ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 7 | июль 2020

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 7
ИЮЛЬ
2020

ОТРАЖЕНИЯ В ЗРАЧКЕ И «ВОЛШЕБНЫЕ» СТЁКЛА

О ЧИСЛАХ И ФИГУРАХ

РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

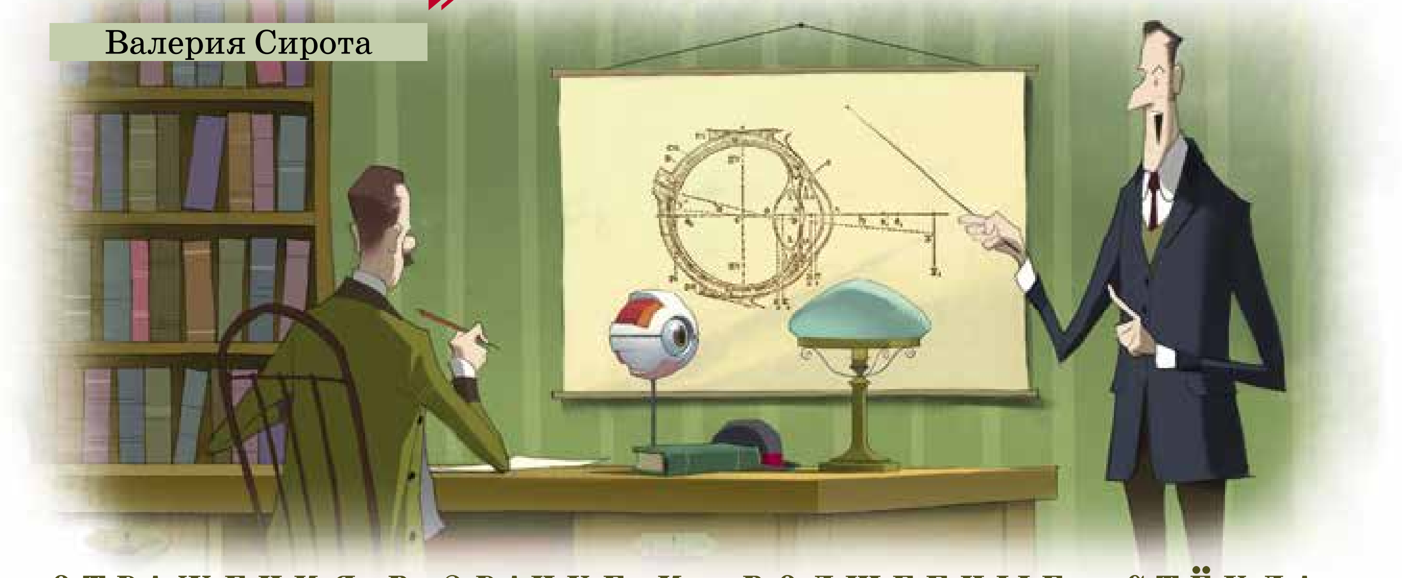
Журнал «Квантик» № 7, июль 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, Е.Н.Козакова, Е.А.Котко, Р.В.Крутовский, И.А.Маховая, Г.А.Мерзон, А.Ю.Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 8.06.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ № 201317
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

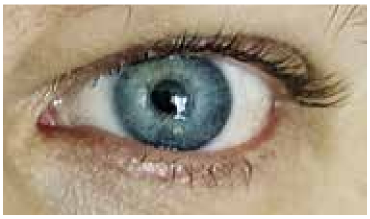
СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота



ОТРАЖЕНИЯ В ЗРАЧКЕ И «ВОЛШЕБНЫЕ» СТЁКЛА

В фильме «Шерлок Холмс и доктор Ватсон» знаменитый сыщик говорит, что проверил, правда ли в зрачке жертвы остаётся изображение убийцы, и пришёл к выводу, что это полная чушь.[1] Однако в зрачках живого человека вполне может отражаться то, на что он смотрит, – например, на этих фотографиях в зрачке отражаются фотограф и смартфон, на который он снимает.



Но ведь зрачок – это пустое место, отверстие, через которое в глаз попадает свет! Там как раз ничего нет! Как же тогда получается отражение? И почему именно там, в зрачке, отражение получается даже лучше (как видно на фотографиях), чем от радужной оболочки глаза – цветного кольца, окружающего зрачок?

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами ответить на эти вопросы!

