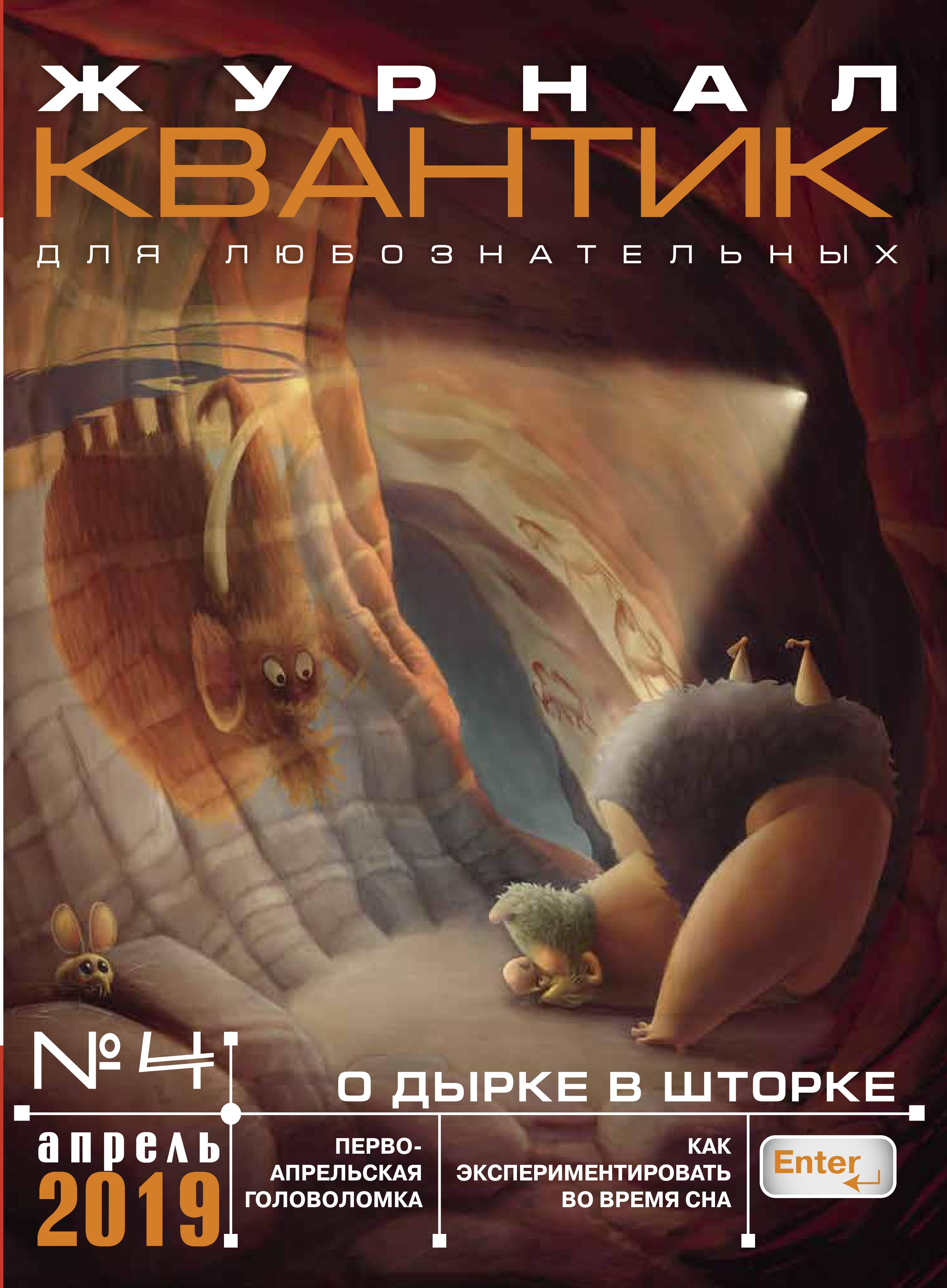
№ 4 | апрель 2019

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



№ 4
апрель 2019

О ДЫРКЕ В ШТОРКЕ

ПЕРВОАПРЕЛЬСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

КАК ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАТЬ ВО ВРЕМЯ СНА

Enter

ВНИМАНИЕ! ОТКРЫЛАСЬ ПОДПИСКА НА II ПОЛУГОДИЕ

ПОДПИСАТЬСЯ НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»
можно в любом отделении связи Почты России или через интернет

Подписка на почте

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП
Индекс **11346**

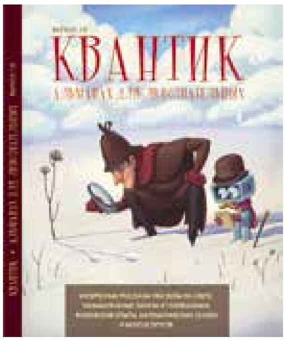
КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»
Индекс **84252**

Подписка на сайте vipishi.ru

КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ
оплата онлайн
Индекс **11346**

VIPISHI.RU

НАШИ НОВИНКИ



Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

- Альманах «Квантик». Выпуск 12,
- Альманах «Квантик». Выпуск 13,
- второй выпуск «Библиотечки журнала «Квантик» – книга С. Н. Федина «Перепутаница».

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), в интернет-магазине **kvantik.ru**, в магазинах «Библио-Глобус» и в других магазинах (список на сайте: **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

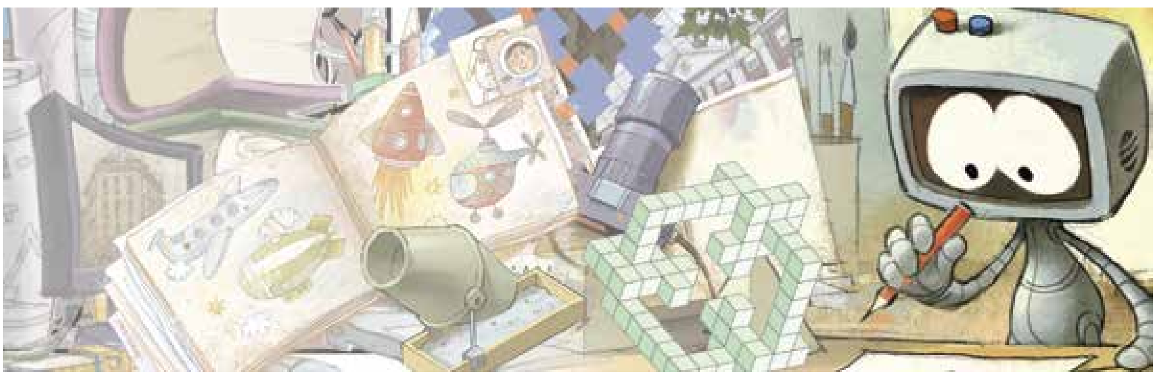
Журнал «Квантик» № 4, апрель 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 21.03.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



Максим Прасолов

О ДЫРКЕ В ШТОРКЕ

В прошлом номере была задача:

Окно комнаты занавешено шторкой. В шторке есть квадратная дырка со стороной в пару миллиметров. Садящееся солнце через дырку оставляет на стене комнаты, противоположной окну, пятно. Определите его форму.

Вдруг солнце частично зашло за угол дома (см. рисунок 5 на с. 4). Каким теперь будет пятно?

А если в шторке несколько дырок, что мы увидим на стене?

Вот ответ. Пока солнце не закрыто, пятно будет круглым независимо от формы дырки, лишь бы дырка была маленькой. Когда солнце частично зайдёт за дом, пятно примет форму солнца, так же частично закрытого домом. Если дырок несколько, то каждая дырка даст одно и то же солнечное пятно.

Автор задачи наблюдал это в комнате, где от окна до стены было около 7 метров, солнце попадало в комнату через многочисленные прямоугольные дырки размером 2 мм × 10 мм в жалюзи (отверстия для верёвочек). Солнечное пятно имело размер (диаметр) около 7 см.

Разберёмся, как этот ответ согласуется с тем, что свет распространяется по прямой. Будем считать, что солнце находится невысоко над горизонтом, то есть лучи света близки к горизонтальным. Каждый луч определяется двумя точками: началом луча на солнце и точкой, в которой луч проходит через дырку.

Все лучи, проходящие через фиксированную точку дырки, образуют конус (рис. 1), а поэтому на стене освещают круг. Центр этого круга – точка на стене, куда попадает луч, выходящий из центра солнечного диска. Все такие центры заметают на стене квадрат –

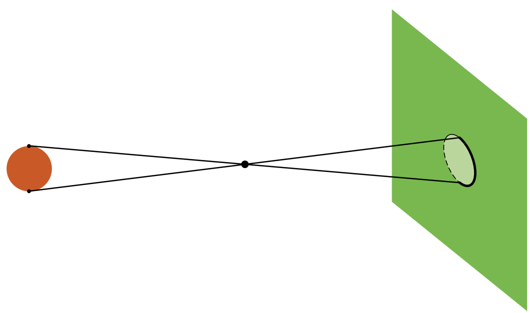


Рис. 1

почти такой же, как сама дырка (рис. 2). Значит, солнечное пятно состоит из бесконечного количества

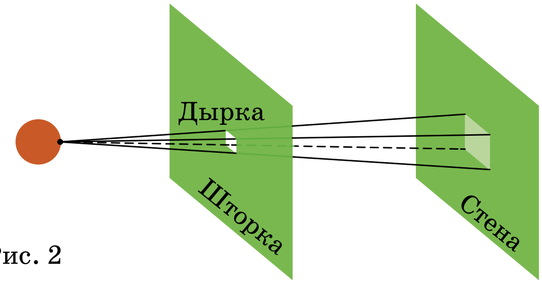


Рис. 2

равных кругов, центры которых лежат в данном квадрате; в итоге получается квадрат со сглаженными углами (рис. 3).

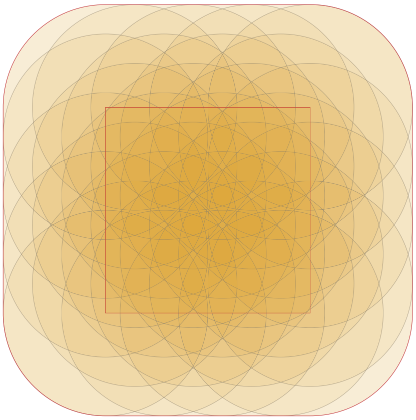


Рис. 3

Форму пятна можно получить, рассуждая и в обратном порядке. Сначала зафиксируем точку Солнца и посмотрим на исходящие из неё лучи. Такие лучи освещают квадратик, как на рисунке 2. Центры таких квадратиков заметают круг, аналогичный кругу на рисунке 1, и мы получаем то же солнечное пятно, составленное из квадратиков (рис. 4).

