Журнал

КВАНТИК

для любознательных

№ 7

ИЮЛЬ 2019

ШОКОЛАДНОЕ ЗАНЯТИЕ

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ТРИАКОНТАЭДРА

ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ

Enter

№ 7 | июль 2019

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

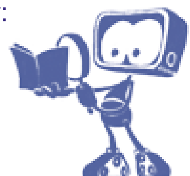
НАШИ НОВИНКИ

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

- Альманах «Квантик». Выпуск 12,
- Альманах «Квантик». Выпуск 13,
- второй выпуск «Библиотечки журнала «Квантик» – книга С. Н. Федина «Перепутаница».

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru)**, в интернет-магазине **kvantik.ru**, в магазинах «Библио-Глобус» и в других магазинах (список на сайте: **kvantik.com/buy**)



www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 7, июль 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com

Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 11.06.2019

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Панов,
Пётр Панов

КАК МЫ СОБИРАЛИ АБАЖУР, или ПРИКЛЮЧЕНИЯ ТРИАКОНТАЭДРА

После ремонта мы решили поменять все светильники и купили новый абажур, который называется IQ-light. Он весит всего 100 граммов. Такой лёгкий он потому, что собирается из 30 тонких гибких пластинок. Каждая пластинка имеет четырёхугольную форму и снабжена четырьмя крючками. Эту конструкцию придумал в 1973 году датский дизайнер Хольгер Стрём.

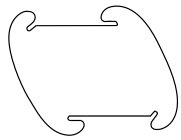


Рис. 1. Абажур IQ-light собирается из 30 четырёхугольников с крючками

Буквы IQ в названии означают Interlocking Quadrilaterals – сцепленные четырёхугольники. На рисунке 1 видно, что в некоторых местах они сцепляются по пять штук, а в некоторых по три. Сама конструкция кажется сначала достаточно сложной, но, к счастью, к ней прилагается подробная инструкция, да и в процессе самой сборки становится понятным, что тут к чему.

Рис. 2. Ещё не полностью собранный абажур. Видно, что он составлен из ромбов

Видно, что абажур представляет собой многогранник с одинаковыми гранями-ромбами (рис. 2).

Установим его точное научное название. Начнём с таблицы числовых греческих префиксов, попросту – приставок.

Таблица греческих числовых префиксов

Число	Префикс	Грань
1	моно	
2	ди	
3	три	
4	тетра	
6	гекса	
8	окта	эдр
12	додека	
20	икоса	
30	триаконта	
60	гексаконта	
много	поли	

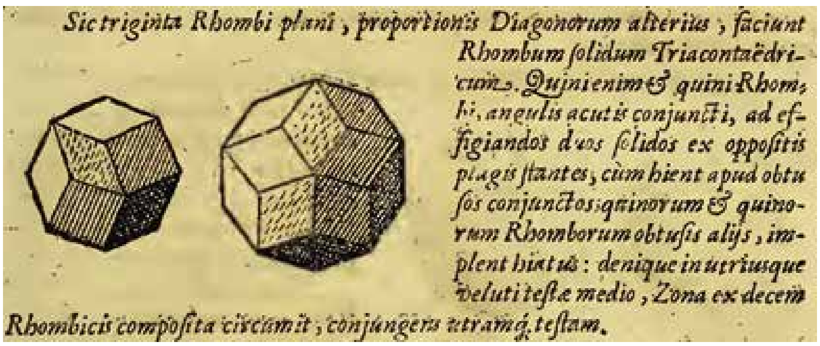
Предмет со многими гранями можно назвать многогранником, а можно посмотреть в нижнюю строку таблицы, где в первом столбце стоит слово *много*, из второго столбца нужно взять приставку *поли-* и присоединить к ней слово *эдр* из третьего столбца, получится *полиэдр*. Тот же многогранник, но короче и звучит красиво.

Что касается нашего абажура, то у него 30 граней, и с помощью таблицы мы определяем его научное название – *триаконтаэдр*. Для надёжности можно добавить ещё одно слово и сказать *ромбический* триаконтаэдр. Именно так называет его Иоганн Кеплер в своей знаменитой книге *Harmonices Mundi* – «Гармония мира» (опубликована в 1619 году).

Желающим предлагаем пройтись по строкам таблицы и посмотреть, какие тут получаются названия. Может, встретите что-нибудь знакомое, а может, наоборот, удивитесь чему-нибудь неожиданному.

ИОГАНН КЕПЛЕР (1571–1630)

Начнём с картинки – небольшого отрывка из *Harmonices Mundi* (рис. 3). Справа там как раз изображён триаконтаэдр. Из 30 составляющих его ромбов нам видны только 10. Во второй строке текста на рисунке узнаётся название ромбического триаконтаэдра.



Sic triginta Rhombi plani, proportionis Diagonorum alterius, faciunt
Rhombum solidum Triacontaëdricum. Quini enim & quini Rhombi, angulis acutis conjuncti, ad effigiandos duos solidos ex oppositis plagis stantes, cum hient apud obtusos conjunctos: quinorum & quinorum Rhomborum obtusis aliis, implent hiatus: denique in utriusque veluti testæ medio, Zona ex decem
Rhombicis composita circumit, conjungens utramq; testam.

Рис. 3. Отрывок из *Harmonices Mundi*

У другого, меньшего многогранника, всего 12 граней, и в соответствии с нашей таблицей он называется *ромбическим додекаэдром*.

Обратим внимание ещё на одно слово – *Zona*, оно расположено в предпоследней строке и относится уже

к другому рисунку Кеплера, где изображён процесс сборки триаконтаэдра (рис. 4).

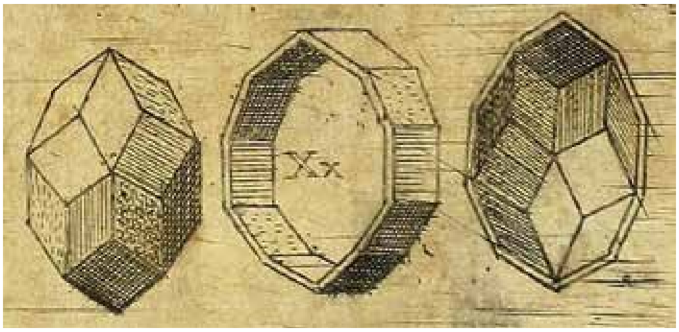


Рис. 4. Сборка триаконтаэдра

Кеплер предлагает сначала собрать из ромбов пятиугольную звезду, дополнить её ещё пятью ромбами до, мы бы сказали, тарелки или чаши, но Кеплер сравнивает это со створкой раковины, а потом собрать ещё одну такую конструкцию. На рисунке они расположены друг против друга слева и справа. А между ними – как раз *зона*, состоящая из десяти ромбов. Заметьте, что все 10 отрезков, по которым соединены эти ромбы, параллельны друг другу. Теперь остаётся скрепить раковины с зоной, и сборка триаконтаэдра будет завершена.

У Кеплера имеется аналогичное графическое руководство и для сборки ромбического додекаэдра (рис. 5).

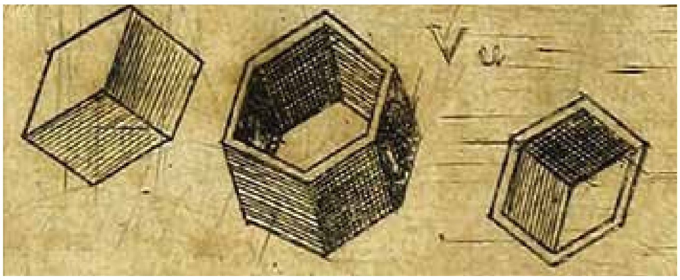


Рис. 5. Сборка ромбического додекаэдра

Дальше нас ждут некоторые эксперименты с этими многогранниками. Поэтому скоро мы соберём их, следуя как раз инструкциям Кеплера.

Все математики безоговорочно признают приоритет Кеплера в открытии ромбического триаконтаэдра, и это, безусловно, справедливо. Но есть два обстоятельства, о которых нужно сказать. Во-первых, у Кеплера были предшественники и, во-вторых, Кеплер не сказал, какие именно ромбы годятся для изготовления додекаэдра, а какие – для триаконтаэдра.

ВЕНЦЕЛЬ ЯМНИЦЕР (1508–1585)

Ямницер был одним из самых известных ювелиров своего времени – золотых дел мастером, художником, гравёром. Он работал в Нюрнберге, заведовал там монетным двором, а также был придворным ювелиром немецких императоров и проводил научные исследования, связанные со своей профессией. В 1568 году он опубликовал книгу под названием *Perspectiva Corporum Regularium*, которое можно перевести как «Вариации на тему правильных многогранников». Эта книга была собранием множества замечательных гравюр. И вот одна из них (рис. 6), и, конечно же, на ней изображён тот же самый триаконтаэдр, что у Кеплера в его *Harmonices Mundi*, только представленный рёбрами, а не гранями.

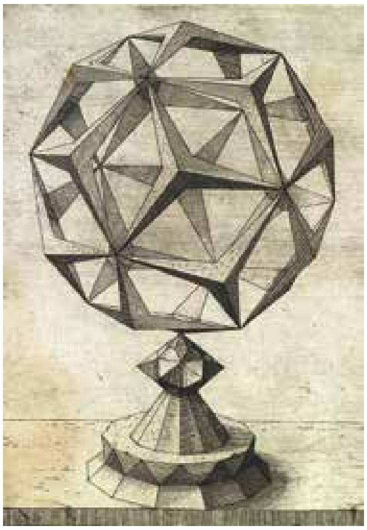


Рис. 6. Триаконтаэдр Венцеля Ямницера

О ПОДХОДЯЩИХ РОМБАХ

Кеплер не написал, из каких ромбов можно собрать додекаэдр и из каких – триаконтаэдр. Это важный вопрос, а ответ на него таков: додекаэдр можно собрать из 12 равных ромбов с отношением диагоналей $1 : \sqrt{2}$, а триаконтаэдр собирается из 30 равных ромбов с отношением диагоналей $1 : \varphi$ и только (что такое φ, сейчас объясним).