***

В одной из задач в прошлом номере «Квантика» читателей спрашивали, как может быть устроено «одностороннее зеркало»: с одной стороны оно пропускает свет, как окно, а с другой – отражает, как зеркало.

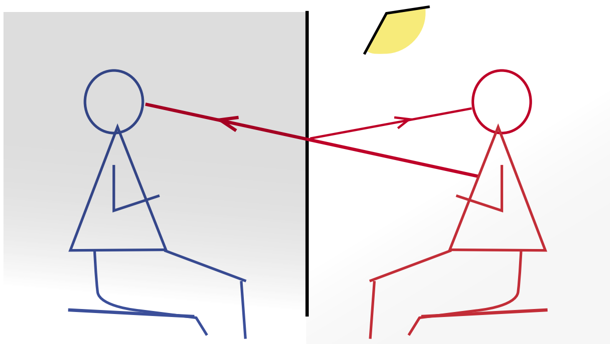
В московском музее «Экспериментаниум» есть такой экспонат – «Волшебное стекло». По обе стороны от него – по стулу, возле каждого стула – лампочка. Два человека садятся напро-

[1] В повести Конан Дойля «Этюд в багровых тонах», по которой снят фильм, такого эпизода нет. Придумали его создатели фильма или взяли из какого-то другого произведения Конан Дойля – автору неизвестно.

тив друг друга, и один из них включает свою лампу. И вот чудеса: тот, кто в тени, видит через стекло того, кто включил лампу и осветил себя; а тот, кто включил лампу… видит своё отражение. Для одного стекло прозрачное, для другого – это зеркало.

Но если лампу включит другой, а первый выключит – они поменяются ролями! На самом деле стекло обычное. Секрет в том, что любое стекло пропускает не весь падающий на него свет; небольшую часть света оно отражает. С той стороны, где лампа, на стекло падает много света; бóльшая его часть проходит сквозь стекло и попадает, в том числе, в глаза того, кто сидит в темноте. Вот он и видит то, что за стеклом, – как в окне. Но небольшая часть, отражённая назад, попадает в глаза тому, кто освещён, – это немного, и его отражение получается неярким, но ведь ничего другого с той, теневой, стороны ему в глаза не попадает!

А что будет, если второй человек тоже включит лампу? Для него самого мало что изменится – ведь основная часть «нового» света уйдёт через стекло к его напарнику. А вот напарник уже не будет видеть собственного тусклого отражения на ярком фоне того, кто за стеклом.



«Одностороннее зеркало» есть и у вас дома; но оно работает как зеркало не всегда, а только вечером или ночью. Это окно. Днём вы хорошо видите через стекло улицу, людей на ней, соседние дома… Оконное стекло почти без искажений пропускает

уличный свет. А вечером, когда на улице темно, вы, подойдя к тому же окну, видите своё отражение!

Теперь понятно, почему: днём на улице света много, и на фоне яркой улицы мы не видим своего совсем слабенького отражения. Тёмным вечером с улицы никакого света не приходит, а в комнате светло – вот вы и видите отражение комнаты. Причём себя вы, скорее всего, увидите только в виде силуэта – вы ведь стоите лицом к окну, и лицо ваше вряд ли освещено. Чем ближе вы к окну, тем темнее ваше отражение. Однако если вы выключите в комнате свет – окно снова перестанет быть зеркалом…

Кстати, с экраном телефона или компьютера та же история – когда он выключен, а вы хорошо освещены, его можно использовать как зеркало. А «настоящих» односторонних зеркал в природе не бывает: если свет проходит через какую-то среду в одну сторону, он может проходить и в обратную.

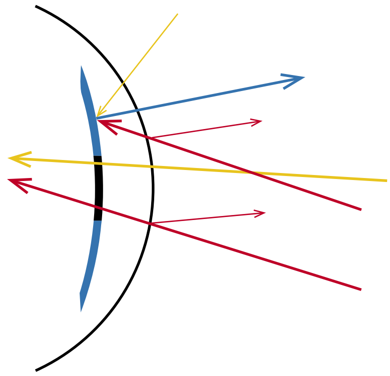
Где ещё работает этот эффект? Те, кто учатся рисовать, знают, что окна домов снаружи выглядят днём тёмными, а вечером – светлыми. Причина та же самая: днём снаружи светлее, чем внутри, поэтому от оконных стёкол отражается больше света, чем проходит через них изнутри. И вы, конечно, сами догадаетесь, почему ярким солнечным днём нехороший человек, подглядывающий в чужие окна, вынужден вплотную прижиматься к стеклу лбом, а вечером в освещённой комнате и люди, и предметы видны издалека.