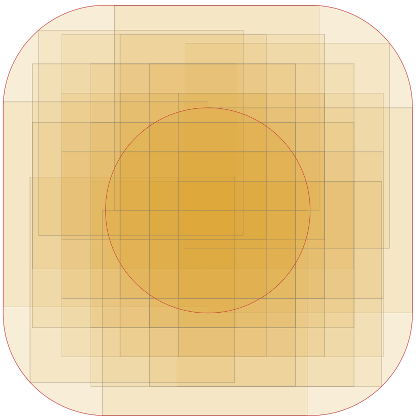
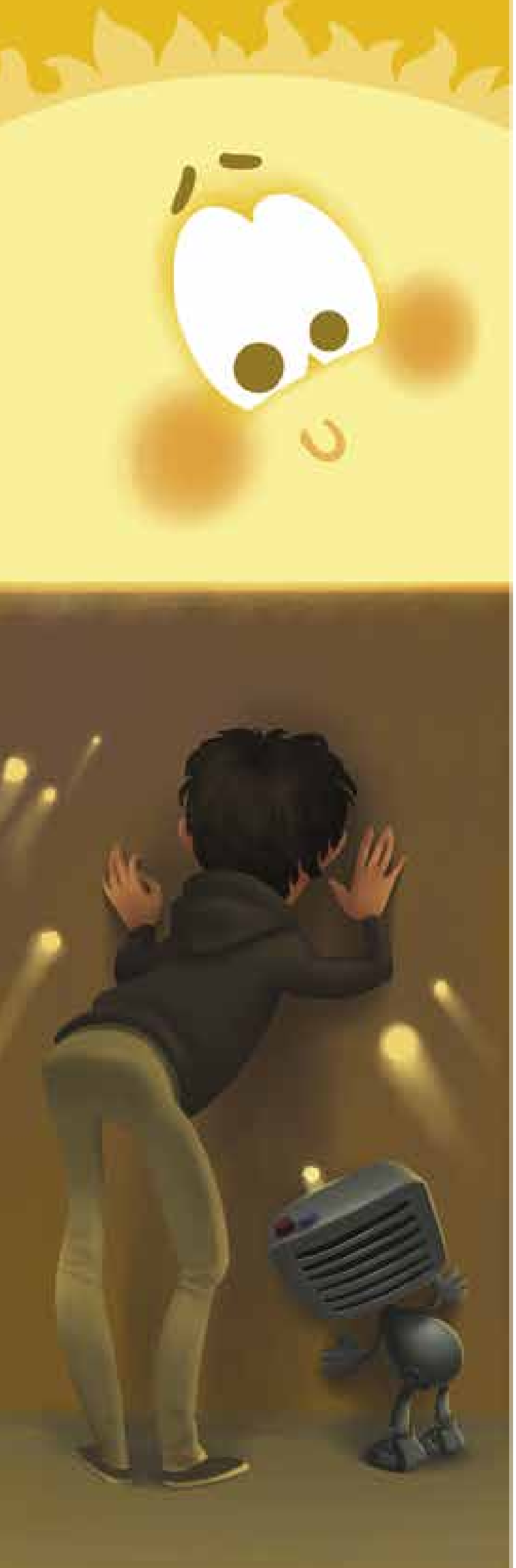


Рис. 4

Но вспомним, что дырка маленькая: всего пара миллиметров. Квадратик на стене (рис. 2) почти такого же размера, как дырка, потому что расстояние от окна до стены исчезающе мало по сравнению с расстоянием до Солнца. А расстояние до Солнца примерно в 100 раз больше его диаметра (это можно понять по видимому угловому размеру Солнца). Поэтому солнечное пятно будет относительно большим. Его размер можно вычислить приближённо как расстояние от стены до окна, делённое на 100, это



несколько сантиметров. А теперь представьте, что получится на рисунке 4, если квадратик намного меньше круга. Получится тот же самый круг, за края которого чуть-чуть вылезают кусочки квадратиков (граница почти везде будет окружностью, кроме небольших прямолинейных участков вверху, внизу, слева и справа). На глаз от круга будет не отличить!

Когда солнце зайдёт за угол дома (рис. 5), то от конуса лучей, проходящих через фиксированную точку дырки (рис. 1), останется лишь часть. Эти оставшиеся лучи дадут перевёрнутое изображение солнца на стене (рис. 6).

Рис. 5

Рис. 6

Почему изображение переворачивается, можно объяснить так. Представьте, что вы стоите у стены и через крохотную дырку в шторке рассматриваете маленький участок солнца. Чтобы увидеть через дырку нижнюю часть солнца, вам нужно самим приподняться вверх. Поэтому, если дом загородил нижнюю часть солнца, у пятна пропадёт верхняя часть. (А вот «право» и «лево» местами не поменяются. Почему?)

Кстати, ситуация, когда у нас есть две фигуры *А* и *Б* (как круг и квадратик выше) и мы прикладываем фигуру *А* какой-нибудь её точкой ко всем точкам фигуры *Б*, параллельно сдвигая фигуру *А*, встречается в математике. Точки, которые мы сможем покрыть фигурой *А*, действуя так, образуют фигуру, называемую *суммой Минковского фигур А и Б*. Если, наоборот, прикладывать копии фигуры *Б* к фигуре *А*, результат будет тем же. Как мы видели, солнечное пятно на стене от лучей, пробивающихся сквозь дырку, – это сумма Минковского перевёрнутого изображения солнца и дырки. Если дырка маленькая, пятно имеет вид немного размытого изображения солнца.

Если подставить под солнечное пятно ладошку и идти к шторке, то пятно будет уменьшаться и непосредственно около шторки примет форму дырки.

На фото 1, снятом во время кольцеобразного солнечного затмения, роль дырки играют промежутки между листьями дерева, а Солнце так загорожено Луной, что осталось только кольцо. Каждый достаточно маленький промежуток между листьями даёт солнечное пятно в виде кольца.

Фото 1:
Nils van der Burg,
flickr.com

Если в комнате достаточно темно, а на улице светло, то через дырку на стену отобразится весь уличный пейзаж, как на фото 2.

Фото 2:
Gampe,
wikimedia.org

Художник Мария Усеинова

ПУТЕШЕСТВИЕ №13 ПО ЗООПАРКУ ЭЛЕМЕНТОВ

ПРОМЕТИЙ, САМАРИЙ, ЕВРОПИЙ, ГАДОЛИНИЙ, ТЕРБИЙ

ПРОМЕТИЙ Pm

Pm 61 144,9127 ПРОМИТИЙ

Прометий обосновался в клетке №61. Он не имеет стабильных изотопов. Долгое время клетка №61 оставалась пустой. Менделеев полагал, что между неодимом и следующим за ним самарием просто обязан стоять ещё один элемент, но открыть его никому не удавалось. Уже после 1896 года, когда Антуан Анри Беккерель открыл явление радиоактивности, предполагалось, и вполне обоснованно, что у элемента №61 стабильных изотопов нет, а его радиоактивные изотопы имеют очень маленькие периоды полураспада. Это означает, что все изотопы за время существования Земли просто распались и в земной коре их при всём желании найти невозможно.

Только в 1945 году сотрудники Окриджской национальной лаборатории (США) выделили из осколков деления урана, облучённого медленными нейтронами, первые изотопы прометия. Название новому элементу предложила жена одного из сотрудников Мэри Кориэлл – «прометей», по имени мифического героя Прометея, похитившего у богов огонь и передавшего его людям. Так в клетке №61 появился новый символ Pm.

В 1950 году Комиссия по атомным весам IUPAC, сохранив обозначение Pm, изменила название на прометий – *prometium*.

На практике применяется только изотоп ^{147}Pm, его период полураспада 2,64 года. При распаде этот изотоп почти не излучает в рентгеновском спектре, опасном для жизни. Это позволяет использовать энергию распада в атомных батарейках и в люминофорах (со сроком службы в несколько лет). Такие батарейки используются, например, в часах и кардиостимуляторах.

САМАРИЙ Sm

Sm 62 150,36 САМАРИЙ *Самарий* занимает клетку №62. В 1839 году Густав Розе описал чёрный минерал, найденный в Ильменских горах на Урале, и назвал его уранотанталом. Его брат, профессор химии Берлинского университета Генрих Розе, также исследовал этот минерал. Заканчивая сообщение о своих новых результатах, Генрих Розе писал в 1847 году: «Я предлагаю изменить название уранотантал на самарскит, в честь полковника Самарского, по благосклонности которого я был в состоянии производить над этим минералом все изложенные наблюдения».

Василий Евграфович Самарский-Быховец – русский горный инженер, генерал-лейтенант, начальник штаба Корпуса горных инженеров, председатель совета Корпуса горных инженеров. Это в его честь Генрих Розе назвал новый минерал из Ильменских гор – самарскит, а в 1879 году в этом минерале Лекок де Буабодран открыл новый химический элемент и назвал его самарием (*samarium*).

Изотоп ^{149}Sm, как и некоторые изотопы европия и гадолиния, хорошо захватывает тепловые (медленные) нейтроны, при этом ядро атома не распадается, а становится более тяжёлым стабильным изотопом. Поэтому самарий, европий и гадолиний используются для защиты от радиации и в управляющих стержнях ядерного реактора. Перемещая стержни, ускоряют или замедляют цепную ядерную реакцию. Кроме того, среди осколков деления урана часто встречаются изотопы самария, которые замедляют работу реактора. Магниты из сплава самария с кобальтом сравнимы по силе с неодимовыми магнитами, дороже них, но более устойчивы к высоким и низким температурам. Некоторые соединения самария используются как катализаторы в органическом синтезе.

Радиоактивный изотоп ^{153}Sm имеет период полураспада 2 суток. Его вводят внутривенно при лечении некоторых видов рака.

ЕВРОПИЙ Eu

EU 63 151,965 ЕВРОПИЙ

Европий «живёт» в клетке №63. В 1886 году Эжен Демарсе выделил из спектра оксида самария Sm_2O_3 линии, принадлежащие новому элементу. В 1901 году Демарсе после подробного спектроскопического анализа доказал, что этот элемент новый, и дал ему имя «европий» – *europium*, естественно, в честь «старушки Европы». Металлический европий впервые был получен лишь в 1937 году.

Европий – самый лёгкий из лантаноидов, его плотность 5,245 г/см^3. Также у него самый большой размер атома и он самый химически активный. Например, металлический европий реагирует с водой так же бурно, как кальций. Ионы многих лантаноидов могут быть использованы для возбуждения лазерного излучения. Но из всех них только ион Eu^{3+} даёт излучение в воспринимаемой человеческим глазом части спектра – оранжевый луч.

Европий широко применяется для создания красного свечения в цветных телевизорах. В медицинской диагностике используются светящиеся зонды из европия.

ГАДОЛИНИЙ Gd

Gd 64 157,25 ГАДОЛИНИЙ

В клетке №64 находится *гадолиний*. В 1880 году Жан де Мариньяк при помощи спектрального анализа обнаружил новый элемент, который в 1896 году Лекок де Буабодран назвал гадолинием (*gadolinium*). В одной из химических энциклопедий написано: «Это был первый случай в истории науки, когда химический элемент назвали в память об учёном – Юхане Гадолине, одном из первых исследователей редких земель*. Лишь через 64 года появится второй элемент-памятник – кюрий, а затем эйнштейний, фермий, менделевий...». А первый химический элемент, названный в честь реального человека – это самарий.

Гадолиний использовался для создания зелёного свечения в электронно-лучевых трубках телевизоров. Добавка гадолиния в титановые сплавы заметно повышает их прочность и предел текучести. Из сплава

*Редкие земли – это оксиды редкоземельных металлов

гадолиния и никеля изготавливают контейнеры для захоронения радиоактивных отходов.