Число $\sqrt{2}$ – это такое число, квадрат которого равен 2 и которое с хорошей точностью вычисляется одним нажатием кнопки на любом кальку-

ляторе, а число φ называется *золотым сечением*, оно задаётся формулой $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и тоже легко вычисляется на калькуляторе: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\varphi = 1{,}618\ldots$

При сборке многогранников нам такая точность не понадобится, и мы ограничимся приближениями $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\varphi \approx 1{,}6$.

Добавим, что ромб, расположенный на рисунке 7 справа, называется *золотым ромбом*.

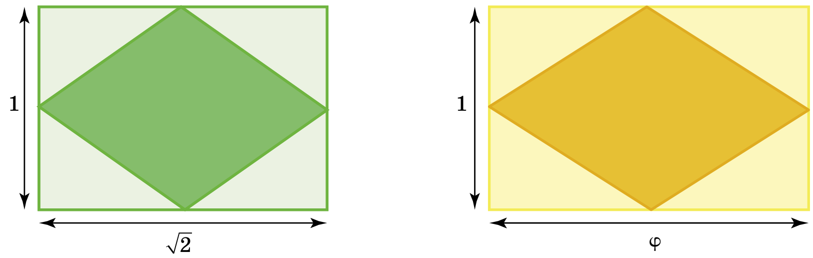


Рис. 7. Подходящие ромбы: из левых собирается ромбический додекаэдр, а из правых – триаконтаэдр

КАК СОБИРАТЬ ТРИАКОНТАЭДР

На рисунках Кеплера видно, какую сторону одного ромба с какой стороной другого нужно скреплять при сборке триаконтаэдра, но сам механизм соединения не указан. К счастью, у нас уже есть опыт сборки многогранников – смотрите статью «Бумажная модель плоскости Лобачевского» в журналах «Квантик» №5 и 6 за 2018 год. Метод сборки, который мы там использовали, был изобретён американским архитектором Фредом Бассетти.

Прежде всего нам понадобится большой лист ватмана размером 61 × 86 см (формат А1) и большое количество резинок для купюр (их ещё называют банковскими или канцелярскими) диаметром 30 мм. Начнём с золотых ромбов – заготовок для граней триаконтаэдра. Обрежем лист ватмана до размеров 60 × 80 см и разметим его на ромбы с диагоналями 10 и 16 см, как показано на рисунке 8.

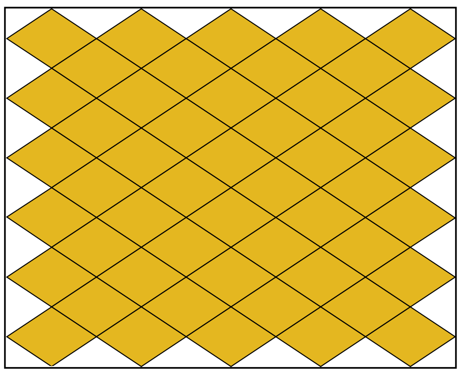


Рис. 8. Лист ватмана разбит на 50 ромбов с диагоналями 10 и 16 см

Вырежем все получившиеся 50 ромбов и один из них превратим в шаблон: вдоль границы ромба прямыми, параллельными его сторонам, отделим полоски шириной в 1 см (рис. 9).

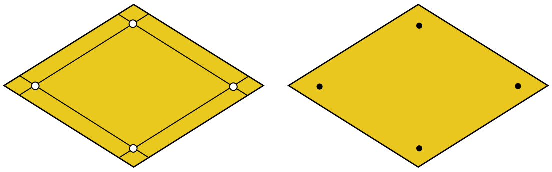


Рис. 9. Шаблон и размеченная с его помощью заготовка

Для нас важны точки попарного пересечения вспомогательных прямых, параллельных сторонам ромба. Там нужно сделать маленькие дырочки, через которые будут размечаться все остальные ромбы – заготовки для граней. После разметки нам предстоит продолжительная работа с ножницами и бумагой, основные этапы которой изображены на рисунке 10.

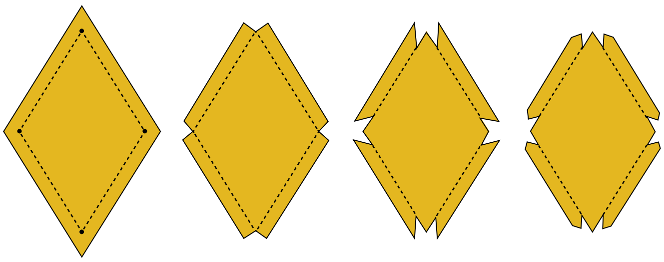


Рис. 10. Обработка заготовки

Слева на нём изображён размеченный ромб с дополнительными штриховыми линиями, по которым будут производиться сгибы. Эти линии рисовать не нужно, но полезно о них помнить. Сначала в каждой из вершин ромба, ориентируясь на отмеченную точку, вырежем по маленькому четырёхугольнику, а потом отогнём боковые полоски. Внутренний ромб окажется окружённым четырьмя полосками шириной 1 см и длиной, равной стороне внутреннего ромба. Дальше отрежем от каждой из этих полосок по паре маленьких треугольничков, а потом и ещё по два поменьше (рис. 10, справа).

На рисунке 11 мы видим уже готовые бумажные грани триаконтаэдра. Там же показан механизм соединения этих деталей-граней – они прикладываются друг к другу отогнутыми рёбрами, на которые накидывается слегка растянутая резинка.

Рис. 11. Соединение граней

Теперь самое время воспользоваться инструкцией Кеплера по сборке триаконтаэдра – рисунком 4. Его изготовление займёт у вас не больше 10 минут (рис. 12).

О СБОРКЕ РОМБИЧЕСКОГО ДОДЕКАЭДРА

Принцип сборки ромбического додекаэдра (рис. 13) тот же самый. Поскольку граней у него всего двенадцать, лист ватмана можно взять поменьше, а именно 42 × 59 см (формат А2). Его нужно обрезать до размера 40 × 56 см, отрезав по краям узенькие полоски шириной 2 и 3 см, а потом, наподобие рисунка 8, разбить его на 25 ромбов с диагоналями 10 и 14 см. Из одного полученного ромба нужно будет сделать шаблон с четырьмя дырками, разметить 12 ромбов, как на рисунке 9, обрезать их, как на рисунке 10, а потом с помощью тех же самых резинок собрать ромбический додекаэдр, используя рисунок 5.

Рис. 12. Триаконтаэдр

Рис. 13. Ромбический додекаэдр

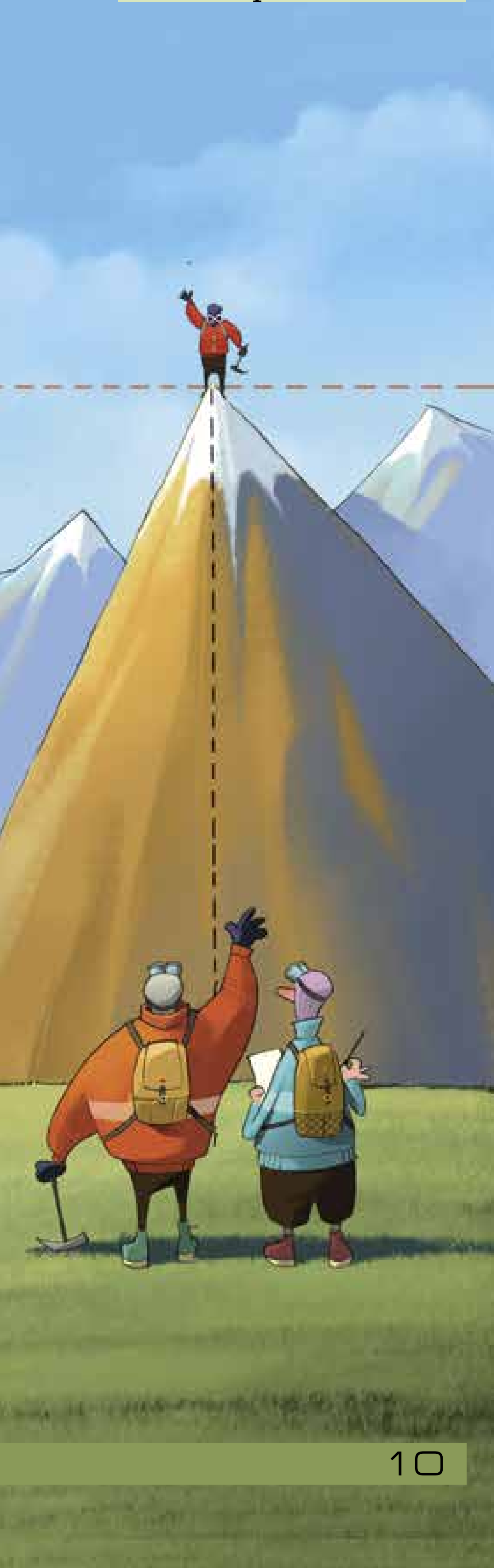
Продолжение следует

Художник Анна Горлач

ДВОЙНЫЕ ЛЕТАЮЩИЕ ТАРЕЛКИ

Автор Алексей Панов
Художник Алексей Вайнер

Егор Бакаев



ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Мы покажем, как можно находить площадь треугольника, и предложим вам подумать над задачами, где потребуется это умение применить. Как обычно, к некоторым задачам указания или решения даны сразу после их условий, а к некоторым – в конце журнала.

Рассмотрим сначала треугольники, расположенные на квадратной сетке.

Задача 1. Найдите площади четырёх треугольников, изображённых на рисунке 1.

Ниже приводится решение, но сначала попробуйте решить задачу самостоятельно.