Теперь вернёмся к вопросу про отражения на фотографиях глаз, который мы задали в начале этой статьи. Свет, падающий снаружи, отражается не от самого зрачка, а от поверхности глаза. Точнее, от тонкой плёнки жидкости, нужной для защиты от пыли, ветра, солнца и т. д. Почему же отражение в зрачке чётче и контрастнее, чем вокруг него, ведь над радужной оболочкой та же плёнка? Как раз пото-

му, что в этом месте за плёнкой – пустота[2], из глубины глаза наружу никакие лучи не приходят. Как из окна при взгляде на тёмную ночную улицу. И ничто не мешает нам разглядеть отражение на чёрном фоне. А радужка и сама отражает прошедший через плёнку и попавший на неё свет – благодаря этому мы её видим. Этого «фонового» света больше, чем отражённого от плёнки; поэтому на яркой радужке слабенькое отражение от ровной поверхности плёнки малозаметно.

Кстати, на более светлой и яркой голубой радужке отражение видно хуже, чем на коричневой: чем темнее фон, тем меньше от него «своих» лучей и тем лучше для отражения.

[2] Честно говоря, не совсем пустота: перед зрачком есть ещё роговица, прозрачная «нашлёпка» – линза, покрывающая зрачок вместе с радужкой. И сам зрачок, который действительно представляет собой дырку в радужной оболочке, заполнен жидкостью. Но для нашей задачи это несущественно, хотя и очень важно для нормальной работы глаза: все эти среды прозрачны и не отражают, а только пропускают свет внутрь.

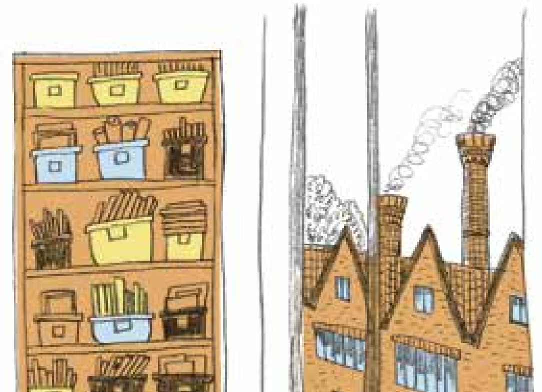


Синим показан свет, идущий от радужной оболочки, а красным – свет от предмета (фотографа), отражённый поверхностью плёнки. Жёлтые – «посторонние» лучи света от других предметов. На фоне яркой радужки отражение малозаметно («красный» луч слабее «синего» и может быть не виден на его фоне), а от области зрачка других лучей, кроме «красного», не исходит, поэтому отражение хорошо видно.

А вот вам ещё вопрос: почему это в зеркале, или на ровной поверхности воды, или на гладкой поверхности металла мы видим отражение, а при взгляде на другие поверхности (вот на радужку, например, или на собственную руку) видим сами эти поверхности?

