют для своих двигателей – разное. У тепловоза двигатель как у машины, точнее, как у грузовиков или автобусов – работает на дизельном топливе: газы, образующиеся при сгорании топлива, расширяются и двигают поршни, а они заставляют вращаться колёса тепловоза. У паровоза же поршни двигает просто нагретый водяной пар, а нагревается вода в обычной печке, которую топят углём. Угля надо много, поэтому у паровоза обычно сзади есть специальный дополнительный вагон – «вторые полпаровоза», называется тендер. В нём хранятся запасы угля для печки и воды для котла. Дым из паровозной трубы – густой и тёмный, с кусочками сажи, а из трубы тепловоза – маленький светлый дымок, хотя тоже неполезный: в нём – продукты сгорания бензина. А у электровозов ни дыма, ни трубы нет вообще.

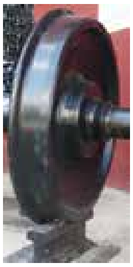
Локомотив метро – тоже электровоз, но без «усов» сверху, потому что контактный провод проходит в метро не сверху, а сбоку; на станциях – под платформой. Поэтому, если кто-то упал на рельсы метро, ток в проводе отключают, и все поезда на линии останавливаются.

Тепловоз

Паровоз с тендером

Электровоз

4. Подсказка – в рисунке поворачивающей колёсной пары: профиль железнодорожного колеса (то есть вид его сбоку) – имеет довольно сложную форму, колесо шире (имеет больший радиус) у внутреннего края и у́же – у внешнего. На закруглённом участке пути колёсная пара чуть на-



клоняется: «внутреннее» колесо оказывается ниже и опирается на рельс своим внешним, более узким краем, а внешнее колесо – наоборот, более широким внутренним краем. Из-за этого радиусы колёс на повороте разные. Чтобы колёса не соскочили с рельса, по внутреннему краю каждого колеса проходит совсем широкий ограничитель – реборда. Подробное описание и анимацию, как поворачивает поезд, см. на сайте «Математические этюды», www.etudes.ru/ru/etudes/train-wheelset

РУКИ-КРЮКИ («Квантик» № 11, 2017)

Рычаг 2-го рода в руке просто не разместить. Например, в случае с предплечьем получилось бы, что груз должен размещаться где-то посредине кости (так мы делаем, например, когда несём охапку дров), а усилие – прилагаться в районе кисти. Но к чему будет крепиться мышца, тянущая кисть? К плечам, натягиваясь, словно перепонка в крыле птеродактиля? А куда – остальные мыщцы? Нет, все плечи рычагов и все мышцы, ими управляющие, должны помещаться внутри компактной конечности. Однако, если не ограничиваться конечностями, в нашем организме всё же можно найти рычаг 2-го рода: в его роли выступает нижняя челюсть, смыкаемая жевательной мышцей, когда мы разгрызаем что-то особенно твёрдое задними зубами.

Чтобы сделать дающий большой выигрыш в силе рычаг 1-го рода, надо снабдить кость добавочным длинным плечом, торчащим назад. Оно тоже будет за всё цепляться, и, чтобы дотянуть мышцы до его конца, опять придётся натягивать сухожилие в обширной перепонке.

По правде говоря, в нашем теле есть рычаги 1-го рода: это, например, локтевая кость вместе с прикрепляющейся к ней трёхглавой мышцей плеча (трицепсом). Посмотрите на свой локоть: локтевой отросток (собственно «локоть») торчит назад от места соединения костей в суставе, и мышца крепится как раз к этому отростку. Но «силовое» плечо этого рычага намного меньше «грузового», то есть и здесь мы не выигрываем в силе, а проигрываем: затрачиваем большое усилие, получая на выходе маленькое.