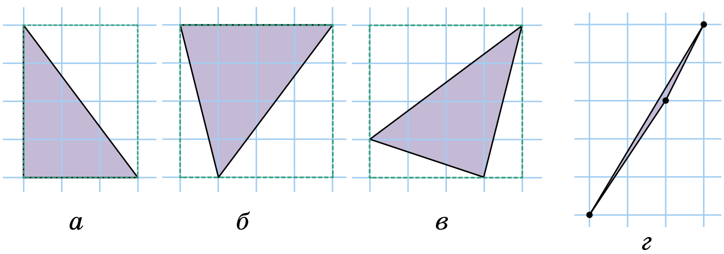


Рис. 1 *а* *б* *в* *г*

а) Этот треугольник – половина прямоугольника (рис. 2, *а*). Значит, нужно найти площадь прямоугольника и поделить её пополам. А чтобы её найти, надо перемножить его стороны. Ответ: $\frac{3\cdot 4}{2}=6$.

б) Проведём в треугольнике высоту (рис. 2, *б*). Она делит его на два прямоугольных треугольника. Их площади найдём как в пункте а). Ответ: $\frac{1\cdot 4}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}=8$.

в) Здесь такое решение, как в пункте б), не сработает, потому что ни одна высота треугольника не идёт по линии сетки. Поступим по-другому: достроим треугольник до прямоугольника и найдём площади достроенных прямоугольных треугольников (рис. 2, *в*). Затем из площади прямоугольника вычтем площади добавленных частей. Ответ: $4\cdot 4-\frac{3\cdot 4}{2}-\frac{3\cdot 1}{2}-\frac{1\cdot 4}{2}=6{,}5$.

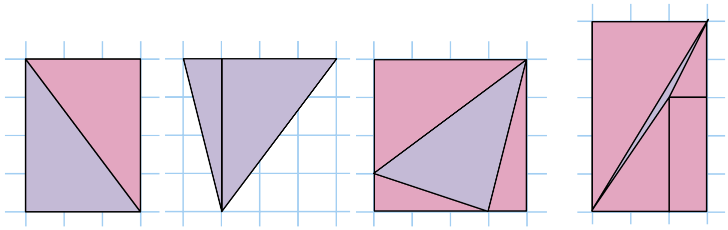


Рис. 2 *а* *б* *в* *г*

г) Снова достроим треугольник до прямоугольника. Добавленная область разрезается на прямоугольник и три прямоугольных треугольника (рис. 2,*г*). Ответ: $3\cdot 5-3-\frac{3\cdot 5}{2}-\frac{2\cdot 3}{2}-\frac{1\cdot 2}{2}=0{,}5$.

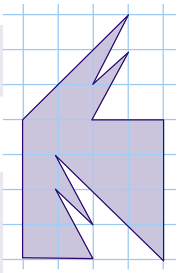


Рис. 3

Задача 2. Найдите площадь многоугольника, изображённого на рис. 3.

Попробуйте решить задачу без скучных подсчётов. Такое решение есть!

Задача 3. Квадрат на рисунке 4 разрезан на восемь треугольников. Какие из них самые большие по площади?

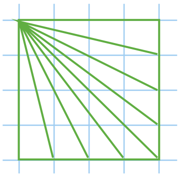


Рис. 4

Сначала можно найти площади прямоугольных треугольников. Теперь можно найти площадь соседних с ними, как в решении задачи 1…

Задача 4. Если одну клетку разрезать по диагонали, получится треугольник площадью $\frac{1}{2}$. У треугольника на рисунке 1,*г* площадь тоже $\frac{1}{2}$. А сколько всего различных треугольников с вершинами в узлах сетки и площадью $\frac{1}{2}$?

Заметьте, что не нужно находить *все* такие треугольники – в задаче спрашивается, сколько их.

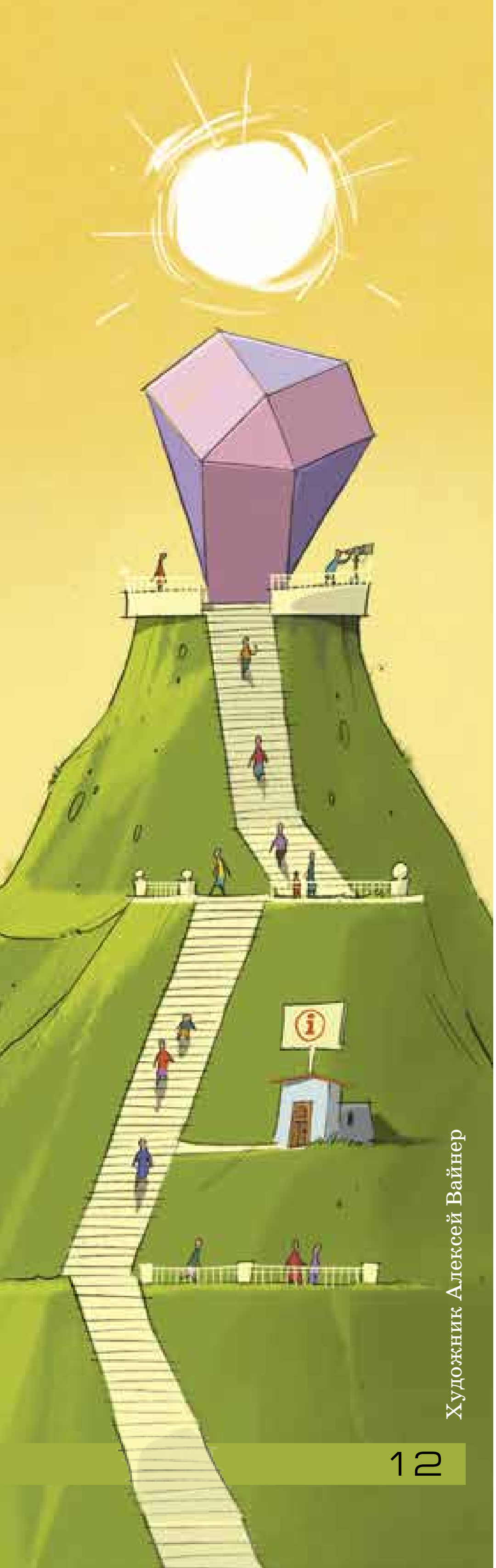
Задача 5. Нарисуйте шестиугольник с вершинами в узлах сетки, у которого все стороны длиннее 4, а площадь не больше 2.

В любом шестиугольнике можно провести диагонали так, чтобы он распался на 4 треугольника. Видимо, эти треугольники должны быть длинными, но маленькими по площади…

Задача 6*. Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целым числом или целым числом, делённым на 2. (В частности, треугольников площадью меньше $\frac{1}{2}$ не бывает.)

На этом закончим изучение фигур на квадратной сетке и рассмотрим произвольный треугольник, не обязательно с вершинами в узлах. Его площадь можно найти по формуле $S=\frac{1}{2}ah$, где a – длина стороны треугольника, а h – длина высоты, проведённой к этой стороне.

Доказательство формулы похоже на решения пунктов а) и б) задачи 1. Для начала вспомним, что пло-



щадь произвольного (не обязательно клетчатого) прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Отсюда сразу следует справедливость формулы, если высота h треугольника совпадает с одной из его сторон (рис. 5,*а*): ведь тогда наш треугольник – половина прямоугольника со сторонами h и a.

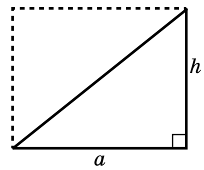


Рис. 5,*а*

Если же высота h лежит внутри (рис. 5, *б*) или снаружи (рис. 5, *в*) треугольника, то его площадь получается соответственно как сумма или как разность площадей двух прямоугольных треугольников с основанием b (выделен красным) и основанием c (выделен синим), для которых формула верна. В первом случае $a = b + c$ и $S = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ah$, а во втором $a = b - c$ и $S = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ah$.

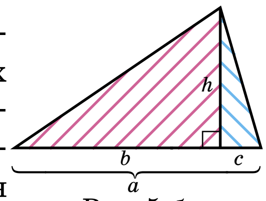


Рис. 5,*б*

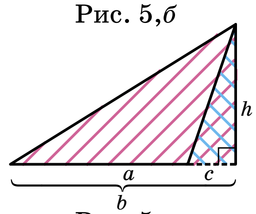


Рис. 5,*в*

Итак, формула доказана!

Заметим, что с помощью формулы можно дать такое решение задачи 3: у всех этих треугольников есть сторона, равная 1, а высота, проведённая к ним, равна 4 (она проходит по стороне квадрата). Поэтому площадь каждого из них равна $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$.

Задача 7. Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника одинаковой площади (рис. 6).

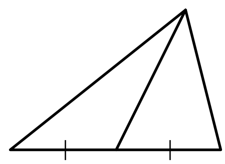


Рис. 6

Здесь можно применить формулу площади треугольника. Для этого надо сначала провести высоту.

Задача 8*. На сторонах треугольника построили квадраты и соединили их вершины, как на рисунке 7. Докажите, что у четырёх закрашенных треугольников одинаковая площадь.

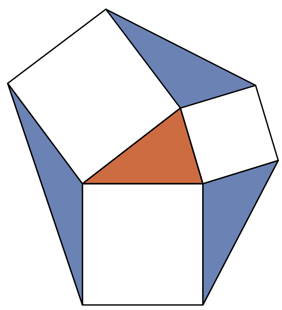


Рис. 7

Хоть здесь и не видно медиан, но в решении этой задачи помогает предыдущая!

Художник Алексей Вайнер

Антон Сорокин

ОПЫТЫ В ВОДЕ с САХАРОМ и ПЕСОЧНЫМИ ЧАСАМИ

Ежегодно на базе Кировского Центра дополнительного образования одарённых школьников проводятся турниры по физике для учащихся 7–9-х классов. Ниже описаны две задачи турниров 2018–2019 учебного года.

РАСТВОРЕНИЕ САХАРА

Оказывается, обычное чаепитие может стать весьма увлекательным мероприятием, если взять пару кусочков сахара-рафинада и немного физики!

Для проведения экспериментов вам понадобится 2 прозрачных стаканчика, 4 кусочка сахара-рафинада, подкрашенная жидкость и вода. В качестве подкрашенной жидкости лучше всего использовать чернила, но будьте аккуратны – не испачкайтесь и не пейте чернильную воду!