Фото автора · Художник Алексей Вайнер

ПРОБЛЕМА С ПЕРИМЕТРОМ

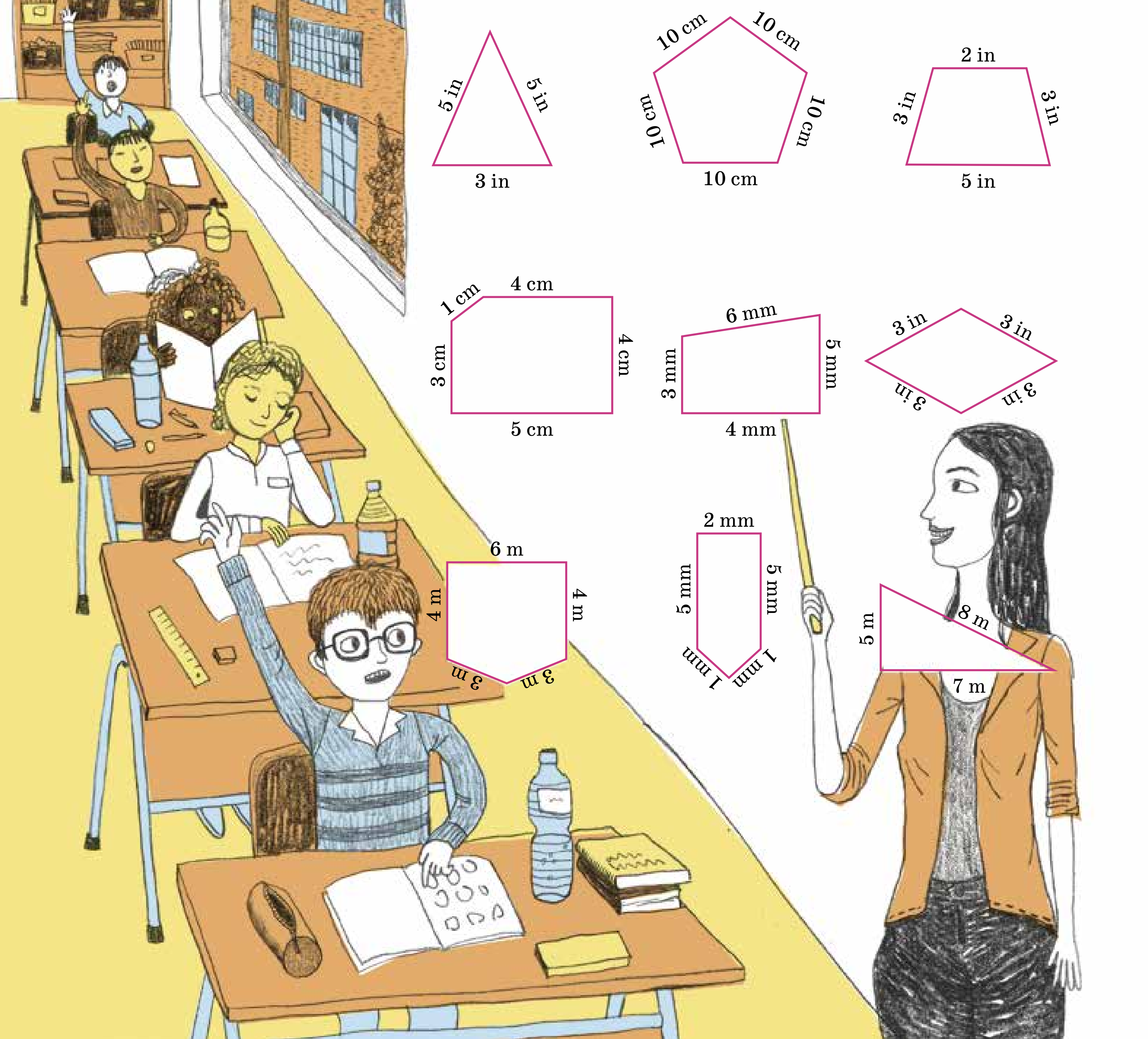


Костя, второклассник одной иностранной школы, получил задание найти периметры нескольких фигур (см. рисунок, in – это дюйм, cm – сантиметр, mm – миллиметр, m – метр). Он без труда справился с вычислениями, но потом подумал и объявил, что часть заданий неправильные.

А разве задание может быть неправильным? Что имеет в виду Костя?

Задание прислала Наталья Гончарук

Художник Артём Костюкевич



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

СЛЕДУЮЩЕЕ ЧИСЛО

Мышь Огрыза перелистывала гроссбух (огромную амбарную книгу для записей) и что-то бормотала себе под нос.

– Что новенького пишут нынче в гроссбухах? – то ли в шутку, то ли всерьёз спросил дятел Спятел.

– «10 августа. Доставлена партия вишнёвого варенья», – прочитала Огрыза.

Таракан Кузька тут же побежал к полкам.

– Нашёл! – через некоторое время прокричал он. – Раз, два, три, четыре! Тут целых четыре банки вишнёвого варенья.

– Изумительный порядок! – похвалил дятел Спятел, пройдя вдоль полок. – Все банки снабжены этикетками и пронумерованы.

– Да, – согласилась Огрыза, – без этого невозможно вести хозяйство. Однако я помню, что банок было значительно больше, Бусенька помогала мне их расставлять…

– Их было шесть штук, – подтвердила Бусенька.

– Ну-ка, посмотрим… у меня всё записано… – И Огрыза снова углубилась в изучение гроссбуха.