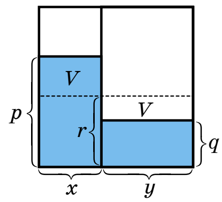
Но если мышца мощная и способна провернуть рычаг даже в невыгодном положении, проигрыш в силе оборачивается выигрышем в скорости: пока короткое плечо сместится на 1 см, длинное «пролетит» гораздо большее расстояние (во столько раз большее, во сколько раз одно плечо длиннее другого). Это значит, что рукой мы можем быстро схватить любой предмет, а ногами – быстро-быстро отталкиваться от земли, когда бежим или идём. Скорость в природе намного важнее силы, и уж если нельзя достичь сразу и того, и другого, лучше «выбрать» первую. Что эволюция и сделала.

ЗАВИСШИЙ ШАРИК («Квантик» № 11, 2017)

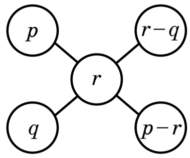
Тут всё дело в ленточке. Пока шарик упирался в потолок, его грузоподъёмность была больше суммы его веса и веса ленточки. Когда шарик опустился, его грузоподъёмность стала чуть меньше этой суммы, но всё ещё больше его веса. Часть ленточки, которая легла на пол, уменьшила груз, сравняв его с грузоподъёмностью шарика и позволив ему зависнуть в воздухе.

МАТЕМАТИК В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

Проверка правила креста



Пусть мы взяли x частей раствора с концентрацией $p\%$ и y частей – с концентрацией $q\%$, причём $p>q$. На рисунке справа эти части изображены в виде двух столбцов одинаковой высоты, а голубым выделены доли, занимаемые перекисью водорода. Доля r перекиси в итоговой смеси отмечена пунктиром. Поскольку общее количество перекиси не изменилось, объёмы, отмеченные буквой V, совпадают.

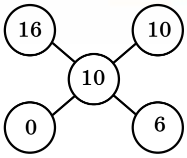


Получаем условие $x(p-r)=$ $=y(r-q)$. Применим правило креста (см. рисунок).

Оно требует, чтобы на $r-q$ частей с концентрацией p приходилось $p-r$ частей с концентрацией q. Подставим $x=r-q$ и $y=p-r$ в найденное условие: $(r-q)\cdot(p-r)=(p-r)\cdot(r-q)$. Оно выполнено, а значит, правило креста работает.

Решение задачи Ф. Нагибина

Сначала – «обычное» решение. В 735 граммах 16-процентного раствора содержится $735\times$ $\times 0{,}16=117{,}6$ г йода. После разбавления спиртом раствор стал 10-процентным, то есть это же количество йода составляет уже 10% от всего количества. Значит, количество раствора после разбавления составило $117{,}6:0{,}1=1176$ г, и надо добавить $1176-735=441$ г спирта.



Теперь используем правило креста. Так как чистый спирт – это раствор йода с концентрацией 0%, рисуем крест (см. рисунок). Видим, что на каждые 10 частей 16-процентного раствора надо долить 6 частей чистого спирта. Поэтому спирта нужно $735\times0{,}6=441$ г. Проще некуда!

БЕДНЫЙ ЙОРИК

• Если человек будет двигаться строго на восток, то в конце концов он окажется в исходной точке. Если человек будет двигаться на северо-восток, то рано или поздно окажется на Северном полюсе. Действительно, чтобы продвинуться на 1 м на северо-восток, надо продвинуться на 70 см на восток и на 70 см на север. Так с каждым шагом человек постепенно приближается к северному полюсу. Это легко проверить по глобусу.

• Череп стащил Пётр Петухов, недовольный распределением ролей и завидовавший Чернову. Он разрезал по экватору глобус, положил туда череп и склеил половинки скотчем. Но сделал это неаккуратно, так, что половинки Африки не стыковались. Это легко заметить, если сравнить изображения глобуса на картинках.