Наполните стаканчики почти доверху водой и проведите следующие эксперименты.

Первый эксперимент

Возьмите 2 кусочка сахара-рафинада и аккуратно отпустите их в первый стаканчик с водой так, чтобы они оба упали на дно. Когда кусочки практически полностью распадутся (~7 мин.), капните 20 капель подкрашенной жидкости на поверхность воды в стаканчике. Пронаблюдайте, что происходит (см. видео по ссылке youtu.be/4yok1f4nKis).

Первый эксперимент

Второй эксперимент

Объясните, почему жидкость в верхней части стаканчика окрашивается, а в нижней – нет.

Второй эксперимент

Возьмите 2 кусочка сахара-рафинада и капните на каждый из них по 10 капель подкрашенной жидкости, после чего аккуратно отпустите их во второй стаканчик с водой так, чтобы они оба упали на дно. Пронаблюдайте, что происходит (см. видео по ссылке youtu.be/EfnXVpJJqEI).

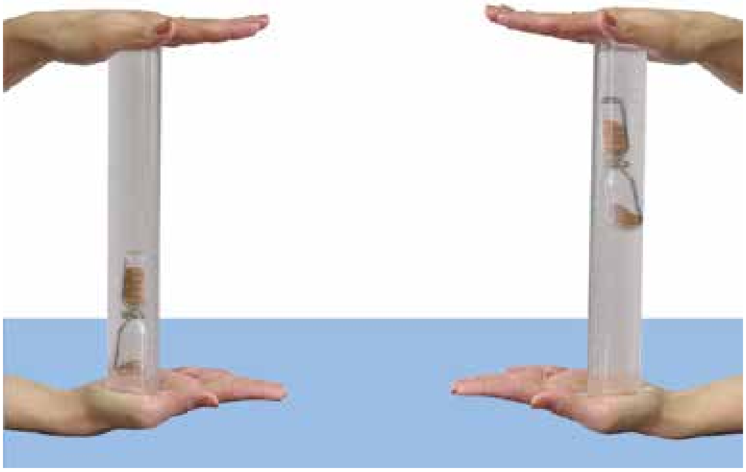
Объясните, почему жидкость в нижней части стаканчика окрашивается, а в верхней – нет.

Объяснение экспериментов

Сахар, растворяясь в воде, даёт сироп, более тяжёлый и вязкий, чем чистая вода. Поэтому сироп лежит прослойкой на дне, не смешиваясь с остальной водой, и чернила из сахара во втором эксперименте окрашивают только сироп, практически не попадая в воду. Соответственно, чернила в первом эксперименте, хоть и могут перемещаться с потоками воды, не проникают в сироп.

РЕЖИМ ЗАВИСАНИЯ

Оказывается, песочные часы, погружённые в воду, с течением времени («песка») могут тонуть, а могут всплывать. Для наблюдения описанного эффекта возьмите цилиндрический сосуд с водой (например, мензурку) и поместите в него песочные часы (см. видео по ссылке youtu.be/xI9W015eAsM).



Спустя некоторое время песочные часы начинают всплывать

Первый эксперимент

Добейтесь того, чтобы песочные часы плавали, едва выступая над поверхностью воды. Затем плотно закройте сосуд ладонью и переверните. Пронаблюдайте, как после переворачивания сосуда с водой песочные часы, оказавшиеся внизу, побыв там, только через некоторое время достаточно быстро всплывут. Объясните наблюдаемый эффект.

Второй эксперимент

Вновь поместите песочные часы в открытый цилиндрический сосуд с водой. Добейтесь того, чтобы они плавали, едва касаясь дна сосуда. Пронаблюдайте, как после переворачивания сосуда песочные часы, оказавшиеся вверху, утонут, но не сразу, а спустя заметное время. Объясните наблюдаемый эффект.

В обоих опытах при погружении песочных часов в цилиндрический сосуд с водой весь песок должен находиться в нижнем резервуаре. Чтобы часы плавали, едва выступая над поверхностью воды (едва касаясь дна сосуда), их можно снабдить добавочными грузами (например пластилином) или поплавками.

Объяснение первого эксперимента

Сила тяжести, действующая на песок в слегка наклонённых часах, создаёт нескомпенсированный момент сил. Это приводит к тому, что часы наклоняются ещё сильнее, пока данный момент не уравновесится моментом, обусловленным силой реакции со стороны стенок сосуда. В результате этого появляется сила трения, действующая на песочные часы и направленная вертикально вниз. С течением времени момент силы тяжести песка уменьшается. Сила реакции, а как следствие, и сила трения также уменьшаются. Сумма сил тяжести и трения становится меньше силы Архимеда, и часы всплывают.

Второй эксперимент объясняется аналогично.

Художник Мария Усеинова

Евгений Смирнов

ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ

В каком направлении движется стрелка часов? Странный вопрос! Это направление так и называется – «по часовой стрелке». Но почему стрелки всех часов (за исключением специально сделанных шуточных часов-перевёртышей) движутся именно в такую сторону?

Первые механические часы появились в Европе в XIV веке. У них, как правило, была одна стрелка – часовая; при этом у разных часов она могла двигаться по циферблату как в одну, так и в другую сторону. А бывали ещё и часы, у которых стрелка стояла неподвижно, а циферблат вращался относительно неё. Но у большинства часов стрелка всё-таки вращалась в привычном нам направлении; оно же впоследствии и оказалось всеобщим стандартом.

Попробуем разобраться, в чём тут дело. До изобретения механических часов у людей было не так много способов указать время суток – основными «часами» служило солнце. Так что, скажем, встречу можно было назначить на рассвете либо на закате, или в полдень – то есть в момент, когда солнце проходит наивысшую точку своего пути по небу.

По мере движения солнца движутся и тени этих предметов. На этом принципе основано действие солнечных часов. Такие часы были известны ещё в Древней Греции. В них «стрелкой» служит тень, которую неподвижный предмет (скажем, колонна или стержень) отбрасывает на циферблат (в разных конструкциях солнечных часов он может быть горизонтальным, вертикальным, наклонным или даже сферическим). Посмотрим, в какую сторону будет двигаться эта тень.

Солнце встаёт на востоке и заходит на западе. Если посмотреть на солнце в полдень (то есть в тот момент, когда

оно находится выше всего на небосводе), мы будем смотреть на юг; соответственно, наша тень будет указывать на север. Кстати, во многих языках слова «юг» и «север» звучат так же, как «полдень» и «полночь».

Получается, что тень от колонны утром будет указывать на запад, в полдень – на север, а вечером, на закате – на восток. Выходит, что тень будет двигаться по часовой стрелке. Наверное, именно поэтому большинство средневековых часовых мастеров делали стрелку часов вращающейся в том же направлении, что и «стрелка» солнечных часов.

Заметим, что так дело обстоит только в Северном полушарии – вернее, к северу от Северного тропика. В остальных частях земного шара дело обстоит иначе. А именно, к югу от Южного тропика тень будет двигаться не в привычном нам направлении, а в противоположном – в полдень солнце будет оказываться к северу от наблюдателя, а его тень будет указывать на юг. Может быть, если бы механические часы изобрели не в Северном полушарии, а в Южном, то их стрелка вращалась бы не в привычную нам сторону, а наоборот?..

В тропических широтах всё обстоит ещё интереснее. Там зимой солнце в полдень оказывается на юге, а летом – на севере. Получается, что зимой тень солнечных часов движется по часовой стрелке, а летом – против часовой. Два раза в год, весной и осенью, бывают дни, когда солнце в полдень находится ровно в зените, то есть в высшей точке небосвода, и в эти моменты предметы вовсе не отбрасывают тени.

Задача. Подумайте, как будет двигаться тень от вертикального стержня за Северным полярным кругом в условиях полярного дня. Как мог бы выглядеть циферблат механических часов в полярных широтах, если бы их изобрели в полярных широтах? А как выглядит циферблат солнечных часов в других широтах?

Художник Евгений Паненко

Математический кружок

Игорь Акулич

ШОКОЛАДНОЕ ЗАНЯТИЕ

– Уверен, что сегодняшнее занятие придётся вам по вкусу, причём в буквальном смысле. Потому что я принёс на него... посмотрите что?

– Шоколадку!

– И занятие, естественно, будет *шоколадным*. Сейчас разверну... Обратите внимание – это не просто шоколадка, а *прямоугольная* шоколадка, разделённая углублениями на одинаковые дольки. Шесть долек в длину и четыре в ширину – итого 24 дольки.

Но не думайте, что вы её съедите – и на этом всё. Сначала придётся потрудиться – так сказать, соединить приятное с полезным. А именно – *поиграем*.

Правила таковы. Играют двое, ходят по очереди. Сначала первый игрок разламывает шоколадку вдоль одного из углублений на две части, выбирает одну из частей и даёт её съесть второму, затем второй разламывает остаток шоколадки вдоль углубления на две части и даёт первому съесть одну из частей, и так они ломают по очереди, пока это возможно. Если осталась единственная долька, то она просто отдаётся на съедение сопернику, и на этом всё заканчивается. Цель каждого – съесть как можно больше долек. Требуется выяснить, кто победит и с каким перевесом, если оба будут играть наилучшим образом (*перевесом* будем называть разность количества съеденных долек у победителя и проигравшего).

Разумеется, дать ответ требуется для шоколадки произвольных размеров, у которой вдоль одной стороны помещается m долек, а вдоль второй – n долек (где m и n – натуральные, причём $m \geqslant n$). Какие идеи?

– У второго есть преимущество! Он наверняка *не проиграет*!

– Это почему?

– А давайте разобьём ходы на пары. Второй игрок в ответ на каждый ход первого всегда может отломить и отдать сопернику кусок шоколадки, *не больший* того, который он только что от него получил. Ему надо лишь отломить кусок шириной в одну дольку вдоль той же стороны, вдоль которой только что ломал первый (а если ширина оставшегося куска равна одной дольке, то он должен отломить от него лишь одну дольку). То есть «по совокупности» при каждой паре ходов второму достанется *не меньше* долек, чем первому. Значит, и в целом за игру будет то же самое.