Сульфат гадолиния охлаждается при размагничивании. Используя этот эффект, учёные Джиок и Мак-Дугалл в 1933 году получили температуру, которая отличается от абсолютного нуля меньше чем на 1 градус.

С помощью гадолиния синтезировали кристаллы с уникальными свойствами. Например, гадолиний-галлиевый гранат использовался в 1970-х годах в так называемой пузырьковой памяти компьютеров, а также позволял создавать лазеры с выдающимися характеристиками.

Препарат гадолиния вводится внутривенно для получения контрастных снимков при магнито-резонансной томографии.

ТЕРБИЙ Tb

Tb 65 158,92534 ТЕРБИЙ

Клетку №65 занимает *тербий*. Тербий (*terbium*) – один из четырёх элементов, получивших своё название по шведскому посёлку Иттербю (*Ytterby*). В 1842 году Джеймс Джоуль открыл интересный эффект. Если у тела меняется намагниченность, то его линейные размеры и объём также изменяются. Эффект этот получил название «магнитострикция». Лучший магнитострикционный материал – сплав железа с тербием. Он используется для сверхмощных приводов малых перемещений, когда требуется огромную массу подвинуть чуть-чуть, но с большой точностью, для мощных источников звука и ультразвука, для прослушивающих «жучков».

Теллурид тербия – хороший термоэлектрический материал. Уже сейчас мы могли бы иметь удобные термоэлектрогенераторы, но, к сожалению, тербий слишком дорогой материал. Тербий широко используется для создания зелёного свечения в телевизорах и люминесцентных лампах. Сплавы тербия с гадолинием при размагничивании сильно охлаждаются, что позволяет надеяться на появление в будущем бытовых магнитных холодильников. Соединения тербия входят в состав диодов, транзисторов и прочей электроники.

Художник Анна Горлач

Сергей Волчёнков

ЧЕМ КРУГ ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ КВАДРАТА?

С первого взгляда вопрос кажется странным. Каждый знает, что такое круг и что такое квадрат, и каждый знает, что это разные геометрические объекты. Но в этой статье речь пойдёт не столько о геометрии, сколько о комбинаторной геометрии, то есть о разделе математики, где геометрические объекты рассматриваются с комбинаторной точки зрения – как элементы конечных множеств. Мы разберём три задачи, в которых круги и квадраты какими-то своими, с первого взгляда, незначительными различиями порождают различные ответы.

Задача 1 про круги. *На плоскости расположено 5 кругов, каждые два из которых имеют общую точку. Верно ли, что среди них всегда найдутся 3 круга, имеющих общую точку?*

Ответ: верно.

Доказательство. Обозначим круги (и их центры) буквами O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 соответственно. Соединим центры друг с другом отрезками. Какие-то два из проведённых отрезков должны пересечься. Это известный факт (даже если точки пытаться соединять ломаными) – попробуйте доказать его самостоятельно или см. в конец статьи. Пусть пересекаются отрезки O_1O_2 и O_3O_4 в точке X (рис. 1).

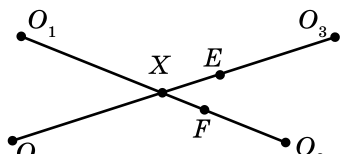


Рис.1

Осталось доказать, что верна такая

Лемма. *Если есть две пары пересекающихся кругов (пара O_1, O_2 и пара O_3, O_4), причём отрезки O_1O_2 и O_3O_4 имеют общую точку (X), то какие-то три из этих четырёх кругов имеют общую точку.*

Так как круги O_1 и O_2 пересекаются, на отрезке O_1O_2 есть точка F, принадлежащая им обоим. Аналогично, на отрезке O_3O_4 есть точка E, принадлежащая кругам O_3 и O_4. Пусть они расположены как на рисунке 1, причём $XE \geqslant XF$ (остальные случаи аналогичны).

Тогда $O_4E \geqslant O_4X + XF \geqslant O_4F$, то есть точка F принадлежит кругам O_1, O_2 и O_4. Лемма доказана.

Задача 1 про квадраты. *На плоскости расположено 5 квадратов, каждые два из которых имеют* *общую точку. Верно ли, что всегда найдутся 3 квадрата, имеющих общую точку?*

Ответ: неверно. Контрпример изображён на рисунке 2.

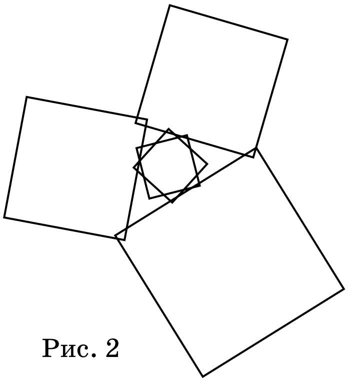


Рис. 2

Задача 2 про круги.

На плоскости расположено 3 красных и 3 синих круга, причём каждые два разноцветных круга имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных круга, имеющих общую точку?

Ответ: верно.

Доказательство. Соединим центры разноцветных кругов друг с другом отрезками. Какие-то два из проведённых отрезков должны пересечься. Это тоже известный факт, часто называемый «три дома, три колодца» (докажите или см. в конец статьи).

Тогда, по лемме из задачи 1, какие-то три круга имеют общую точку. А среди этих трёх найдутся два круга одного цвета, что и требовалось.

Задача 2 про квадраты. *На плоскости расположено 3 красных и 3 синих квадрата, причём каждые два разноцветных квадрата имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных квадрата, имеющих общую точку?*

Ответ: неверно. Контрпример изображён на рисунке 3.

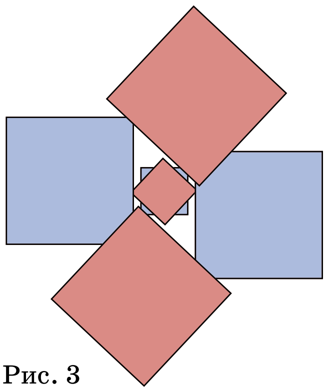
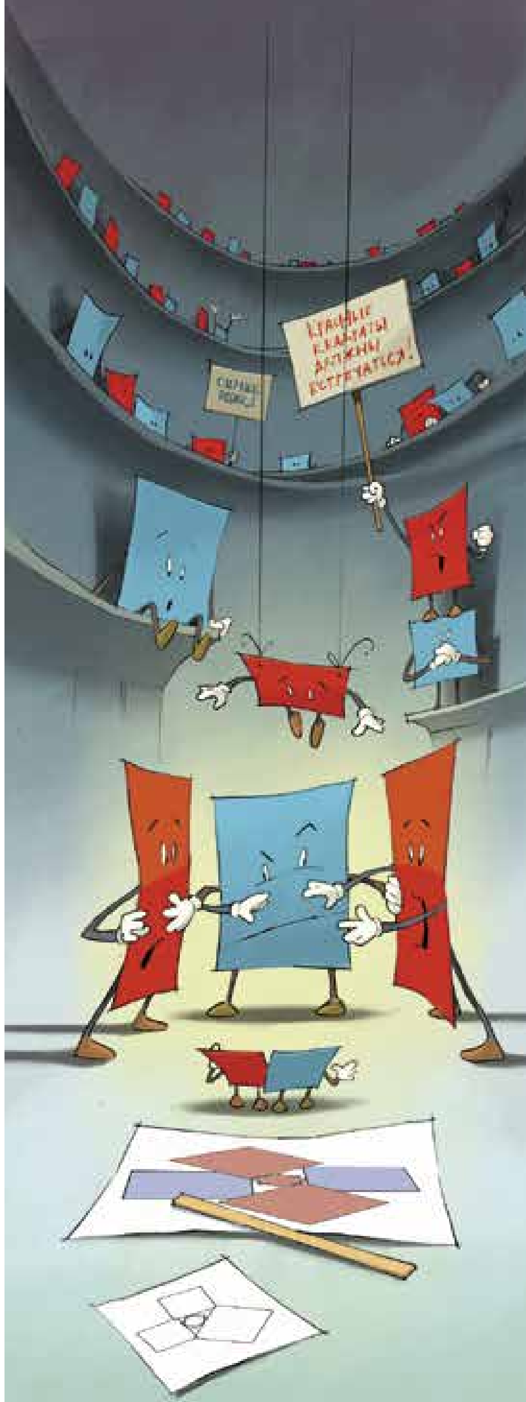


Рис. 3

Замечание. В задачах 1 и 2 про квадраты можно заменить квадраты на другие многоугольники, в частности на правильные N-угольники, где N сколь угодно велико. При этом многоугольники становятся почти неотличимыми от кругов. Правда, картинки 2 и 3 пришлось бы рассматривать под микроскопом, чтобы увидеть на них все пересечения.

Задача 3 про круги. *В выпуклом многоугольнике расположено N непересекающихся кругов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N*



выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из кругов?

Прежде чем переходить к решению этой задачи, рассмотрим более простую задачу.

Задача 3 про точки. *В выпуклом многоугольнике отмечено N точек (с номерами от 1 до N). Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно одну отмеченную точку?*

Ответ: верно.

Доказательство. Разобьём многоугольник на области с номерами от 1 до N по такому правилу: область с номером k состоит из точек, более близких к точке k, чем к любой другой отмеченной точке (такое разбиение называется *диаграммой Вороного*). При таком разбиении область с номером k ограничена серединными перпендикулярами отрезков, проведённых из точки k к остальным отмеченным точкам, то есть является выпуклым многоугольником.

Пример такой диаграммы приведён на рисунке 4.

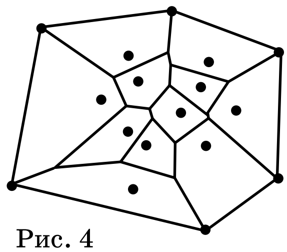


Рис. 4

А теперь перейдём к задаче 3 про круги. Оказывается, что нужное нам разбиение многоугольника может быть образовано не серединными перпендикулярами, а так называемыми *радикальными осями* окружностей.

Радикальная ось двух непересекающихся окружностей – это геометрическое место точек, касательные из которых, проведённые к двум данным окружностям, имеют равные длины.

Нетрудно показать, что радикальная ось двух окружностей любых радиусов с несовпадающими центрами – это прямая (см. в конец статьи). Если окружности не пересекаются, они будут целиком по разные стороны от радикальной оси. Разобьём тогда точки многоугольника (лежащие снаружи окружностей) на области, состоящие из точек, касательные из которых к одной окружности короче, чем к другим. Аналогично получим, что каждая окружность лежит целиком в одной области, и эта область – выпуклый многоугольник.

Кстати, в случае «окружностей» нулевого радиуса касательные превращаются в расстояния до центров, и получается предыдущая задача.

И последняя

Задача 3 про квадраты. *В выпуклом многоугольнике расположено N непересекающихся квадратов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из квадратов?*

Ответ: неверно. Контрпример см. на рисунке 5.