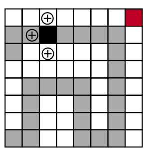
XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1. Четыре положительны, шесть отрицательны. Если бы среди имеющихся чисел нашлись четыре одного знака, то уже они дали бы шесть сумм этого знака. Поэтому есть три числа одного знака и два – другого. Отсюда – ответ.

2. Да, скажем, $100!-100$, $100!-99$, ..., $100!-2$.

3. Рассмотрим 26-ю, 52-ю и 78-ю монеты. Ясно, что среди них ровно одна фальшивая. Сравнение любых двух монет из трёх выявит её.



4. (*Авиэль Боаг, Израиль*). Можно. Хватит даже 25 ходов. Будем идти по серому пути на рисунке.

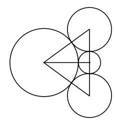
Когда металлоискатель сработает впервые, клад сможет находиться не более чем в трёх клетках. Например, если он сработал в чёрной клетке, то подозрительными будут три клетки, помеченные плюсами. Из них легко выбрать нужную за два хода. Если металлоискатель впервые сработает на 24-м ходу, подозрительных клеток останется две, а на 25-м – одна, и оставшихся ходов хватит. Если металлоискатель не сработает ни разу, то мина – в красной клетке.

Как показала проверка на компьютере, 24 ходов недостаточно.

5. Окружность лежит в 8-клеточной рамке, окружающей указанную клетку, иначе расстояние от точки окружности вне рамки до дальней вершины исходной клетки будет больше 2 – диаметра окружности. Поэтому окружность разбивается на 8 дуг чередующихся цветов (белые дуги могут быть нулевыми). Заметим, что каждая чёрная дуга не меньше 60°, так как стягивающая её хорда не меньше стороны клетки, то есть радиуса окружности. Поэтому 4 чёрные дуги составляют не менее $\frac{2}{3}$ длины окружности.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1. Удастся. Положим гирю на левую чашу и уравновесим её 8 кг сахара. Уберём гирю и насыпем на левую чашу 6 кг сахара. Поменяем пакеты местами и добавим на правую чашу гирю. Теперь на левой чаше – 8 кг, на правой – 12. Для равновесия не хватает 1 кг сахара на левой чаше, который и насыпаем.



2. На рисунке центры четырёх монет находятся в вершинах двух треугольников со сторонами 3, 4, 5.

3. Уменьшился. Вместо процентов воспользуемся долями: изменение курса на x $(0<|x|<1)$ означает домножение на $1+x$. Скажем, если курс возрос на 20%, то $x=0{,}2$, а если уменьшился на 20%, то $x=-0{,}2$. Пусть аналитик предсказал изменения x, y, z, и курс в итоге домножился на a $(a>0)$. Тогда по условию $a=(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$, откуда $a^2=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)<1$, следовательно $a<1$.

4. а, б) Можно. Попробуем, подходит ли 3-й ключ к 3-й двери. Если подошёл, то с первыми двумя ключами разберёмся за одну попытку, и ещё за одну попытку найдём ключ от 4-й двери.

Если не подошёл, попробуем, подходит ли он ко 2-й двери. Если да, то 1-й ключ может подойти только к 1-й двери, а 2-й ключ – к 3-й, и ещё за одну попытку находим ключ от 4-й двери. Если нет, то он подходит к 4-й двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, откуда 3-ю дверь открывает 4-й ключ, а с первыми двумя ключами и дверями разберёмся за одну попытку.

В любом случае за три попытки заведомо находим первые четыре ключа. Далее берём следующую четвёрку дверей и повторяем процесс, и т.д. Так найдём все ключи за $100\cdot\frac{3}{4}=75$ попыток.