– А если число ходов нечётное? Тогда на пары не разобьёшь.

– И что? Здесь начинающему придётся сделать на один ход больше, но для него это лишь усугубляет ситуацию. Последнюю дольку он просто отдаст сопернику, ничего не получив взамен.

– Справедливо. Тогда поступим так. Обозначим через $f(m, n)$ разность количества долек, доставшихся второму, и долек, доставшихся первому (при наилучшей игре обоих). По сути, сейчас мы доказали, что $f(m, n)$ – число *неотрицательное*. Попробуете доказать ограничение с другой стороны: $f(m, n) \leqslant n$.

… *Пауза* …

– Не знаете, как подступиться? Ладно, подскажу. Пусть начинающий первым ходом отломит кусок шириной в одну дольку вдоль меньшей из сторон шоколадки. Тогда второй сразу же получает перевес в n долек, но дальше очередь хода уже за ним! Он как бы сам становится начинающим, и при дележе оставшейся части шоколадки уже его сопернику (то есть первому игроку) достанется *не меньше* долек, чем ему, и в итоге суммарный перевес второго никак не сможет превысить тот перевес, который был у него после первого хода начинающего – равный n.

Выходит, при любой игре начинающего второй игрок может играть так, что в итоге *не проиграет*, но, с другой стороны, при любой игре второго начинающий может добиться того, что перевес противника не превысит n. Но это пока только ограничения, надо бы поточней. Попробуйте обдумать частные случаи.

… *Долгая пауза* …

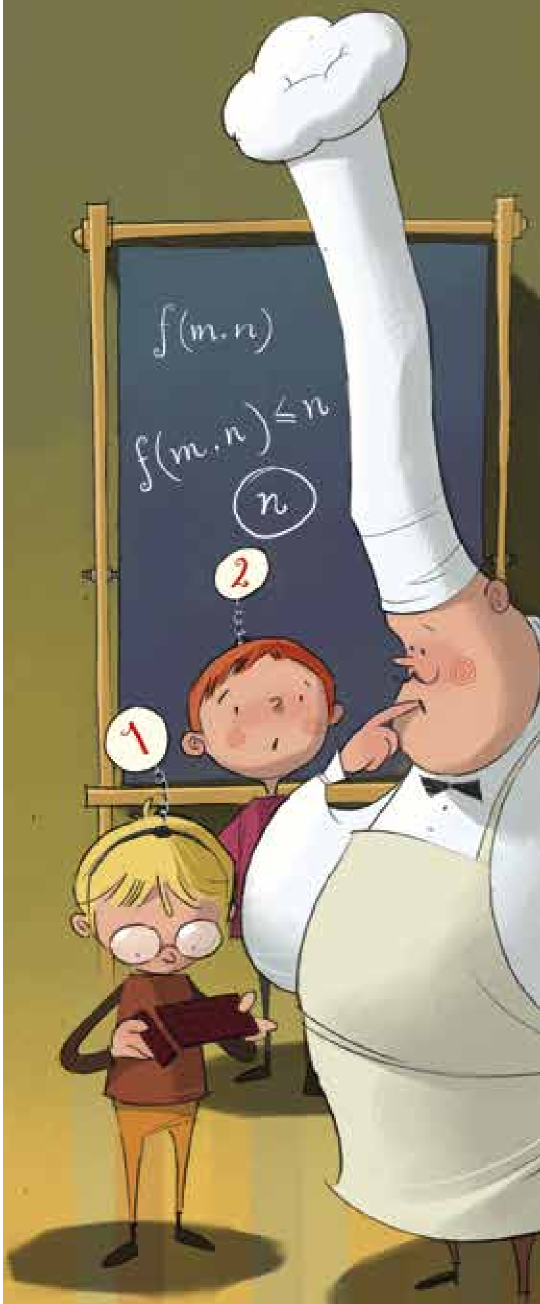
– Есть ответ для квадратной шоколадки!

– И какой же он?

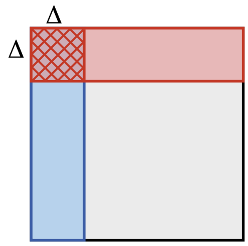
– $f(n, n)$ в точности равно n.

– Докажите.

– Опишем тактику второго, при которой он (при любой игре первого) получит перевес *не меньше чем* в n долек. А так как начинающий умеет добиваться, чтобы этот перевес был *не больше* n, при наилучшей игре обоих перевес будет ровно n.



Тактика может быть такая. Изначально шоколадка квадратная, и, отломив любой её кусок, начинающий нарушит эту «квадратность». Тогда второй должен её «восстановить», то есть отломить от перпендикулярной стороны кусок такой же ширины. Первый своим ходом снова её нарушит – а второй снова восстановит, и так до конца, пока не останется единичная долька, которую первый просто отдаст второму.



Рассмотрим пару ходов «нарушение-восстановление». Начинающий отламывает от любой стороны квадрата кусок шириной в Δ долек, а второй в ответ отламывает кусок шириной тоже Δ от меньшей стороны, снова получая квадрат (со стороной на Δ короче). Из рисунка видно, что за эту пару ходов перевес второго игрока увеличится на число долек квадрата $\Delta\times\Delta$, что заведомо не меньше Δ. Тогда за всю игру перевес второго суммарно даст не меньше чем исходную величину стороны квадрата (так как сторона уменьшается от n до нуля). И чтобы перевес противника составил именно n (меньшего добиться невозможно), начинающий должен всё время отламывать полоску шириной в одну клетку.

– Отлично! Ещё есть достижения?

– По-моему, теперь можно доказать, что если $m=n+1$, то $f(m,n)=0$. То есть игра закончится вничью!

– Выглядит удивительно. Давайте-ка подробней.

– Пусть шоколадка имеет размеры $(n+1)\times n$. Начинающий делает первый ход, отламывая кусок единичной ширины от короткой стороны, и сразу даёт второму перевес в n долек. Но шоколадка становится квадратной – $n\times n$, а второй игрок – начинающим! И тогда первый, как описано выше, получит на квадратном остатке шоколадки перевес, равный тоже n, а в сумме $n-n=0$. Вот и ничья!

– Эх, чуть не дотягивает для имеющейся шоколадки 6×4! А ещё успехи имеются?

– Да! Если $n=1$, то ответ таков: $f(m,1)=1$ для нечётных m и $f(m,1)=0$ для чётных m.

– То есть здесь рассмотрена шоколадная «полоска» шириной в одну клетку.

– Да. И получается такая ситуация. В силу доказанного ранее, $f(m, 1)$ не превышает 1, то есть равно либо 0, либо 1. Пусть при некотором m величина $f(m, 1)=1$. Найдём $f(m+1, 1)$. Здесь начинающий отламывает единичную дольку, давая второму перевес, равный 1, и второй превращается в начинающего, а первый становится вторым и далее «отыгрывает» этот перевес обратно. Поэтому $f(m+1, 1)=0$.

Если же $f(m, 1)=0$, то для шоколадки $(m+1)\times 1$ первый может отломить кусок либо из одной дольки, либо из нескольких долек (двух или больше). Если он отломит одну дольку, то станет вторым, но перед ним «ничейная» плитка – перевеса на ней он не добьётся, и в сумме получится перевес второго, равный 1. Ну, а если он отломит не меньше двух долек, то перевес соперника сразу станет не меньше 2, и далее начинающий (ставший вторым) компенсирует из этого перевеса не больше 1, так что суммарный перевес соперника опять же не меньше $2-1=1$. Получаются чередования: для шоколадки 1×1 – второй побеждает с перевесом 1, для 2×1 – ничья, для 3×1 – опять перевес второго равен 1, для 4×1 – снова ничья, и т.д.

– Что ж, для частных случаев мы рассмотрели немало. Складываются ли они у вас в какую-то систему? Что, не очень? Тогда не буду томить и сразу дам ответ: если m и n *одной чётности* и $m\geqslant n$, то при наилучшей игре обоих игроков перевес второго равен n, а если m и n *разной чётности*, то будет ничья. При этом оптимальная стратегия каждого игрока – вполне логичное «жадное» поведение: при своём ходе отламывать полоску единичной ширины от меньшей стороны, чтобы соперник на этом ходу получил как можно меньше. Так что для нашей шоколадки перевес второго и составит ровно 4 дольки. Ну, кто готов сыграть со мной?

– Я!

– Я!

– ...

– Да, желающих куда больше, чем запасов продовольствия. Тогда просто поделим шоколадку на всех поровну. Как раз каждому по дольке и достанется.

К читателям. Докажите общее утверждение для шоколадки размером $m\times n$. Предупреждаем – это не так-то просто. Хотя и не запредельно сложно.

Художник Алексей Вайнер

Ольга Кузнецова

Один – много

– У тебя получилось сделать примеры? – спросил Максим.

– Потом решу, – пробормотала Аня.

– Ты что, не любишь считать?

– Почему, я нормально считаю. Вот мой младший брат вообще считать не умеет. Он считает так: один – много.

– Между прочим, в русском языке не всегда понятно, когда один, а когда много.

– Не может быть… Хотя знаю, это *ножницы* всякие, *колготки*, потом ещё *сливки*, *золото*, *сахар*…

– Точно, по форме этих слов непонятно, о каком количестве идёт речь.

– Так это просто различить! Нужно сразу сказать, сколько: одни колготки, килограмм золота, две ложки сахара. Нет, лучше пять ложек сахара. И всё понятно!

– Но есть случаи, когда в самом слове звучит *один* – а получается много.

– Это как? – усомнилась Аня.

– Ну вот скажи, одноклассник – это кто?

– Тот, кто со мной учится в одном классе.

– Правильно, но ребят много в классе, так? – усмехнулся Максим.

– Но класс-то у нас один. Всё логично.

– Хорошо. А кто такой однолетка?

– Кто со мной одних лет. – Аня даже удивилась, какие глупости у неё спрашивают.

– Это тоже правильно. Но ещё однолеткой можно назвать животное, которому 1 год – например, лошадь-однолетка. А однолетнее растение живёт один сезон – на следующий год нужно покупать новые семена.