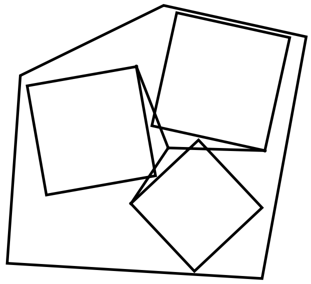


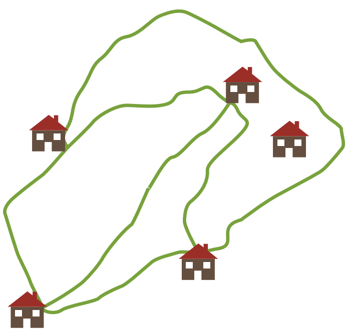
Рис. 5

Пояснение. В пятиугольнике расположены три квадрата. Разрезать пятиугольник на три выпуклые части, каждая из которых содержит один квадрат, невозможно. Точка в центре рисунка не может принадлежать ни одной из частей, так как каждый из трёх отрезков, идущих из неё к одной из точек квадратов, будет пересекать контур другого квадрата, то есть ни один из этих отрезков не будет принадлежать выпуклой фигуре.

ОТ РЕДАКЦИИ

Пять домов. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить друг с другом пять домов непересекающимися дорожками так, чтобы каждый дом был соединён с каждым отдельной дорожкой.*

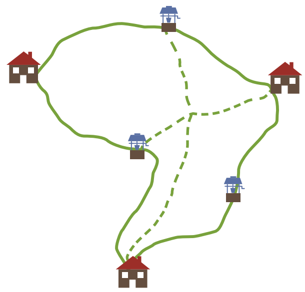
Допустим, это всё-таки удалось сделать. Уберём все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала добавим четыре дорожки, соединяющие четыре дома по циклу, получится «четырёхугольник» из дорожек. Соединим теперь пары противоположных вершин этого четырёхугольника (проведём «диагонали»). Одна диагональ будет внутри, другая – снаружи. В результате плоскость разделится на три «треугольника» и бесконечную часть, граница которой тоже будет треугольником (назовём эту



часть «бесконечным» треугольником). Пятый дом окажется в одном из этих треугольников, и его можно будет соединить только с тремя вершинами этого треугольника. Противоречие – останется ещё один дом, который нельзя соединить с пятым.

Три дома и три колодца. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить непересекающимися дорожками три дома с тремя колодцами так, чтобы каждый дом был соединён с каждым колодцем отдельной дорожкой.*

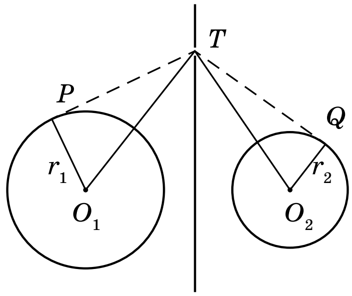
Допустим, это всё-таки удалось сделать. Уберём все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала обойдём по замкнутому циклу все дома и колодцы. Так как дорожки не пересекаются, это будет «шестиугольник» из дорожек, причём дома и колодцы в нём чередуются. Осталось провести ещё три дорожки, соединяющие противоположные вершины шестиугольника. Хотя бы две из этих трёх дорожек попадут обе либо внутрь, либо наружу шестиугольника и неизбежно пересекутся.



Радикальные оси. Пусть даны две окружности с различными центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно. Пусть точка O_1 имеет координаты (a, b), а точка O_2 – координаты (c, d). Найдём все такие точки $T(x, y)$, что касательные TP и TQ к нашим окружностям, проведённые из этой точки, равны. Касательные равны, когда равны их квадраты, а квадраты касательных можно найти по теореме Пифагора:

$$TP^2 = TO_1^2 - O_1P^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r_1^2;$$
$$TQ^2 = TO_2^2 - O_2Q^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r_2^2.$$

Приравнивая TP^2 и TQ^2, видим, что квадраты иксов и игреков взаимно уничтожаются и получается уравнение вида $mx + ny - k = 0$, которое задаёт прямую, если хотя бы один из коэффициентов m и n ненулевой (а это так, поскольку центры окружностей различны).

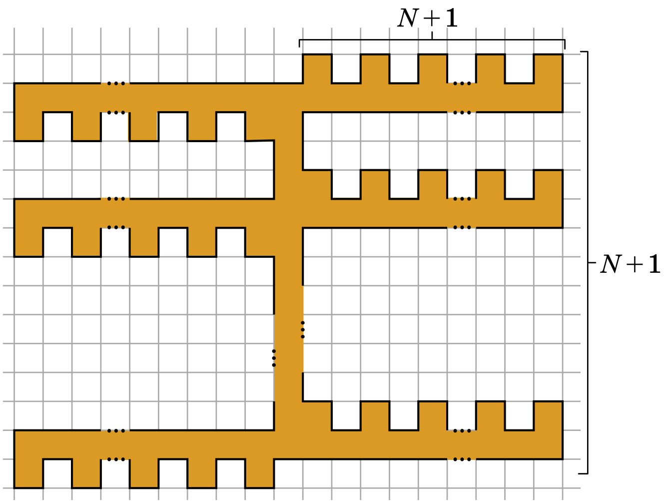


Художник Алексей Вайнер

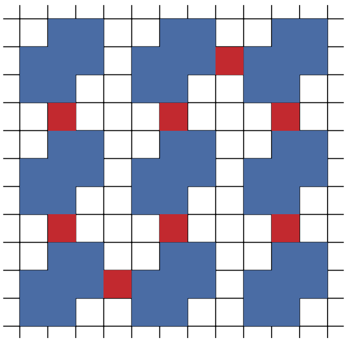
К статье «ИГРУШКИ НА ЁЛКУ»

В статье «Игрушки на ёлку: разгадки» из «Квантика» №2 за 2019 год разбиралась задача: *нарисовать многоугольник, у которого каждая сторона лежит на одной прямой ровно с N другими сторонами*.

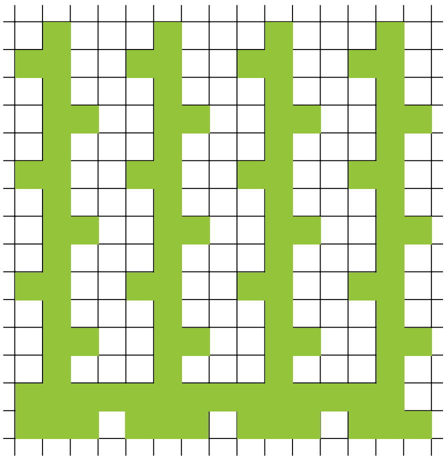
Решение было непростое. Нашим читателям удалось построить нужные многоугольники «по клеточкам». Вот пример Алины Сафиуллиной из Казани:

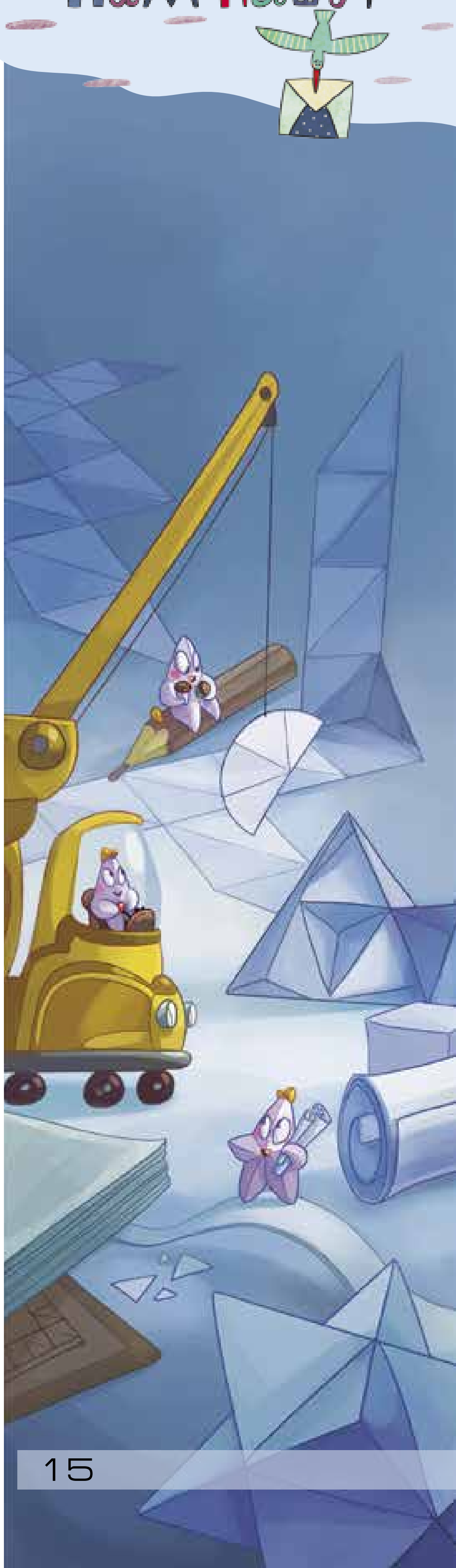


А вот ещё два решения: слева – пример Василия Илюхина (Иркутск), чуть упрощённый Георгием Челноковым (Москва), справа – пример школьника Ивана Григина (Жуковский), придуманный им на 53-м Уральском турнире юных математиков:



«Квадрат» из синих фигурок уже удовлетворяет условию. Красные клетки, не меняя число сторон на каждой прямой, лишь объединяют синие фигурки в одну фигуру.