в) Нельзя. Пусть Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьём двери и ключи на 25 четвёрок подряд идущих. Будем предлагать Хвастуну только те расположения, где ключи не могут открывать двери из других четвёрок, и сообщим ему об этом. Тогда бессмысленно пробовать ключ к двери из другой четвёрки, и у Хвастуна всё равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четвёрке он делает не более 2 попыток. У пары попыток есть лишь 4 различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четвёрке. Но вариантов соответствия 4 ключей и дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

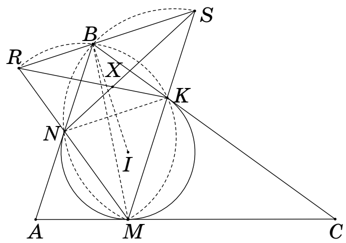
5. Не могло. Заметим сначала, что произведение двух k-значных чисел – либо $(2k-1)$-значное число, либо $2k$-значное. Ведь наименьшее k-значное число $1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}$, умноженное само на себя, даёт число $1\underbrace{0\ldots0}_{2k-2}$, в котором $2k-1$ знаков, а наибольшее k-значное, умноженное само на себя, даёт меньше, чем наименьшее $(k+1)$-значное число $1\underbrace{0\ldots0}_{k}$, умноженное само на себя, откуда результат меньше наименьшего $(2k+1)$-значного числа $1\underbrace{0\ldots0}_{2k}$.

Пусть даны числа $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$ и $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$. Представим, что мы умножаем их в столбик.

В самом правом разряде будет стоять a_1a_k (возможно, с переносом, который уйдёт в следующие разряды), и в $(2k-1)$-м справа разряде тогда – минимум a_1a_k. По условию, a_1a_k оканчивается на 1. Если есть ещё и перенос, то a_1a_k не меньше 11, и как минимум этот же перенос есть и в $(2k-1)$-м разряде. Но произведение двух цифр не может дать 11, то есть a_1a_k ещё больше. Значит, в $(2k-1)$-м разряде после всех переносов должно получиться минимум 111 (иначе в итоге не получится число из одних единиц), что невозможно — в нашем произведении будет слишком много цифр (не меньше $2k+1$). Поэтому переноса нет и $a_1=a_k=1$. Тогда произведение наших чисел меньше $2\underbrace{0\ldots0}_{k-1}\cdot 2\underbrace{0\ldots0}_{k-1} = 4\underbrace{0\ldots0}_{2k-2}$, то есть в произведении $2k-1$ разрядов.

Посмотрим на 2-й разряд справа. Там стоит $a_ka_2+a_{k-1}a_1$, возможно с переносом. Если перенос есть, то минимум такой же перенос будет в $(2k-2)$-м разряде, и единица в $(2k-1)$-м разряде испортится. Значит, переноса нет, и $a_{k-1}a_1+a_ka_2=1$. Аналогично получаем, что в 3-м разряде (справа и слева) переноса нет и там 1, и т.д. Так мы дойдём до середины и получим, что там тоже 1 без переноса. Но на среднем месте стоит $a_1^2+\ldots+a_k^2$, что не меньше 2 (ведь $a_1=a_k=1$). Противоречие.

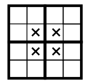
6. Пусть X – точка пересечения RK и SN. Прямые NK и RS параллельны, поскольку перпендикулярны биссектрисе угла B. Угол NMK равен углу NKB между касательной и хордой, а последний – углу SBK по доказанной параллельности. Тогда четырёхугольник $RBKM$ – вписанный. Поэтому $\angle RKM=\angle RBM$. Аналогично $\angle SNM=$ $=\angle SBM$. Но углы RBM и SBM дают в сумме 180°, значит, и углы XKM и XNM – тоже. Тогда $NMKX$ – вписанный, что и требовалось.



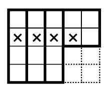
7. Ответы: а) 25; б) 282.

Оценка. Пусть клетка осталась непустой. Изначально в ней был один дом. С каждым поглощением число исходных домов в ней увеличивалось максимум вдвое. Клеткой было сделано не более 4 поглощений, поскольку у неё не более 4 соседей. Значит, в одной клетке могло собраться не более 16 исходных домов. Поэтому число оставшихся домов не меньше $\frac{1}{16}$ площади прямоугольника.