– Мало ли слов с несколькими значениями, – рассудила Аня, – всегда можно догадаться по смыслу.

– А если мы читаем очень старый текст, где много непонятного? В русском языке полно церковно-

славянских по происхождению слов с корнем *един-*, например церковнославянские *единица*, *единогласно* употребляются параллельно с русскими *один*, *одноголосие*. Встречаясь с устаревшими словами с корнем *един-*, каждый раз нужно размышлять: речь идёт о количестве или о принадлежности к группе? Например, старинное слово *единакий* значило и *одинокий* (отшельник), и *одинаковый*. Слово *единоживущий* чаще всего означало, что человек живёт вместе с нами, он наш сосед, а вот *единогнёздный* – это про птицу-одиночку. Сразу и не разберёшься.

– По-моему, всё понятно. Давай слова – сейчас разберёмся.

Максим написал на бумажке несколько слов и показал Ане:

– Попробуй предположить, что они значили в древнерусском языке.

Аня принялась читать:

– *Единорогий*... – не может быть один рог на двоих, так далеко не уйдёшь. Думаю, что это животное с одним рогом. Тот же единорог.

– Верно, иногда так называли и носорогов.

– *Единосильный* – вряд ли у него одна сила, пусть даже лошадиная. Это соперник, равный нам по силе. *Единодверница* – наверное, какое-то помещение с одной дверью. *Единоокий* – одноглазый, как пират. *Единогубый* – с одной губой...

– Подожди, а *сугубый* тогда – с двумя губами? Знаешь слово *усугубить*?

– Это значит кого-то погубить?

– Не совсем, хотя слова родственные. *Усугубить* сейчас значит сделать хуже, усилить, а изначально *сугубый* – двойной. Кстати, *трегубо* – это не с тремя губами, а трижды.

– Ну всё равно, *единогубый* – это тот, у которого что-то одно.

– Да, *односоставный*. Посмотри дальше, кто такой *единочадо*, как думаешь?

– Единственный ребёнок, это легко. *Единошественный* – попутчик, он с нами вместе шествует. А *единошерстный* – тот, у кого одна шерсть? Это как наш лохматый пёс, пострижёшь его – и от собаки толком ничего не останется.

– Нет, как раз *единошерстные* животные – те, которые имеют одну масть. А можешь сама назвать пару слов, которые внешне различаются только указанием на количество, хотя одно значит согласие с кем-то, а другое – неискренность?

– Интересно, прямо задача на конкурс по русскому языку, подумаю! Так, что тут ещё есть? – Аня снова посмотрела на список, в котором оставалось всего два слова. – *Единоплотник* – тот, кто с тобой на одном плоту... или кушает так же плотно, как и ты. А *единоколенник* – человек с одной коленкой.

– Ты бы ещё сказала, что *единоплотник* – тот, кому строил сарай тот же плотник, что и тебе. Нет, общее у нас с ним – *плоть*, а не *плот* или *плотность*. Это как в сказке про Маугли: мы с тобой одной крови. Он наш родственник. Похожее слово – *единоколенник*, это соплеменник. Мы с ним относимся к одному *колену* – то есть роду, как в слове *поколение*.

– Да уж, надо много слов знать, чтобы во всём этом разобраться, – заметила Аня.

– И правильно разбирать слова по составу. А вот тебе ещё слово с русскими корнями, *однодворец*. Догадаешься, кого так называли в древности?

– Того, у кого всего один дворец, конечно!

Вы согласны с объяснением Ани?

Художник Мария Усеинова

Математик из «Незабудки»

Ещё до революции в России издавался журнал «Незабудка» для семьи и школы. Попробуйте разгадать секрет фокуса, опубликованного в третьем номере журнала за 1914 год (автор — Пятков).

Удивительный математик

Фокус

Попросите того, кому хотите показать этот фокус, написать какое-нибудь трёхзначное число.

Положим, он написал 322. Тогда вы возьмите маленький клочок бумаги и напишите на нём цифры так: от данного числа (322) отнимите единицу и перенесите её вперёд и таким образом получится число 1321. Эту бумажку с числом 1321 отложите куда-нибудь. Теперь под первым числом (322) попросите написать другое трёхзначное число. Пусть это второе число будет 241. Когда второе число будет написано, вы со словами: — «Теперь позвольте и мне приписать какое-нибудь число», — подписываете под вторым числом такие цифры, чтобы они при сложении давали сумму 9. Первая цифра второго числа — 2, значит, чтобы получить 9, нужно написать 7, под второй цифрой подписать 5 ($4 + 5 = 9$) и под третьей цифрой 8 ($1 + 8 = 9$). Таким образом, третье число у вас получится 758. Попросите теперь все три числа сложить и, когда они будут сложены, покажите бумажку с заранее написанным ответом, и все будут поражены этим фокусом.

Номер можно найти в интернете по ссылке clck.ru/G7KDH

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения III тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 15 сентября. В письме кроме имени и фамилии укажите ваш город, а также школу и класс, где вы учитесь. За лучшее решение отдельных туров предусмотрены специальные премии. Предлагайте на конкурс задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы.

Желаем успеха!

III ТУР

11. Однажды Иван-царевич шёл по Измайловскому лесопарку и увидел знакомую ведьму.

– Вы не подскажете, где закопан клад? – вежливо спросил Иван-царевич.

– Под высокой АЛЬФОЙ! – буркнула ведьма и исчезла.

Иван-царевич от досады чуть лопату не сломал: нет такого дерева – АЛЬФА, и слова такого нет! Если из слова АЛЬФА убрать одну букву, получится название лиственного дерева, если другую – наоборот, хвойного. Так и не пошёл клад искать.

Какое несуществующее слово мы заменили на АЛЬФУ?

Е.В. Васютинская

12. Метатеза – это перестановка слогов или звуков в слове. Например, древнерусское слово *долонь* в результате метатезы превратилось в современное *ладонь*. А в некоторых русских говорах название некоего помещения в результате метатезы стало звучать так, что можно подумать, будто в нём производятся какие-то магические действия. Что это за помещение?

С.В. Дьяченко

13. – И что же я значу? – спросил Корень.

– «...Напрасно», – хором закричали Глагол, Существительное и Прилагательное.

– Ничего не «напрасно»! Наоборот: «Очень хорошо и с усердием»! – возмутились Другое Существительное и Другое Прилагательное.

Перечислите в правильном порядке все пять слов, участвовавших в споре.

И.Б. Иткин

14.[1] Назовите два существительных, которые отличаются только указанием на разное количество, при этом одно из них означает «согласие», а другое – «лицемерие».

О.А. Кузнецова

[1] См. статью «Один – много» в этом номере журнала

15. Найдите русский глагол вида *XXить*, где *X* – некоторая последовательность букв.

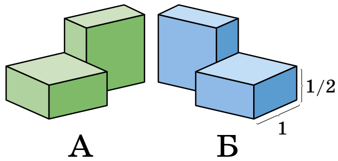
С.И. Переверзева

Художник Николай Крутиков

Игры и Головоломки

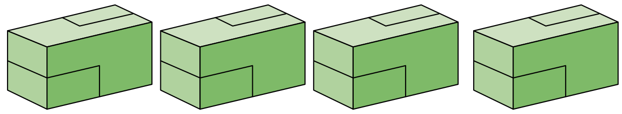
Владимир Красноухов

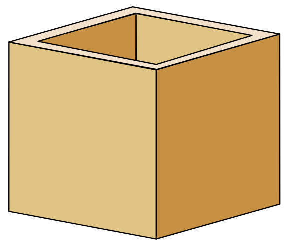
Ложка дёгтя в бочке мёда



Эта головоломка состоит из элементов двух типов, назовём их «тип А» и «тип Б», по отношению друг к другу они зеркально симметричны.

Возьмём 8 штук элементов одного типа, скажем, А. Мысленно сложим из них 4 блока $1\times1\times2$ и упакуем в коробочку с внутренним объёмом $2\times2\times2$. Легко!





А теперь вытряхнем содержимое коробочки на стол и заменим один из этих восьми элементов (типа А) на элемент типа Б. Удастся ли снова упаковать их в коробочку так, чтобы ни один элемент не выступал над её краями? Короче говоря, можно ли составить куб из набора 7А + 1Б? Автор этой головоломки (В. Красноухов) утверждает, что решение существует и единственно. Так ли это?

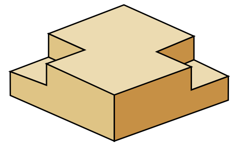
Кстати, химики называют пары молекул, являющихся зеркальным отражением друг друга, *энантиомерами*, а само свойство не совпадать в пространстве со своим зеркальным отражением – *хиральностью*[1]. (Как ни вращай правый ботинок, он не станет левым.) Яркий пример энантиомера – аминокислота *лейцин*, один из её изомеров сладкий на вкус, другой (зеркально симметричный) – горький.

Вот тебе и «ложка дёгтя» – заменили один из элементов таким же, но зеркальным, и задача упаковки усложнилась на два порядка (если критерием сложности считать время, затраченное на решение).

Для разминки соберите из набора 7А + 1Б:

а) параллелепипед $1\times2\times4$;

б) фигуру, силуэт которой показан на рисунке справа.



Желаем успехов!

[1]Подробнее о хиральности читайте в статье М. Молчановой «У зеркала» в «Квантике» №6 за 2017 год.

Художник Мария Усеинова

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, II ТУР

(«Квантик» № 4, 2019)

6. *В русском языке некоторые названия частей человеческого тела различаются одной буквой, например: кисть (руки) – кость, ресница – десница. Во второй паре одно из слов (десница «правая рука») – устаревшее. Найдите ещё одну так же устроенную пару, в которой оба слова – устаревшие.*

Эта пара – ***перст*** и ***перси***. Оба эти слова действительно устарели, в современном русском языке их заменяют слова *палец* и *грудь*. Однако некоторые производные от этих слов употребляются и сейчас – например, *перстень*, *напёрсток* и (уже тоже немножко устаревшее) *наперсник* «любимец правителя, пользующийся его особым доверием».