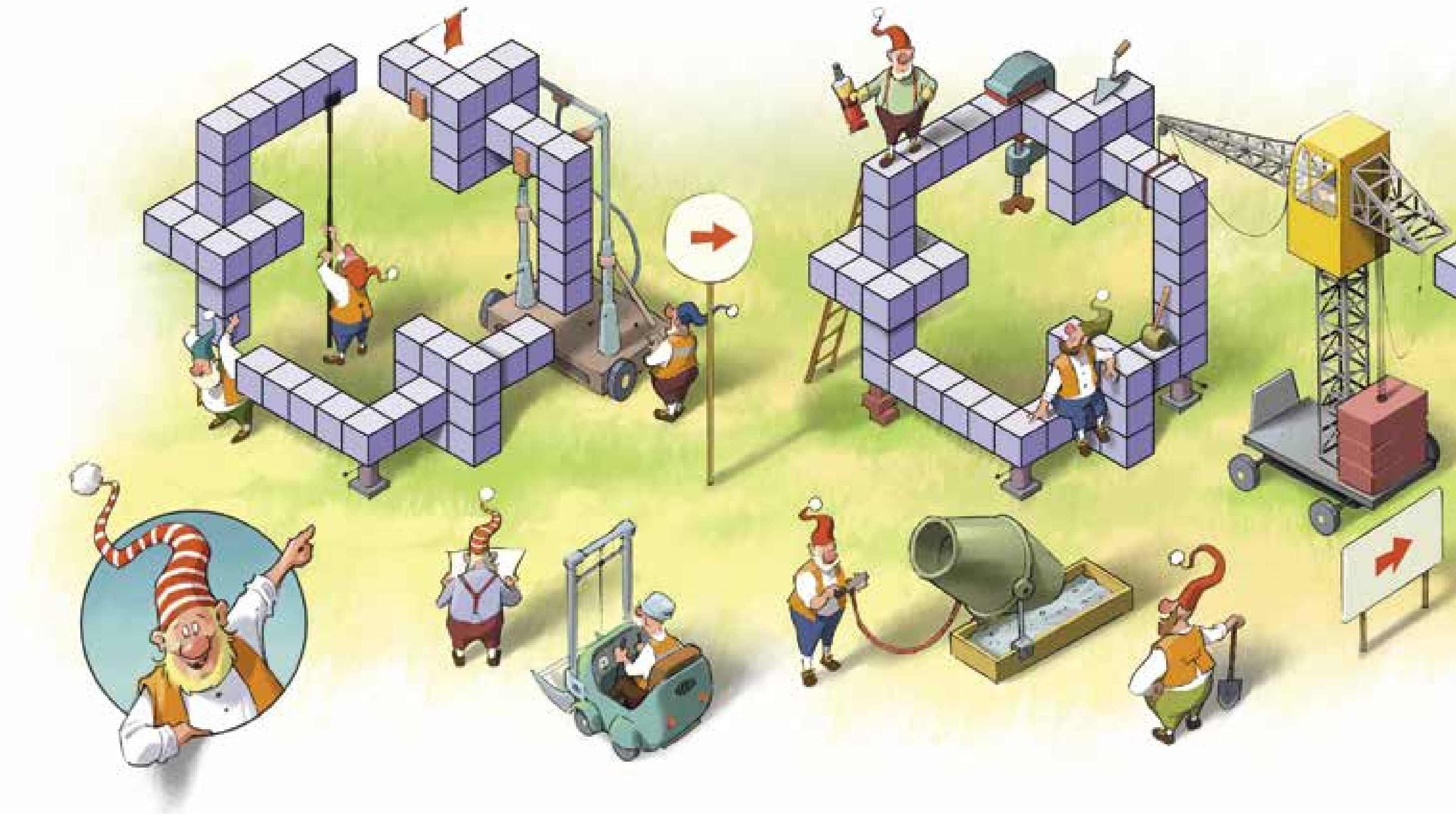


Художник Анна Горлач

Владимир Красноухов

ПЕРВОАПРЕЛЬС

(н е в о з м о ж н ы й   о б



Такой сувенир уместно изготовить для своих друзей к первому апреля. Конечно, лучше сделать его своими руками, но бывает так, что лень мастерить. В таком случае совсем не обязательно браться за рубанок и ножовку, можно мысленно поучаствовать вместе с нами в виртуальном изготовлении этого невозможного объекта. Поверьте, результат будет тот же.

Исходным материалом могут служить кубики. Можно воспользоваться обычными детскими кубиками, отработавшими свой срок. Всего потребуется 69 штук и столярный клей. Рекомендуем для этой цели клей ПВА. Впрочем, кубики и клей можете не искать, достаточно мысленно проследить за нашими действиями.

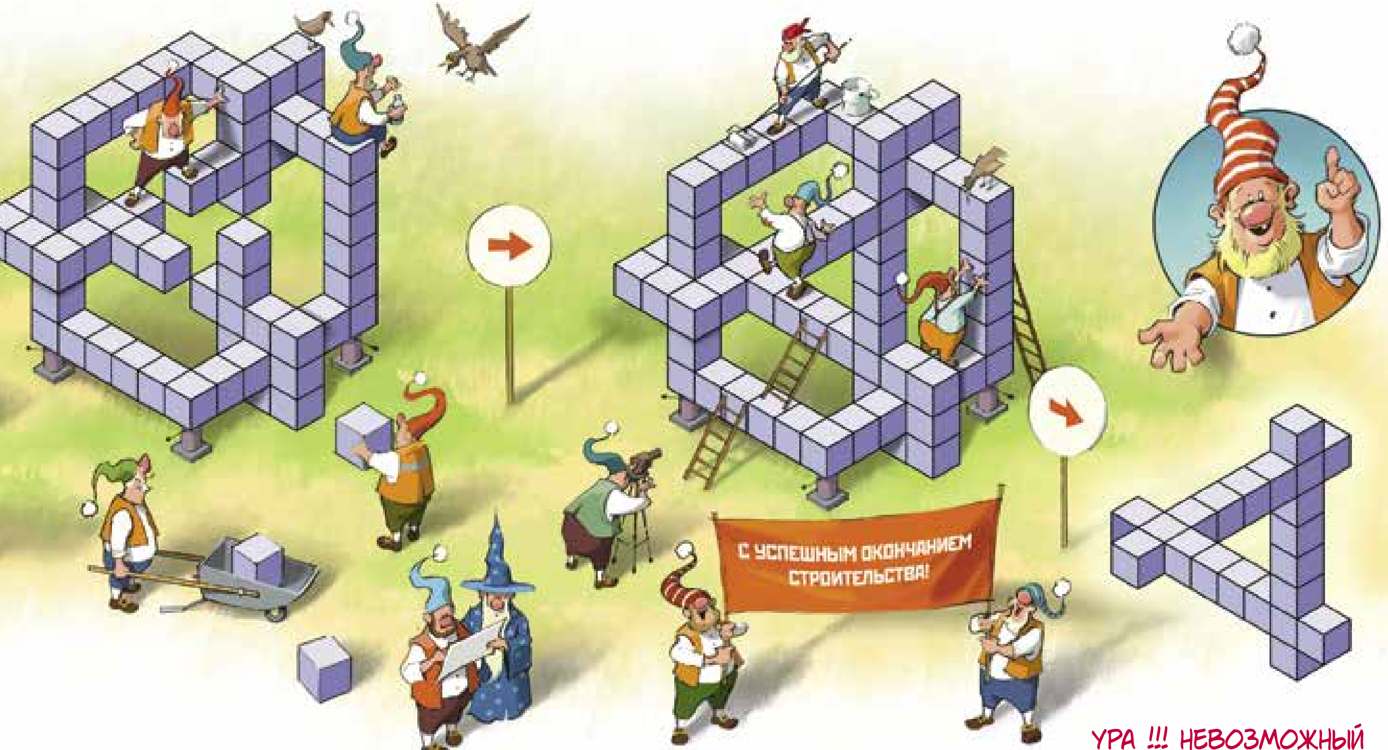
Итак, за работу. Проделаем постепенный (в 5 этапов) переход от реального к невозможному.

Сначала изготовим из кубиков Г-образную фигуру, ножка которой посредине (на уровне 4-го кубика) обклеена «квадратным колечком». На такую фигуру (ножка + колечко + полочка) уйдёт 19 кубиков. Всего нам понадобится 3 такие фигуры. Это был этап 1.

Далее – этап 2. Склеим из этих трёх фигур замкнутый каркас, на рисунке он представлен в аксонометрической

ская головоломка

ъект – своими руками)



проекции в виде замкнутой шестиугольной рамки с «колечками».

Когда клей застынет, подклеим к «колечкам» свободные кубики в соответствии с рисунком (этап 3). Это напоминает строительство пролётов мостов навстречу друг другу. На это уйдёт ещё $3 \times 3 = 9$ кубиков.

Вклеим между «пролётами мостов» ещё по одному – последнему – кубику (этап 4). Итого у нас ушло 69 кубиков.

Осталось осторожно, пока клей окончательно не застыл, разрезать конструкцию (этап 5), отделив внутреннюю часть от внешней. Внешнюю часть – каркас с остатками «квадратных колец» – можно поместить в мусорное ведро как отходы, не представляющие интереса. А внутреннюю часть, которая известна под названием *невозможный треугольник Пенроуза*, можно демонстрировать своим гостям на дружеской вечеринке.

Читатель может удивиться, почему эта шутка с изготовлением невозможного объекта попала в нашу серьёзную рубрику «Игры и головоломки». Да потому, что остаётся серьёзный вопрос: на какой стадии изготовления вполне материальный объект (69 кубиков!) стал вдруг невозможным? Ждём ваших ответов.

Художник Алексей Вайнер

Константин Кохась

КАК ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАТЬ ВО ВРЕМЯ СНА

– Все котлеты по-прежнему весят целое число граммов, – громко сказал дятел Спятел, – более того, все веса в наборе имеют одинаковую чётность!

Это восклицание разбудило Бусеньку. Когда она ухитрилась заснуть? Бусенька огляделась. В председательском кресле сидел дятел Спятел, рядом расположились Огрыза и Горгулий. На столе лежала груда черновиков.

– Я проспала всё самое интересное? – спросила Бусенька. – Какой набор? Какую чётность?

– Коллега Спрудль обратился в фирму Горгулия с заказом, – объяснила Огрыза, зевая. – Он хочет составить сувенирный набор из 13 золотых монет своей коллекции так, что если убрать любую монету, то оставшиеся 12 монет можно будет разложить на две кучи равного веса по 6 монет в каждой.

Огрыза аккуратно сложила черновики в стопочку и принесла откуда-то блюдо с 13 редисками.

– Подошли бы 13 монет одинакового веса, – подхватил Горгулий, – но проблема в том, что в коллекции все монеты разные и там нет столько монет одного веса, хотя все они и весят целое число граммов. Мы хотим понять, можно ли вообще в таких условиях подобрать набор, удовлетворяющий заказу.

– Во всяком случае, ясно, что раз уж любые 12 монет имеют чётный вес, то веса всех монет имеют одинаковую чётность! – сообщил дятел Спятел. – Допустим, что все веса чётные. Я предлагаю ещё один уникальный эксперимент: каким бы ни был наш гипотетический набор, сократим веса всех монет на 2!

– Зачем? – не поняла Бусенька.– Коллега Спрудль нас в порошок сотрёт за такое сокращение.

– Мы совершим этот эксперимент у-мо-зри-тельно! – веско сказал дятел Спятел. – И в результате веса монет уменьшатся. А чем меньше веса монет, тем легче подобрать нужный набор.

– Потрясающе, – сказал Горгулий. – Новый набор по-прежнему удовлетворяет требованиям клиента: если до сокращения какие-то 12 монет можно было разложить на две равные кучи, то и после тоже можно!

– И обратите внимание, по-прежнему все монеты весят целое число граммов, – громко сказал дятел Спятел, – и все веса имеют одинаковую чётность!

Это восклицание разбудило Огрызу, задремавшую на диване. Как она ухитрилась заснуть? Огрыза огляделась. Во главе стола сидел дятел Спятел, рядом расположились Бусенька и Горгулий. На столе стояло блюдо с 13 ирисками.

– Я проспала всё самое важное? – спросила Огрыза. – Какие веса? Какую чётность?

– Злобнопотам заказал в кулинарном салоне дятла Спятла подарочный набор конфет, – стал объяснять Горгулий. – Требуется составить набор из 13 конфет так, чтобы при удалении любой конфеты оставшиеся 12 конфет можно было разложить на две кучи равного веса по 6 конфет.

Огрыза принесла чашечные весы, съела одну ириску, а оставшиеся разложила на чаши по 6 штук. Весы показали равновесие.

– Так? – спросила Огрыза.

– Да, – подтвердил Горгулий, пересел на диван и добавил утомлённым голосом: – Только эти ириски одинаковые, тут всё просто. А нам, увы, требуется, чтобы не все конфеты были одинакового веса.