– Я нашёл банки №5 и №6, – крикнул дятел Спятел из другого конца Ам-бара.

– Я тоже нашла! – гордо сообщила Огрыза, показывая запись. – Всё сходится.

Вишнёвое варенье

Банка 1	1111101
Банка 2	11111011
Банка 3	11111011111
Банка 4	111110111111
Банка 5	11110111
Банка 6	111101111

– «Банка 1, 1111101» – прочитал Кузька. – Что значит 1111101?

– Это, наверно, 125, – предположил дятел Спятел.

– Эта учётная запись обозначает номер места хранения, – объяснила Огрыза. – Сначала записан номер полки, потом 0, а дальше номер места на полке.

– Одиннадцать тысяч сто одиннадцатая полка? – удивился Кузька.

– Ну... не совсем... – смутилась Огрыза. – Дело в том, что грузчики, которые приносят и уносят банки, не слишком сильны в арифметике. Поэтому, записывая номера полок и мест, я пользуюсь самой примитивной системой счисления – единичной! Чтобы записать число 3, пишем три единицы; чтобы записать число 7, пишем семь единиц.

– Ага, – воодушевился Кузька, – значит, банка № 1 стоит на пятой полке на первом месте, а банка № 5 – на четвёртой полке на третьем месте.

– Как видите, не такое уж это хитрое дело – пронумеровать свои сокровища.

– Как хорошо, что здесь, в Амбаре, – сказал дятел Спятел, – может поместиться лишь конечное число всяких баночек-скляночек и пакетиков. По крайней мере, их всегда удастся перенумеровать. Куда забавней, если бы запасы были бесконечными.

– А что тут хитрого? – спросила Огрыза. – Берёшь элемент бесконечного множества, приклеиваешь к нему ярлычок «№ 1», потом берёшь следующий элемент множества, приклеиваешь к нему ярлычок «№ 2», потом следующий – «№ 3». Ну и так далее, пока все элементы не перенумеруются. Довольно скучное занятие.

– А ярлыков точно хватит? – усомнился дятел Спятел.

– Погодите, я не понимаю, – перебил Кузька. – Что такое следующий элемент? Вот возьмём натуральные числа – сначала идёт число 1, следующее – число 2, затем 3, потом 4... Всё понятно. А теперь переключимся на рациональные числа. Берём рациональное число 1. Какое рациональное число следующее?

– Куда следующее? Следующее рациональное? – переспросила Огрыза.

– Да, следующее рациональное, то есть такое число x, что x больше 1, но между 1 и x нет других чисел.

– Нет других? Куда же они подевались? – забеспокоился дятел Спятел.

– Никуда не подевались. Нет и всё. Между 1 и 2 нет других натуральных чисел, а между 1 и x нет других рациональных.

– Так не бывает, – поняла наконец Огрыза. – Возьмём среднее арифметическое $\frac{1+x}{2}$. Оно больше 1, но меньше x.

– Ничего себе, – восхищённо произнёс Кузька. – Получается, что рациональные числа на числовой прямой представляют собой сплошное множество без пропусков и дыр!

– Не совсем сплошное. А очень даже с пропусками и с дырами. Вот, например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

– Как число может не быть рациональным? Если оно не рациональное – значит, его не существует!

– Корня из двух не существует? – с тревогой спросил дятел Спятел.

– А он что – не рациональный?

– Не рациональный!

– Значит, не существует, это просто игра воображения!

– А как же уравнение $x^2 = 2$? – ещё больше забеспокоился дятел Спятел.

– Оно не имеет корней!

– Ну как же не имеет? Вот я нарисую маленький квадратик, а потом начну его увеличивать, пока его площадь не станет равна 2. А сторона квадрата в этот момент станет равна $\sqrt{2}$.

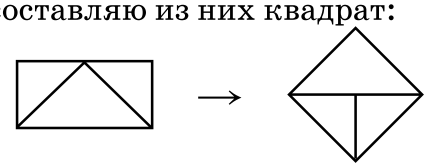
– Значит, площадь квадрата не может стать равной 2! Квадратов площади 2 не бывает!

Дятел Спятел беспомощно посмотрел по сторонам.

– А прямоугольники площади 2 бывают? – поспешила вмешаться Бусенька.