7. *Маленькой Маше 2 года и 2 месяца. Говоря об одном из своих любимых мультфильмов, Маша всегда добавляет в его название частицу* ***-ка***. *Что это за мультфильм?*

Это мультфильм **«Ну, погоди!»**. Вероятно, Маша часто слышит от взрослых что-нибудь вроде *Ну-ка, перестань!*, *Ну-ка, отдай!* и т. п.

8. *– Двадцать два... двадцать три... двадцать четыре ___________________ ... – громко считала мама.*

– Двадцать четыре _________________! – обрадовался маленький Лёва. – Прочитай мне их, пожалуйста!

– Ой, нет, – рассмеялась мама, – я не пишу, я шью.

Заполните пропуски в правильном порядке.

Пропущены слова ***стежка*** и ***стишка***. Мама шила и считала стежки, но поскольку слова *стежка* и *стишка* звучат одинаково ([с'т'и^{Э}шка]), Лёва решил, что речь идёт о стихах.

9. *«... озеро», «... вздох», «... старость» Какое прилагательное (в разных грамматических формах) мы пропустили?*

Это прилагательное ***глубокий***: *глубокое озеро, глубокий вздох, глубокая старость*.

10. *Слово ТАК означает* **«плохо»**. *Слово СЯК тоже иногда можно заменить на плохо. А вот ТАК-СЯК означает* **«более или менее; плохо, но не совсем»**. *Какое наречие мы заменили на ТАК-СЯК?*

Один из синонимов слова *плохо* – *худо* (например: *Ему пришлось худо (= плохо), но теперь уже всё хорошо*). Слово бедно тоже иногда можно заменить на плохо (например: Он был бедно (= плохо) одет). А вот наречие ***худо-бедно*** действительно означает не «плохо-преплохо», а «более или менее; плохо, но не совсем», например: *Он худо-бедно справился с заданием.*

НАШ КОНКУРС, IX ТУР

(«Квантик» № 5, 2019)

41. *Вставьте в пустые клетки различные числа от 1 до 10 так, чтобы получилось верное равенство:*

$\square+\square\times\square+\square\times\square\times\square+\square\times\square\times\square\times\square=5167.$

Ответ: $1+2\times3+4\times5\times6+7\times8\times9\times10=5167.$

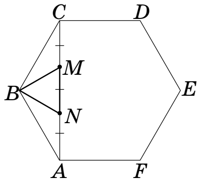
42. *На расстоянии 9 км друг от друга стоят шарикометатель и иглomёт. Шарикометатель выпускает по воздушному шарику каждую минуту. Каждый шарик летит по прямой со скоростью $2\frac{1}{3}$ км/мин в направлении игломёта. Как только шарик оказывается в зоне поражения – на расстоянии не более 5 км от игломёта, – игломёт мгновенно его подстреливает. Правда, игломёту после каждого выстрела нужно $1\frac{2}{3}$ минуты, чтобы перезарядиться. Если в зоне поражения несколько шариков, лопается только ближайший к игломёту. Какой по счёту шарик всё-таки долетит до игломёта?*

Ответ: пятый. Первый шарик лопнет на расстоянии 5 км от игломёта. Каждый следующий шарик через минуту после лопания предыдущего будет на его месте, и за оставшиеся до перезарядки $\frac{2}{3}$ минуты продвинется на $\frac{14}{9}$ км. Тогда второй шарик лопнет на расстоянии в $5-\frac{14}{9}=\frac{31}{9}$ км, третий – $\frac{17}{9}$ км, четвёртый – $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ км, а пятый долетит до игломёта.

43. *Ребята два дня решали задачи. В первый день Петя решил задач в 2 раза меньше Васи и в 3 раза меньше Маши. Во второй день Маша решила задач в 2 раза меньше Пети и в 1,5 раза меньше Васи. Может ли быть так, что Вася решил больше задач, чем каждый из других ребят?*

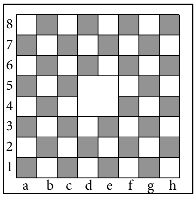
Ответ: нет. В первый день Маша решила 3/2 задач от числа задач, решённых Васей, а Петя – 1/2, то есть суммарно Маша и Петя решили в 2 раза больше Васи. То же наблюдается и во второй день, когда Маша решила 2/3 от числа задач, решённых Васей, а Петя – 4/3. Тогда Вася решил среднее арифметическое числа задач, решённых Машей и Петей, и тем самым не мог решить больше каждого из других.

44. *Точки M и N делят диагональ AC правильного шестиугольника ABCDEF на три* *равные части. Докажите, что треугольник MBN равносторонний.*



Углы при вершине правильного шестиугольника равны 120°, откуда углы BCA и BAC равнобедренного треугольника ABC равны 30°. Проведём из точки B отрезки BM' и BN' с концами M' и N' на AC так, чтобы углы CBM' и ABN' тоже были 30°. Тогда треугольники $BM'C$ и $BN'A$ равнобедренные и равны друг другу, откуда $CM'=BM'=BN'=AN'$, а треугольник $M'BN'$ – равнобедренный с углом 60° при вершине B, то есть равносторонний. Тогда $CM'=M'N'=N'A$, то есть $M=M'$ и $N=N'$.

45. *В шахматной доске 8×8 вырезали центральный квадрат размером 2×2 клетки.*



а) Какое наибольшее число ферзей, не бьющих друг друга, можно поставить на получившуюся доску? Приведите пример расстановки и докажите, что большее число ферзей расставить нельзя.

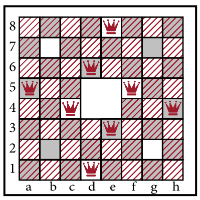
б) Сколько всего таких расстановок? Нарисуйте их все и докажите, что других нет.

(Ферзи бьют друг друга, если они находятся на одной клетчатой линии – вертикали, горизонтали или диагонали – и в этой линии нет вырезанных клеток.)

Ответ: а) 10; б) 4. В каждой вертикали, кроме двух центральных, стоит не более одного ферзя, а в каждой центральной вертикали – не более двух. Значит, всего ферзей не более 10.

Найдём все возможные расстановки 10 ферзей. В клетчатом прямоугольнике с углами в d1 и e3 должны стоять два ферзя. Их можно поставить двумя способами: в клетки d1 и e3 либо в клетки d3 и e1. Варианты зеркально симметричны, рассмотрим первый.

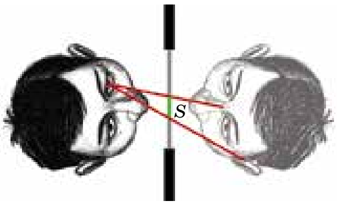
Тогда в прямоугольнике с углами f4 и h5 есть лишь две непобитые клетки: f5 и h4, и их должны занимать ещё два ферзя. Аналогично в прямоугольнике с углами d6 и e8 ферзи могут стоять лишь в d6 и e8, а в прямоугольнике с углами a4 и c5 – лишь в a5 и c4. Мы расставили 8 ферзей (см. рис.), и осталось 4 свободные клетки: b2, b7, g2, g7. В них можно поставить ещё двух ферзей двумя способами: либо b2 и g7, либо b7 и g2. Итак, в первом варианте получилось два способа, и в зеркальном ему втором варианте аналогично получится ещё два способа.



А сколько расстановок будет для ладей?

ШИРИНА ОТРАЖЕНИЯ («Квантик» № 5, 2019)

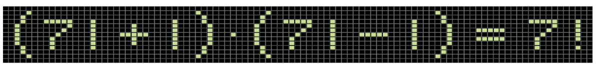
Чтобы увидеть своё лицо целиком, достаточно правым глазом увидеть левую половину лица, а левым – правую. Пусть голова будет прямо перед зеркалом, по центру, симметрично. Мысленно отразим голову относительно зеркала и проведём лучи из одного из глаз до соответствующей половины «зазеркального» лица (рисунок справа).



Нужно, чтобы оба крайних луча – первый (который идёт до переносицы) и второй (до скулы или уха) – пересекли зеркало, а не стену. Сдвинем переносицу от зеркала, а скулу или ухо – к зеркалу так, чтобы они оказались на линии глаз: тогда отрезок S, высекаемый лучами в зеркале, может в обе стороны лишь удлиниться. Ширина половины лица – 7,5 см, а длина S не превышает $\frac{7{,}5}{2}=3\frac{3}{4}$ см. Тогда, чтобы второй луч пересёк зеркало, достаточно, чтобы первый луч пересёк зеркало на расстоянии хотя бы $3\frac{3}{4}-3{,}5=\frac{1}{4}$ от центра. С другой стороны, первый луч должен пересечь зеркало на расстоянии не более 3,5 см от центра. То есть зрачок должен располагаться на расстоянии от $\frac{1}{2}$ до 7 см от переносицы. Но диаметр глаза явно больше 1 см, так что зрачок удалён от переносицы и от края лица хотя бы на $\frac{1}{2}$ см. Значит, отрезок S полностью помещается в зеркале, что и требовалось.

НЕИСПРАВНЫЙ ПИКСЕЛЬ
(«Квантик» № 6, 2019)

Был повреждён пиксель в правой части равенства, и знак факториала «!» превратился в 1. Вот верное равенство (где $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$):



ДВОЙНЫЕ ЛЕТАЮЩИЕ ТАРЕЛКИ

На фото видны двойные отражения потолочных светильников в окне с двойным стеклом.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

2. «Клюв» сверху квадрата совпадает по форме с дырой внизу. Отрезав этот «клюв» и закрыв им дыру, получим квадрат 4×4 площади 16.

3. У всех треугольников площадь равна 2.

4. Бесконечно много. Рассмотрим бесконечную полоску (рис. 1). У всех треугольников площадь равна $\frac{1}{2}$ (докажите).

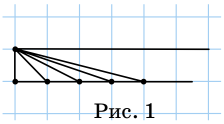


Рис. 1

5. Такой шестиугольник можно составить из 4 треугольников с площадью $\frac{1}{2}$ (рис. 2).