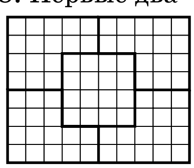
Пример. а) Квадрат 20×20 разобьём на 25 квадратов 4×4, в каждом можно оставить один дом. Ведь в квадрате 2×2 легко собрать все дома в одной клетке. Соберём их в отмеченных на рисунке клетках. Аналогично соберём отмеченные клетки.



б) (*Замир Ашурбеков, 11 кл., г. Дербент*). Так как 4500 при делении на 16 даёт остаток 4, достаточно разбить прямоугольник 50×90 на 16-клеточные фигуры и одну 4-клеточную, и в каждой собрать все дома. Справа изображены подходящая 16-клеточная фигура и порядок сбора домов в ней.



Из 16-клеточных фигур сначала сложим прямоугольник 8×10 (рисунок внизу). Прямоугольник 50×90 разобьём на 4 прямоугольника: 50×72, 32×10, 32×8 и 18×18. Первые два разбиваются на прямоугольники 8×10, третий – на квадраты 4×4, а последний – на 4 прямоугольника 8×10 и квадрат 2×2 (в центре).



НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 1 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: goo.gl/HiaU6g), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IV ТУР

16. На острове три селения. В одном из них живут рыцари, в другом разбойники, в третьем торгаши. Рыцари всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торгаши могут как сказать правду, так и солгать. Путешественник поговорил с тремя туземцами А, Б, В из трёх разных селений, не зная, кто откуда. Туземец А сказал, что Б рыцарь; Б сказал, что В разбойник; В сказал, что А торгаш. Солгал ли торгаш?

17. На доске написано десятизначное число. Все его цифры различны. Может ли оказаться, что, вычеркнув две его последние цифры, получим число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получим число, делящееся на 3, ..., вычеркнув 9 его последних цифр, получим число, делящееся на 9?

Авторы: Борис Френкин (16), Михаил Евдокимов (17, 18), Александр Домашенко (19), Игорь Акулич (20)

18. На каждой клетке квадратной доски 10×10 стоит чёрная или белая фишка, причём всего тех и других поровну. Разрешается поменять местами две разноцветные фишки, стоящие рядом (в соседних по стороне клетках), или убрать с доски две одноцветные фишки, стоящие рядом. Верно ли, что всегда возможно убрать все фишки с доски, действуя по правилам, как бы фишки ни были расположены вначале?