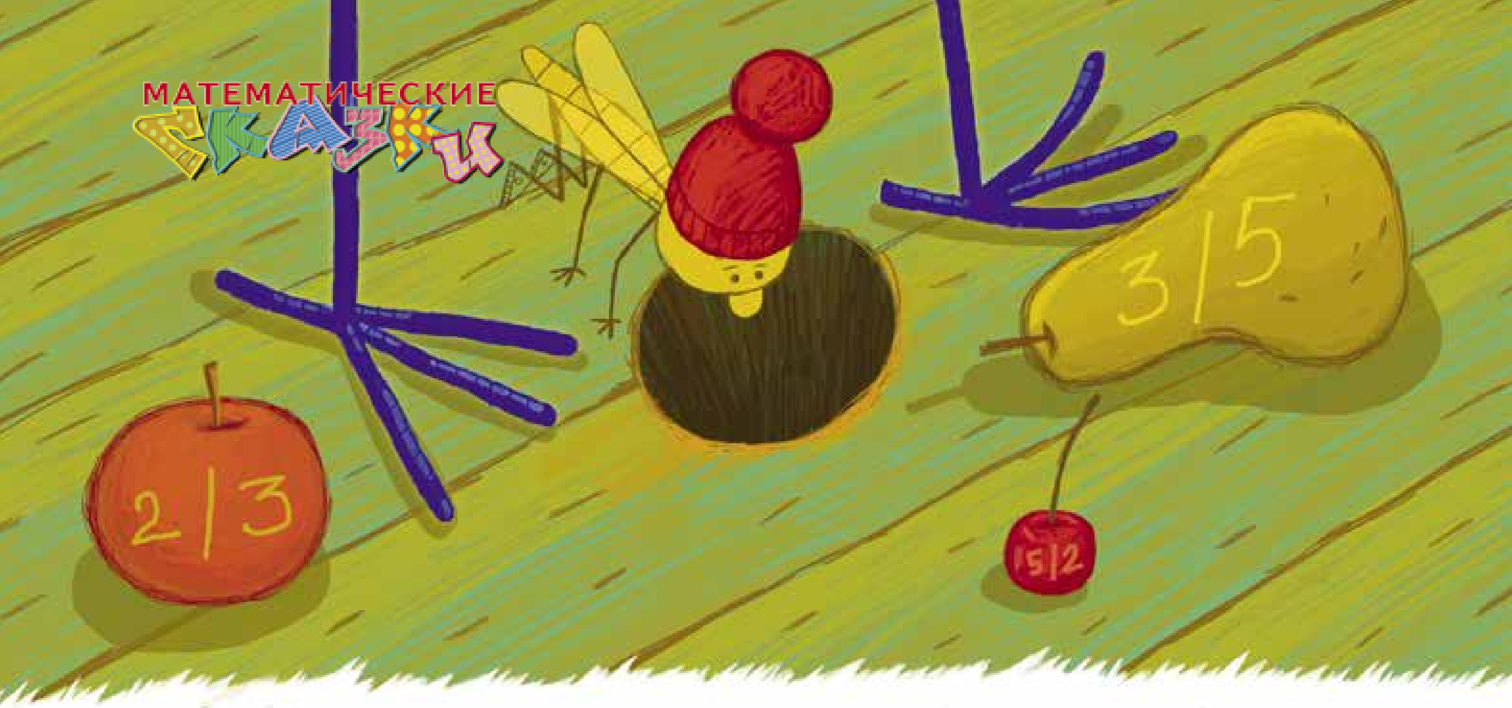
– Конечно, бывают. Например, прямоугольник 1×2.

– Тогда смотри – фокус. Я беру прямоугольник 1×2, разрезаю его на части и составляю из них квадрат:



– Как всё сложно... – утомлённо произнёс Кузька. – Может быть, площадь меняется при перемещении фигуры? Голова кругом идёт.

– Мне кажется, кто-то из нас спятил, – заявила Огрыза и, поглядев на совсем деморализованного Кузьку, до-



бавила: – Получается, что множество рациональных чисел дырявое, а в этих дырках сидят иррациональные числа!

– Точно, – подтвердила Бусенька. – Именно поэтому математика работает не только с рациональными числами, но и с иррациональными. Они вместе образуют множество вещественных чисел.

– И оно уже не дырявое? – ожил Кузька.

– Да. Оно совсем сплошное.

– А что это значит – «сплошное»?