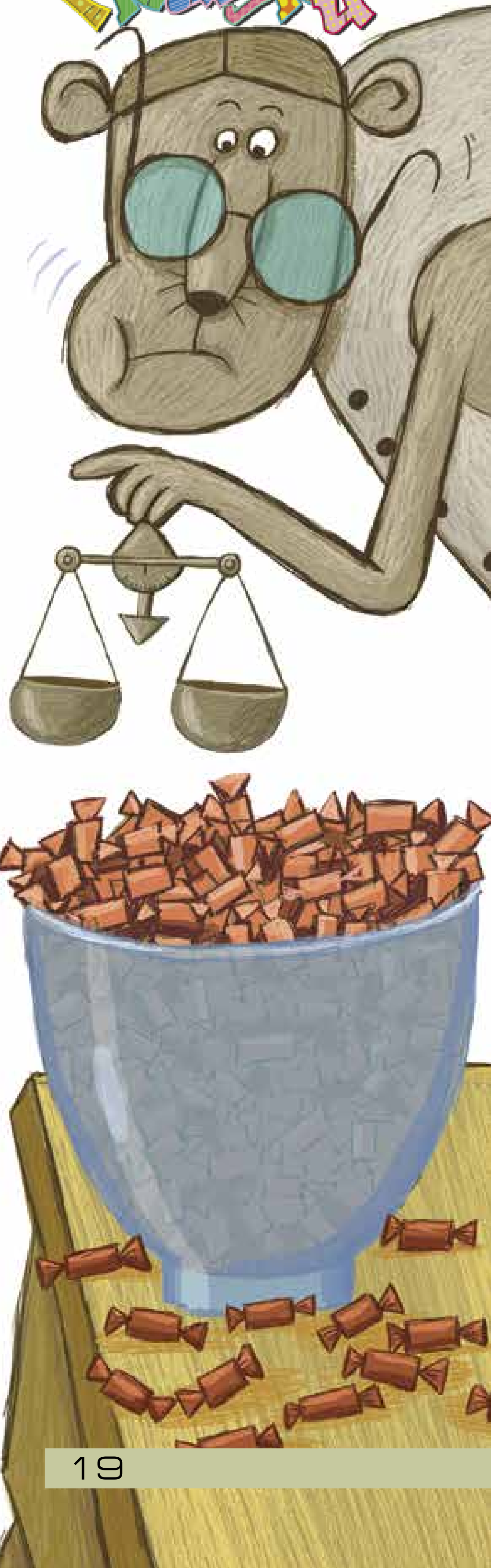
– Все конфеты у меня в салоне весят целое число граммов, – подхватил дятел Спятел. – И мы уже знаем, что веса конфет должны иметь одинаковую чётность. Допустим, что все веса нечётные. В этом случае совершим ещё один потрясающий эксперимент: уменьшим вес каждой конфеты на 1 грамм!

– Но если конфета весила всего 1 грамм, получается, что мы её полностью съедим? – уточнила Огрыза.

– Будем считать, что пустой фантик – это конфета нулевого веса, – объяснил дятел Спятел.

– Зачем этот эксперимент? – проворчала Огрыза.– Злобнопотама не проведёшь столь примитивными подтасовками. Он мгновенно почувствует подвох!

– Мы проведём его мыс-лен-но! – не согласился дятел Спятел и тут же поправился: – Эксперимент проведём, а не Злобнопотама. Так мы получим набор конфет с меньшим весом. Чем меньше веса, тем легче подобрать нужный набор.



Художник Инга Коржнева

– Восхитительно, – сказала Бусенька, – в результате в нашем распоряжении окажется набор конфет, который тоже удовлетворяет требованиям! Ведь если 12 конфет разложены на две равные кучи по 6 конфет, то после эксперимента вес каждой кучи уменьшится на 6 граммов и кучи останутся равными!

– Главное – все конфеты продолжают весить целое число граммов, – громко сказал дятел Спятел. – И поскольку до эксперимента конфеты имели нечётный вес, после эксперимента их вес станет чётным!

Это восклицание разбудило Горгулия. Где это он ухитрился заснуть? А, понятно где – на диване. Горгулий огляделся. Вокруг стола сидели дятел Спятел, Бусенька и Огрыза. На столе стояли весы со стопками черновиков на чашах.

– Я проспал всё самое существенное? – спросил Горгулий. – Чей вес чётный?

– Питон Уккх заказал в колбасном цехе Ам-Бара праздничное меню из 13 котлет, – объяснила ему Бусенька, – причём такое, что при этом любые 12 котлет можно было бы разложить на две кучи одинакового веса, по 6 котлет. Огрыза строго следит за рецептами: все её котлеты весят целое число граммов, только пока это мало помогает.

– И теперь, когда мы знаем, что все котлеты имеют чётный вес, – продолжил свою мысль дятел Спятел, – напрашивается восхитительный эксперимент: давайте уменьшим вес каждой котлеты в два раза!

– Зачем? – спросил Горгулий.– У питона Уккха желудок откалиброван до миллиграмма! Если уменьшить вес котлет, он останется голодным и всех съест!

– Мы заняты теоретическими рассуждениями, – твёрдо сказал дятел Спятел. – И эксперимент у нас тоже те-о-ре-ти-чес-кий! Чем меньше веса котлет, тем легче подобрать нужный набор.

– В результате этого уникального эксперимента, – догадалась Огрыза, – новый набор котлет тоже будет удовлетворять всем требованиям: любые 12 котлет можно будет разложить на две кучи равного веса!

– Вот именно! – громко сказал дятел Спятел. – И по-прежнему все котлеты весят целое число граммов и все веса в наборе имеют одинаковую чётность!

Это восклицание разбудило Бусеньку...

СТРАНИЧКИ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХ

Материал подготовил Константин Коханов

АСТРА – 2018

21 ноября 2018 года состоялась ежегодная природоведческая игра-конкурс «Астра», в которой смогли принять участие все желающие ребята из детских садов и школ (konkurs-astra.ru). Участники соревновались в 12 возрастных категориях и должны были ответить на вопросы из пяти предметных областей – физики, химии, биологии, географии и астрономии – по теме «АТМОСФЕРА».

Всего в конкурсе приняли участие около 185 тысяч школьников из России, Казахстана, Кыргызстана и Эстонии. Приводим некоторые задания конкурса для участников помладше.

1. На небе можно увидеть много разных объектов. А что находится в атмосфере Земли?

А Облака. **Б** Луна. **В** Звёзды. **Г** Солнце.

2. Какое явление на Земле простирается за пределы её атмосферы?

А Дождь. **Б** Снег. **В** Магнитная буря. **Г** Смерч.

3. Внимательно рассмотрите картинку слева внизу. Какую научную ошибку допустил её автор?

А Нарисовал Солнце выше облаков. **Б** Закрыл часть Солнца облаком.
В Закрыл часть облака Солнцем.
Г Нарисовал, что Солнце и облака видны одновременно.

4. Автомобильные «дворники» помогают водителю в непогоду поддерживать переднее стекло автомобиля в чистоте. А когда работа «дворников» оказывается совершенно бесполезной?

А Во время дождя.
Б Во время снегопада.
В Во время тумана.
Г Во время града.

5. Почему грозовые облака отличаются густым тёмным цветом, так что их нередко называют «свинцовыми»?

А В грозовых облаках много водяных капель.
Б В грозовых облаках много пыли и песка.
В Грозовые облака возникают только в тёмное время суток.
Г Грозовые облака формируются в очень высоких слоях атмосферы, где окружающее пространство тёмное.

6. 20 марта 2010 года в Исландии началось извержение одного из крупнейших вулканов мира Эйяфьядлайёкюдль, считавшегося спящим с 1823 года. В результате этого события сотни аэропортов Европы отменили авиарейсы. С чем связан запрет авиаперелётов, проходивших через зону распространения продуктов вулканической деятельности?

А С ухудшением видимости из-за вулканической пыли.
Б С возможным попаданием вулканической пыли в двигатели самолётов.
В С разлётом раскалённой лавы на большие расстояния.
Г С высокой температурой воздуха вблизи жерла вулкана.

7. Для чего зонт используют только сказочные персонажи?

8. Выберите только те летательные аппараты, которые человек использует для своего перемещения за пределами атмосферы Земли.

А Только 2. **Б** Только 2 и 3. **В** Только 3. **Г** Только 1 и 4.

9. Дополните следующее предложение так, чтобы утверждение стало верным. Поскольку на Луне практически нет воздуха, то...

А на Луне самолёты смогут летать быстрее, чем на Земле.
Б космонавты на ней не смогут общаться даже по радиосвязи.
В с её поверхности нельзя увидеть звёзды.
Г при посадке на лунную поверхность бесполезен парашют.

Художник Елизавета Сухно

XXX Математический праздник

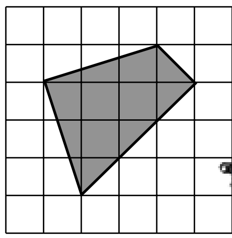
Юбилейный математический праздник для 6 и 7 классов собрал 17 февраля 2019 года в Москве более 10000 школьников. Приводим задачи и решения олимпиады. Подробности – на сайте mccme.ru/matprazdnik

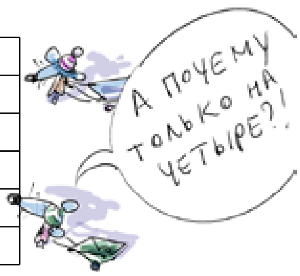
6 класс

1 [4].[1] Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стёр. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стёр Миша?

А.В.Шаповалов

2 [5]. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части.



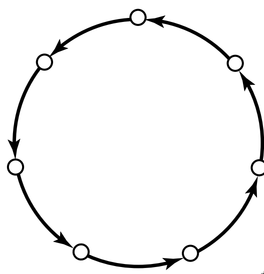


М.А.Волчкевич

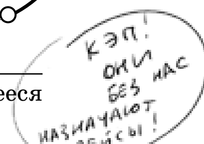
3 [6]. Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР – шесть, а в слове ИКОСАЭДР – семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР?

Е.В.Бакаев

4 [6]. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) ещё несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было



[1]В квадратных скобках указано число баллов, присуждавшееся за полное решение задачи.



бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.

В.А. Клепцын

5 [8]. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 ёлок. Докажите, что обязательно найдётся дерево, рядом с которым растёт сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растёт сосна.

Е.В. Бакаев

6 [8]. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

А.В. Шаповалов

7 класс

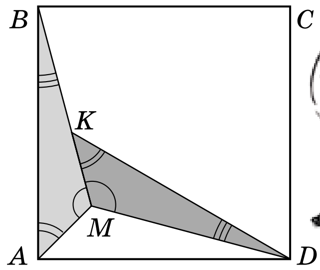
1 [4]. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трёх чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался?

М.А. Евдокимов, И.В. Раскина

2 [5]. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов – 20 круглых и 8 кубических арбузов. Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает.

М.А. Хачатурян

3 [6]. Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.



Е.В.Бакаев

4 [6]. Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?

А.В.Шаповалов

5 [9]. Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 15 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см?

М.А.Волчкевич

6 [9]. В ряд лежат 100 монет, часть – вверх орлом, а остальные — вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (то есть семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т.д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом.

С.И.Токарев, А.В.Шаповалов

Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения II тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 1 июня. В письме кроме имени и фамилии укажите ваш город, а также школу и класс, где вы учитесь. За лучшее решение отдельных туров предусмотрены специальные премии. Предлагайте на конкурс задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Желаем успеха!