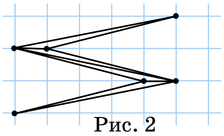


Рис. 2

6. Этот многоугольник разрезается диагоналями на треугольники с вершинами в узлах сетки. Аналогично решению задачи 1, любой такой треугольник достраивается до прямоугольника с помощью прямоугольников и прямоугольных треугольников, площади которых – целые или полуцелые числа.

7. Проведём высоту исходного треугольника из той же вершины, из которой проведена медиана. Она будет высотой и для двух меньших треугольников. При этом их стороны, к которым проведена эта высота, равны.

8. Рассмотрим 2 треугольника: синий и красный. У них 2 пары одинаковых сторон. Пусть в синем треугольнике угол между этими сторонами равен α. Тогда в красном треугольнике между ними угол $180° - \alpha$. Соединим эти треугольники так, чтобы они образовывали треугольник, разделённый медианой (рис. 3). Отсюда следует, что площадь красного равна площади любого синего.

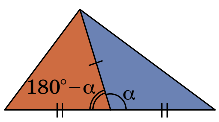
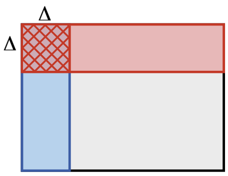


Рис. 3

ШОКОЛАДНОЕ ЗАНЯТИЕ

Мы уже знаем, что для любой шоколадки $m \times n$ второму достанется не меньше, чем первому. Теперь докажем, что если m и n одной чётности и $m \geqslant n$, то второй получит перевес хотя бы в n долек. Рассмотрим случаи хода первого.

1. Первый отдал полоску вдоль длинной (не меньшей) стороны, ширина полоски Δ. Тогда второй может отдать полоску той же ширины, что отломал первый, но от короткой (не большей) стороны. При этом за пару ходов перевес второго увеличивается хотя бы на $\Delta \times \Delta$, что заведомо не меньше Δ. Короткая сторона прямоугольника уменьшилась на Δ.



2. Первый отдал полоску ширины 1 вдоль короткой стороны. Тогда второй может отдать первому такую же полоску. При этом короткая сторона прямоугольника не изменится, так как она была короче хотя бы на 2, однако возможно, что прямоугольник станет квадратом.

3. Первый отдал полоску ширины более 1. Тогда второй может отдать полоску ширины 1 вдоль короткой стороны и сразу получить перевес хотя бы в n. Далее второй игрок может играть так, чтобы его перевес не уменьшился.

В первых двух случаях за пару ходов перевес второго увеличивается не меньше, чем уменьшается короткая сторона прямоугольника, и стороны шоколадки остаются одной чётности. В третьем случае перевес второго сразу увеличивается хотя бы на короткую сторону. Значит, за всю игру перевес второго составит не меньше, чем короткая сторона шоколадки.

Теперь легко доказать, что если m и n ($m > n$) разной чётности, то первый может добиться ничьей. Первый отломит вдоль короткой стороны полоску шириной 1. Тогда второй временно получит перевес в n долек, но после своего хода первый стал вторым, короткая сторона осталась равной n и чётность сторон сравнялась. Поэтому он может использовать данную выше стратегию и вернуть перевес в n долек обратно.

ОДИН – МНОГО

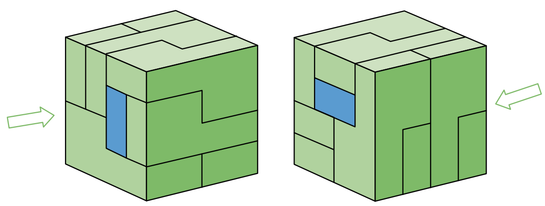
Однодворцем изначально называли человека, который владел маленьким участком земли, «одним двором», и не имел зависимых крестьян. Сейчас так иногда называют и живущих в одном дворе.

МАТЕМАТИК ИЗ «НЕЗАБУДКИ»

Когда под исходным числом зритель написал второе число (241), вы написали третье число (758), дающее в сумме со вторым 999. Значит, в итоге получится число, большее исходного на 999, независимо от второго числа. Это число вы и написали на бумажке: вы вычли 1 из исходного числа и прибавили 1000, потому что приписать 1 слева от трёхзначного числа – то же самое, что прибавить к нему 1000.

ЛОЖКА ДЁГТЯ В БОЧКЕ МЁДА

Собрать куб можно единственным способом, решение показано с двух противоположных сторон на рисунке (элемент типа Б синий).



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 1 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. Как поётся в русской народной песне, «три деревни, два села, восемь девок, один я» – и в каждом из указанных населённых пунктов кто-то из нас живёт. При этом в любой деревне больше девок, чем в любом селе. А Новый год мы всегда празднуем в том единственном месте, где проживает больше всего девок. Где живу я – в деревне или в селе?

52. Среди 111 монет часть – настоящие и весят одинаково, а остальные – фальшивые и тоже весят одинаково, но они легче настоящих. Монеты разложили на чашечные весы, на левую чашку – 60 монет, на правую – 51 монету, и весы пришли в равновесие. Какое а) наименьшее; б) наибольшее число фальшивых монет могло быть?

В каждом случае определите, во сколько раз фальшивая монета легче настоящей.

Авторы: Игорь Акулич (51), Григорий Гальперин (52),
Александр Перепечко (53), Сергей Костин (54), Лев Емельянов (55)

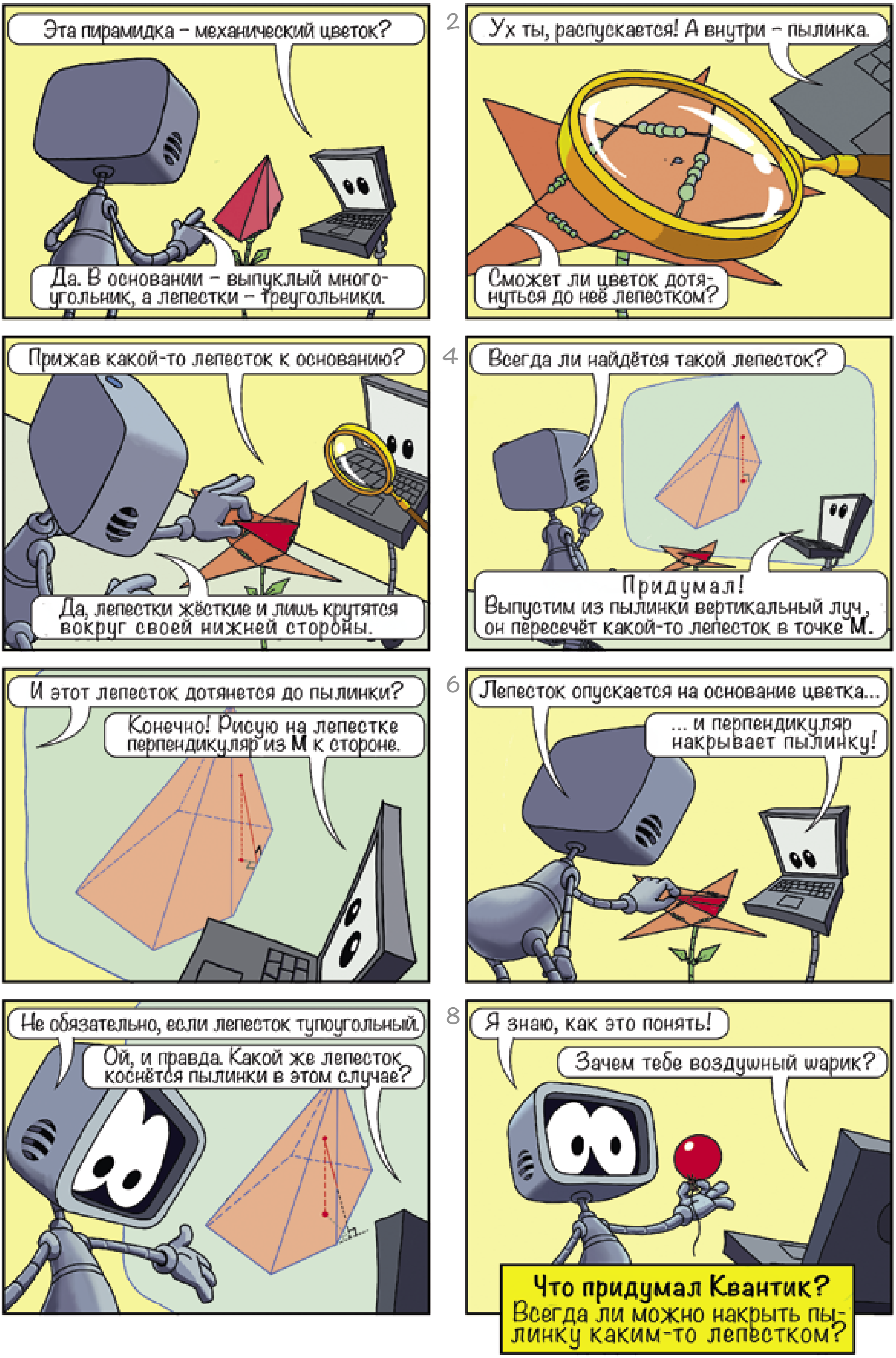
53. В клетчатой таблице 8×8 строки и столбцы пронумерованы числами от 1 до 8. Квантик отметил некоторые клетки так, что количество отмеченных клеток в каждой строке не больше номера строки, а в каждом столбце – не меньше номера столбца. Сколько всего клеток он мог отметить?

54. К некому натуральному числу каждую секунду прибавляют 67, 78 или 89. Докажите, что когда-нибудь обязательно получится число, десятичная запись которого заканчивается на 67, 78 или 89.

55. Верно ли, что из пяти диагоналей каждого невыпуклого пятиугольника можно выбрать три, из которых складывается треугольник? (Диагональ – это отрезок, соединяющий несоседние вершины, некоторые диагонали будут лежать вне пятиугольника.)

Художник Николай Крутиков

Цветок-пирамидка



По задаче Игоря Пака со Всероссийской математической олимпиады 2012 года

Художник Yustas

ISSN 2227-7986