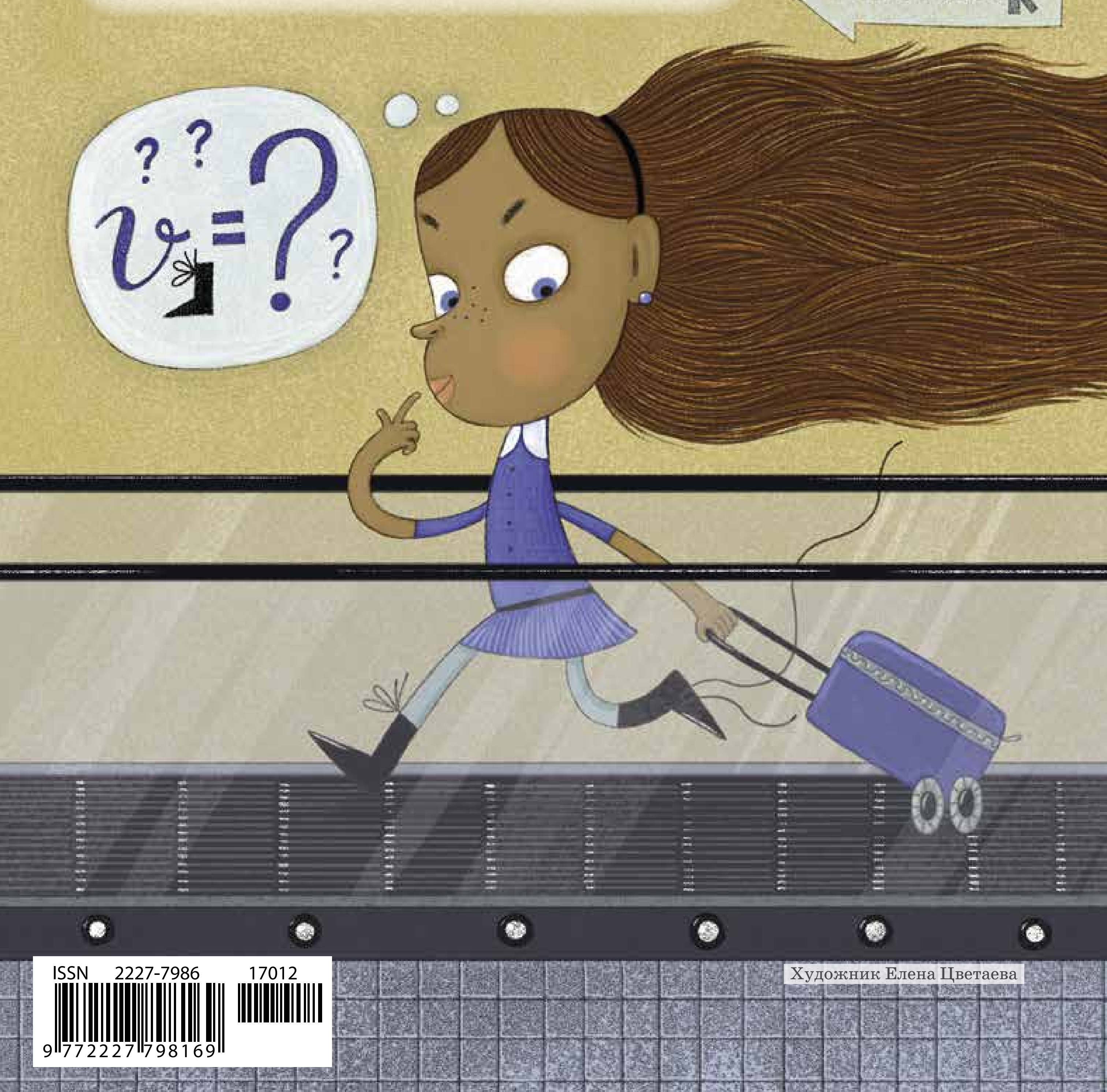
19. Николаю Ивановичу – любителю занимательных задач – нравится наряжать игрушками-головоломками новогоднюю ёлку для внуков. Он приготовил из плотной бумаги правильный тетраэдр (треугольную пирамидку из равносторонних треугольников). Затем разрезал его хитрым способом и получил ёлочку (она составлена симметрично из трёх равных половинок правильного шестиугольника, см. рисунок). Как ему это удалось?

20. В школьном химическом кабинете имеются двухчашечные весы с набором из 20 гирек массами 1 г, 2 г, ..., 20 г. Коля разложил все эти гирьки по чашкам весов так, что они уравновесились. Петя хочет убрать часть гирек так, чтобы равновесие сохранилось. Какое наименьшее количество гирек ему потребуется снять, чтобы гарантированно добиться успеха (как бы ни были разложены гирьки по чашкам)?

Художник Николай Крутиков

ШНУРКИ И ТРАВОЛАТОР

Лена идёт по переходу между терминалами аэропорта, и часть её пути проходит по траволатору (горизонтальному эскалатору). Скорость ходьбы Лены неизменна, но ей потребовалось один раз остановиться и завязать шнурок. Где ей это лучше сделать, чтобы быстрее дойти – на траволаторе или вне его? (Время завязывания шнурка меньше, чем время движения по траволатору.)



ISSN 2227-7986 17012

Художник Елена Цветаева