II ТУР

6. В русском языке некоторые названия частей человеческого тела различаются одной буквой, например: *кисть* (руки) – *кость*, *ресница* – *десница*. Во второй паре одно из слов (*десница* «правая рука») – устаревшее. Найдите ещё одну так же устроенную пару, в которой оба слова – устаревшие.

И.Ф. Акулич, И.Б. Иткин

7. Маленькой Маше 2 года и 2 месяца. Говоря об одном из своих любимых мультфильмов, Маша всегда добавляет в его название частицу -*ка*. Что это за мультфильм?

Б.Л. Гуревич

8. – Двадцать два… двадцать три… двадцать четыре ____________________ … – громко считала мама.

– Двадцать четыре __________________! – обрадовался маленький Лёва. – Прочитай мне их, пожалуйста!

– Ой, нет, – рассмеялась мама, – я не пишу, я шью.

Заполните пропуски в правильном порядке.

Л.З. Иткина

9. «… озеро»,«… вздох», «… старость»

Какое прилагательное (в разных грамматических формах) мы пропустили?

П.С. Кудрявцева

10. Слово *ТАК* означает «плохо». Слово *СЯК* тоже иногда можно заменить на *плохо*. А вот *ТАК-СЯК* означает «более или менее; плохо, но не совсем». Какое наречие мы заменили на *ТАК-СЯК*?

С.И. Переверзева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I ТУР
(«Квантик» № 1, 2019)

1. В качестве ответа можно использовать, во-первых, предложения, содержащие устойчивые выражения со словом *тут* (*Кого не ждут, тот **тут как тут**!, Хотел решить все задачи за минуту, **да не тут-то было**!, Не могу решить эту задачу – **и всё тут**!*), а во-вторых (чуть менее строго) – те предложения, где слово *тут* имеет значение времени: *В комнату вошёл папа, и тут такое началось!..*

2. Ответ: ***лютик*** и ***лютня***. Несмотря на свою красоту, лютик обладает едким (а у некоторых видов – по-настоящему ядовитым) соком; не случайно одно из его названий – *куриная слепота*. Соответственно, слово *лютик* образовано от прилагательного *лютый* «жестокий, свирепый». Название же музыкального инструмента *лютня*, хотя и созвучно со словом *лютый*, не имеет к нему никакого отношения: это название в конечном счёте восходит к арабскому слову со значением «дерево, древесина».

3. Чтобы решить эту задачу, важно учесть, что маленькие дети, во-первых, часто не выговаривают звук *л*, а во-вторых, столь же часто «укорачивают» многосложные слова, отбрасывая слоги, стоящие далеко от ударного гласного. **Ответ:** ***шоколадка***.

4. Не забудем, что эта задача входит в конкурс по русскому языку, а не, например, по физике. Значит, речь идёт о слове или словах, обозначающих промежуток времени и при этом связанных с движениями глаз. Эти слова – синонимы ***миг*** и ***мгновение***: оба они происходят от того же корня, что и глагол *мигать*, и буквально означают «время, за которое человек успевает закрыть и открыть глаза». У слова *мгновение* это первоначальное значение сохраняется в устойчивом выражении *во мгновение ока*.

(Данный некоторыми участниками ответ *век* подошёл бы только для задачи-шутки: слова *век* и *веко* никак не связаны между собой.)

5. Обратим внимание, что эта история (как и многие другие истории, фигурирующие в задачах нашего конкурса, подлинная) произошла зимой, точнее, в конце декабря. В бегущей строке было написано «С НОВЫМ ГОДОМ», и Серёжа увидел сперва конец надписи, а потом – её начало:

…СНОВЫМГО**ДОМСНОВ**ЫМГОДОМ…

Этой задачей мы хотели поздравить с Новым годом всех участников нашего конкурса.

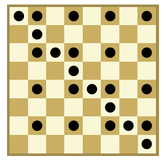
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 2, 2019)

26. *Среди 12 человек нет людей одного роста. Они выстроились в круг, после чего те, кто выше обоих своих соседей, подняли левую руку, а кто ниже обоих своих соседей – правую. Могло ли случиться, что а) никто не поднял руки; б) все подняли руку?*

а) Ответ: нет. Самый высокий человек поднял левую руку.

б) Ответ: да. Возьмём 6 самых низких людей и расставим их через одного. Тогда все они поднимут правую руку, а оставшиеся 6 – левую.

27. *Можно ли на некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставить по фишке так, чтобы количества фишек в любых двух соседних вертикалях и в любых двух соседних горизонталях были ненулевыми и отличались а) в 5 раз; б) в 6 раз?*



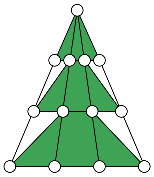
а) Ответ: да. Расставим в нечётных вертикалях и горизонталях по 1 фишке, а в чётных – по 5 так, как на рисунке.

б) Ответ: нет. Допустим, нам удалось найти такую расстановку. Тогда в каждой горизонтали и вертикали либо 1 фишка (назовём их *тощими*), либо 6 (назовём их *толстыми*). Толстых вертикалей, как и толстых горизонталей, 4, поэтому фишек, стоящих на пересечении толстой вертикали и толстой горизонтали, не более 16. А фишек, стоящих в толстой вертикали и тощей горизонтали, не более 4 – по одной на каждую горизонталь. Итого в толстых вертикалях получается не более 20 фишек, а должно быть $4\cdot 6=24$. Противоречие.

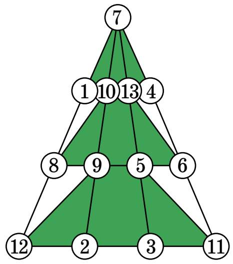
28. *31 декабря 19 человек справляли Новый год. Каждому гостю дали две карточки, маленькую и большую, и попросили написать на маленькой карточке свой возраст (число полных лет), а на большой – свой год рождения. После этого все карточки смешали и произвольно разделили на две группы. В первой группе сумма чисел поделилась на 19. Обязательно ли тогда и во второй группе сумма чисел поделилась на 19?*

Ответ: да. Для каждого гостя сумма чисел на маленькой и большой карточках будет одной и той же, а именно – равной номеру уходящего года, обозначим его N. Так как всего было 19 человек, сумма чисел на всех карточках равна 19 • N, так что эта сумма делится на 19. Если сумма в одной из групп карточек также делится на 19, то и сумма чисел на оставшихся карточках должна делиться на 19.

29. *Ёлочка украшена тремя горизонтальными гирляндами и четырьмя гирляндами, спускающимися с вершины вниз. Во всех гирляндах по четыре шарика. Впишите в шарики все целые числа от 1 до 13 (в каждый шарик по одному числу) так, чтобы сумма четырёх чисел в каждой из семи гирлянд была одной и той же.*



Пусть в вершине ёлочки записано число x, а сумма чисел в каждой гирлянде равна S. Сумма всех чисел от 1 до 13 равна 91. Эту сумму можно подсчитать двумя способами. Если суммировать горизонтальными гирляндами, то получим $3S+x=91$. Если суммировать гирляндами, спускающимися сверху вниз, то получим $4S-3x=91$. Решая систему этих уравнений, найдём $x=7$ и $S=28$. Теперь можно расставить числа, чтобы выполнялись все условия задачи. Один из возможных вариантов приведен на рисунке справа.



30. *Можно ли раскрасить все точки бесконечной плоскости в а) 3; б) 4 цвета так, чтобы все цвета присутствовали, но нельзя было провести окружность, на которой есть точки всех цветов? (Кисточка, которой красится плоскость, настолько тонкая, что можно любую точку покрасить в любой цвет, не запачкав никакие другие точки.)*

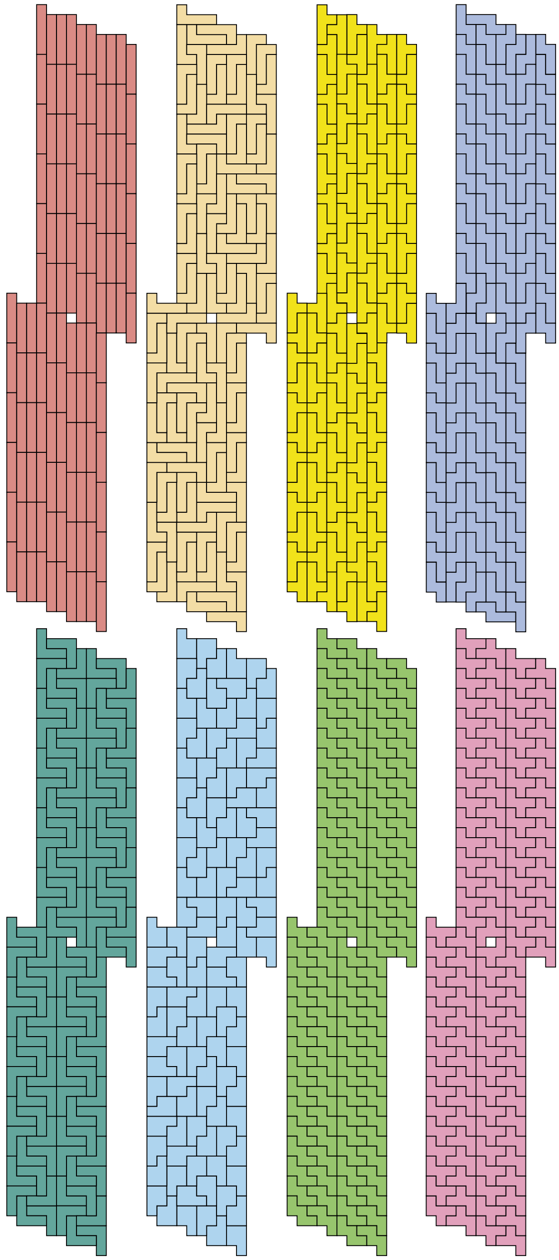
а) Ответ: нет. Пусть такая раскраска нашлась. Возьмём три точки A, B, C разных цветов. Они не могут образовывать треугольник, иначе описанная вокруг него окружность содержала бы три цвета. Значит, они лежат на одной прямой. Возьмём теперь любую точку X вне этой прямой. Она совпадает по цвету с одной из точек A, B, C, пусть с A. Тогда X, B, C имеют разные цвета и снова образуют треугольник. Противоречие.

б) Ответ: да. Выберем три точки на одной прямой и покрасим их в три первых цвета, а все остальные точки плоскости – в четвёртый цвет. Так как окружность не может содержать три точки, лежащие на одной прямой, на любой окружности не будет хотя бы одного из первых трёх цветов.

НА СКОЛЬКО ВИДОВ ПЕНТАМИНО МОЖЕТ ДЕЛИТЬСЯ ФИГУРА?

(«Квантик» № 3, 2019)

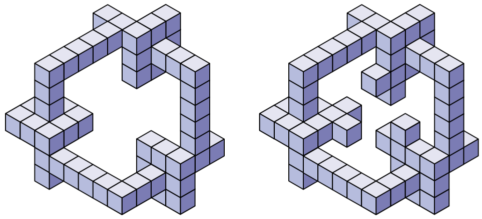
Нам известен пример Джорджа Сичермана. Придуманную им фигуру можно разделить на 8 видов пентамино (см. рисунок).



Много интересных задач и картинок с полимино и другими фигурами можно найти на сайте recmath.org/PolyCur/multiple.html

ПЕРВОАПРЕЛЬСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА (невозможный объект – своими руками).

Увы, склеить связный объект, как показано на рисунке в статье (этап 2) не удастся. Максимум, что можно сделать – склеить похожую фигуру, см. рисунки, но соединить мостиками квадратные кольца и сотворить таким образом треугольник Пенроуза не получится.



А жаль...Так хотелось сделать своими руками что-то невозможное!

«АСТРА»–2018

1. Ответ: А. В воздушной оболочке Земли (атмосфере) находятся облака.

2. Ответ: В.

3. Ответ: В. Солнце находится гораздо дальше облаков и не может перекрывать их собой.

4. Ответ: В. Автомобильные «дворники» предназначены для скидывания с лобового стекла осадков или частиц грязи, которые ухудшали водителю видимость. Во время тумана причиной плохой видимости является не загрязнение лобового стекла, а заполнение всего окружающего воздуха каплями воды. Поэтому использование «дворников» в этом случае не улучшает водителю видимость на дороге.

5. Ответ: А. Грозовые тучи плотно заполнены каплями воды и частицами льда, так что значительная часть солнечного света не может пройти через многочисленные препятствия. Оттого такие тучи и кажутся тёмными.

6. Ответ: Б. При попадании в турбину самолёта вулканический пепел может повлиять на работу двигателя и привести к его остановке.

7. Ответ: А. Зонт непригоден для полётов.

8. Ответ: В. Для движения в безвоздушном пространстве предназначена только ракета. Самолёту и вертолёту атмосфера необходима, чтобы их вращающиеся винты могли отталкиваться от воздуха. Дирижабль держится в атмосфере подобно наполненному гелием воздушному шарику за счёт выталкивающей силы воздуха.

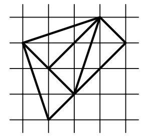
9. Ответ: Г. Ни реактивные, ни винтовые самолёты без атмосферы летать не смогут, поскольку воздух служит опорой их крыльям. Использование радиосвязи (по крайней мере в пределах прямой видимости) возможно и без атмосферы, то есть в вакууме. Не будет мешать отсутствие атмосферы и наблюдению звёзд (скорее наоборот – без неё звёзды будут видны гораздо лучше. А вот утверждение о том, что без атмосферы парашют окажется бесполезным, поскольку не сможет тормозить о воздух, – верное.

XXX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Ответ: 33. Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержит ровно двадцать: это сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, ..., 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стёрто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, ..., 92 (таких восемь). То есть и из них Миша ни одно не стёр. Всего таких чисел $19+20-2=$ $=37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37+30=67$ чисел, а Миша стёр $100-67=33$ числа.

2. См. пример на рисунке справа.



3. Ответ: 5. Если Сеня с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые ещё входят в ДОДЕКАЭДР, он в трёх ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, то есть там он напишет верно как минимум две буквы и не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Сеня пишет верно. Тогда он пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР помимо Д ещё верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Сеня сделает 5 ошибок.

4. Пример с пятью дополнительными рейсами см. на рисунке справа. Можно доказать, что добавить меньше рейсов невозможно.

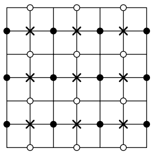
5. Обойдём озеро по кругу и напишем на деревьях буквы: А, Б, В, снова А, Б, В и т. д. Деревьев с каждой буквой будет по $2019:3=$ $=673$. Если бы сосен с каждой буквой было не более чем 336, то их всего было бы не более чем $336\cdot 3=1008$. А так как их 1009, то сосен с какой-то буквой, скажем, А, будет хотя бы 337.

Рассмотрим теперь только деревья с буквой А. Если какие-то две сосны стоят подряд, то задача решена – дерево с буквой В между ними удовлетворяет условиям. Если же между каждыми соседними соснами с буквой А растёт хотя бы по одной ёлке, то деревьев с буквой А будет не менее чем $337 \cdot 2 = 674$, а это не так.

6. Ответ: 3. Клетку в углу грани можно накрыть тремя способами (целиком в грани, с перегибом через одно ребро угла, с перегибом через другое ребро угла). Значит, каждая клетка накрыта *не более чем тремя квадратами*.

Приведём теперь пример, когда каждая клетка накрыта *ровно тремя квадратами*. Рассмотрим обычное покрытие куба квадратами, когда каждая грань покрыта девятью квадратами. Из обычного покрытия можно получить повёрнутое: оставим нетронутыми две противоположные грани, а на остальных четырёх гранях сдвинем все квадраты по кольцу на одну клетку. Так как пару противоположных граней можно выбрать тремя способами, то повёрнутых покрытий получится ровно три. Покажем, что не совпадают никакие два квадрата на покрытиях, повёрнутых по-разному.

Рассмотрим одну грань. На рисунке отмечены центры покрывающих её квадратов: крестиками, если она не сдвигалась, чёрными и белыми точками – если сдвигалась в одном или другом направлении. Видно, что никакие центры, а значит, и никакие квадраты не совпали.



7 класс

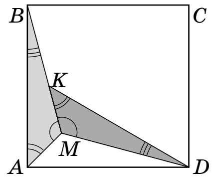
1. Ответ: в первый чемодан посадить тварей весом 10, 4, 3 кг; во второй – 9, 7, 2; в третий – 8, 6, 5. Этот способ единственный.

2. Ответ: слоны едят только круглые арбузы. Выясним сначала, сколько арбузов ест на завтрак каждое животное. По условию 5 слонов и 7 бегемотов съедают 31 арбуз, а 8 слонов и 4 бегемота – 28 арбузов. Мы видим, что если заменить трёх бегемотов на трёх слонов, то требуется на три арбуза меньше. Значит, 12 слонов съели бы $31 - 7 = 24$ арбуза (каждый по 2), а 12 бегемотов $31 + 5 = 36$ арбузов (каждый по 3).

В первой группе бегемоты съели $7 \cdot 3 = 21$ арбуз. Столько арбузов одной формы не было, значит, бегемоты едят арбузы любой формы, а привередливы слоны. Во второй группе слоны съели $8 \cdot 2 = 16$ арбузов. Столько кубических арбузов не было, значит, слоны предпочитают именно круглые арбузы.

3. Ответ: 120°, 45°, 15°. Заметим, что треугольник MAD тоже равен треугольнику MAB – по трём сторонам: сторона MA у них общая, $AD = AB$ как стороны квадрата, $MD = MB$ по условию (лежат напротив соответственных углов в равных треугольниках).

Значит, $\angle BAM = \angle MAD = 90°/2 = 45°$. В точке M сходятся три соответственных угла равных треугольников, поэтому $\angle AMB = 360°/3 = 120°$. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, $\angle ABM = 180° - 120° - 45° = 15°$.

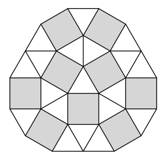


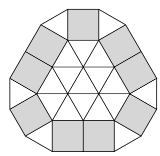
4. Ответ: Вася, причём вне зависимости от действий игроков. За ход две кучи заменяются на четыре, то есть число куч увеличивается на 2. В начале число куч было нечётным, поэтому, увеличиваясь на 2, оно всё время будет нечётным.

Если очередной ход сделать нельзя, то в двух самых больших кучках в сумме 2 или 3 камня. Тогда в остальных кучках по 1 камню, и их либо $120 - 3 = 117$, либо $120 - 2 = 118$. То есть в конце будет 119 куч (так как их нечётное количество).

Но чтобы получить 119 куч, надо сделать $(119 - 3) : 2 = 58$ ходов. Это число чётно, значит, последний ход сделал Вася (и он выиграл).

5. Ответ: Да, мог (см. рисунки).

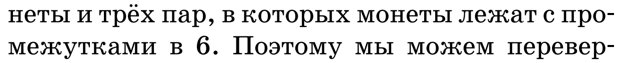




6. Достаточно научиться переворачивать каждую монету (сохраняя положение остальных).

Покажем сначала, как перевернуть пару монет, между которыми лежит ровно 6 монет. Если мысленно объединить эту пару с монетами между ними, получится группа из 8 монет подряд. Перевернём в этой группе 7 левых монет, затем 7 правых. Тогда крайние монеты перевернутся по разу, а промежуточные дважды (то есть вернутся в исходное положение).

Пусть теперь мы хотим перевернуть какую-то одну монету, лежащую в левой половине (для правой половины рассуждения аналогичны). Посмотрим на семёрку монет, первая из которых – выбранная нами, следующая лежит через 6 монет, следующая – ещё через 6 и т. д.



Эта семёрка состоит из выбранной нами монеты и трёх пар, в которых монеты лежат с промежутками в 6. Поэтому мы можем перевернуть каждую из этих пар (как описано выше), а потом всю семёрку. В итоге положение сменит только выбранная монета.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач VIII тура, с которыми справитесь, не позднее 1 мая в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

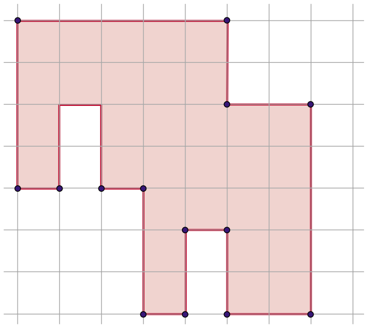
VIII ТУР

36. Ствол одного дерева распилили на несколько частей, а потом ствол другого дерева распилили за вдвое большее время на другое число частей. Докажите, что во втором случае число частей нечётно. (На каждый распил тратили одно и то же время.)

37. Можно ли из 1000 чисел 1, 1/2, 1/3, ..., 1/1000 выбрать 8 чисел и записать их в ряд так, чтобы разности между соседними числами были одинаковы?

Авторы: Григорий Гальперин (36), Михаил Малкин (37), Юрий Маркелов (38), Константин Кноп (39), Александр Грибалко (40)

38. Разделите данную фигуру на две равные части.



39. У Кости было 26 одинаковых на вид монет, среди них 21 – настоящие, которые весят поровну, и 5 – фальшивые, которые тоже весят поровну, но несколько легче. Все вместе они весили 421 г. Костя потерял 5 монет, и теперь оставшиеся весят только 340 г. Сколько весит настоящая монета?

40. Костяшка домино имеет вид прямоугольника 1×2, разделённого на два квадратика 1×1, на каждом квадратике выбито от 0 до 6 очков. В полном наборе домино 28 неповторяющихся костяшек. Можно ли уложить их все в коробку 4×7 в два слоя так, чтобы каждые два квадратика, находящиеся на одном и том же месте в разных слоях, содержали одинаковое число очков?

Художник Николай Крутиков

ДВОЙНАЯ ТЕНЬ

В солнечный день иногда можно наблюдать такое явление. Две параллельные ветки дерева отбрасывают тени: нижняя ветвь – резкую и тёмную, а верхняя – более широкую и светлую. Если эти две тени случайно налагаются друг на друга, то посередине тёмной тени возникает светлая полоса.

Похожее явление можно наблюдать и в помещении: если освещать пол белым экраном смартфона, то два карандаша друг над другом оставляют как раз такую тень со светлой полосой.

Почему так происходит?

Автор Сергей Шашков

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 19004
9 772227 798190