– Это значит, что в нём выполняется такое свойство: если мы возьмём два множества вещественных чисел, назовём их «Левое» и «Правое», так что все числа из Левого множества меньше всех чисел из Правого, то между этими множествами обязательно находится разделяющее число x. Оно не меньше всех чисел из Левого множества и не больше всех чисел из Правого.

– Как хитро. А причём тут «сплошное» или «дырявое»?

– Если бы в множестве вещественных чисел на числовой прямой была дырка, мы могли бы в качестве Левого множества взять все числа, которые левее дырки, а в качестве Правого – все числа, которые правее дырки. И тогда наше свойство сообщает, что есть ещё разделяющее число x.

– И оно как раз будет сидеть в дырке! – догадался Кузька. – Какое полезное свойство. И как оно называется?

– Аксиома непрерывности.

– Ужасное название. Слишком наукообразное! Давайте называть её аксиомой сплошноты!

– Зачем тебе её называть? – с подозрением спросил дятел Спятел. – Ты что, собираешься ею пользоваться?

– Конечно, – сказал Кузька, – интересная штучка! С помощью этой аксиомы мы доказали, что не бывает следующего рационального числа. Может, она и ещё для чего-нибудь пригодится.

– Нет, это мы доказали без аксиомы, – возразила Бусенька. – К тому же мы доказали лишь, что не бывает рационального числа, «следующего по возрастанию» за 1, то есть не существует такого рационального числа

$x > 1$, что между ним и единицей нет других рациональных чисел. Но ничто не мешает нам выбирать следующее рациональное число не по возрастанию, а, так сказать, вперемешку. Сначала выберем первое число, потом второе, потом третье… В результате каждое рациональное число получит номер, а следующее число – это то, у которого следующий номер.

– Как же это сделать? Рациональных чисел так много…

– Да запросто – расфасуем их по банкам с вареньем! Запишем рациональное число в виде несократимой дроби и положим в банку с вареньем: номер полки – это числитель, а место на полке – знаменатель. А учётная запись этой банки будет считаться номером рационального числа.

– Ах! Вишнёвое варенье с корицей, миндалём и рациональными числами, – пошутил дятел Спятел, – для улучшения рациона.

– Но в этой нумерации Огрыза пользуется только нулями и единицами! Получается, что у нас нет числа № 2?

– Не привередничай, – сказала Бусенька. – Да, у нас нет числа № 2. И числа № 1, кстати, тоже нет.

Мы ухитрились пронумеровать все положительные рациональные числа, использовав в качестве номеров лишь часть множества натуральных чисел. Самый маленький номер – № 101 – получила единица. Следующее число – № 1011 – это 1/2. Потом идёт № 1101 – это 2. Ну и так далее.

– Какое расточительство, – сказала Огрыза, – даже номера, состоящие из нескольких единиц и одного нуля, использованы не все! Число № 11011 – это должна быть опять единица, но мы ведь её уже пронумеровали как 101, значит, номер 11011 тоже оказался не нужен.

– Ничего страшного, – успокоил её дятел Спятел, – сэкономленные номера мы используем для нумерации ещё чего-нибудь. Например, для нумерации отрицательных рациональных чисел. Или многочленов с рациональными коэффициентами!

Художник Инга Коржнева

Математический кружок

Александр Блинков

РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Как разбить треугольник на подобные ему треугольники?[1] Сколько треугольников можно получить при таких разбиениях?

Разбиения равностороннего треугольника на равносторонние: от 4 до бесконечности

Очень легко разбить любой равносторонний треугольник на 4 равных равносторонних треугольника, соединив отрезками середины его сторон, то есть проведя средние линии (рис. 1, *а*).

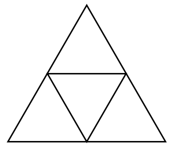


Рис. 1, *а*

Продолжая разбивать этим же способом получающиеся части, мы сможем разделить исходный треугольник на 7, 10, 13, … равносторонних треугольников, и вообще, на любое их число вида $3k+1$ (где k – натуральное). Отметим, что среди треугольников разбиения обязательно будут равные.

Аналогично строится одна из самоподобных фигур – ***треугольник Серпинского*** (такие фигуры называются ***фракталами***). В равностороннем треугольнике проводятся средние линии и «вынимается» средний из четырёх получившихся треугольников. Этот процесс повторяется в каждом из трёх остальных треугольников и т. д., до бесконечности. Итоговая фигура (рис. 1, *б*) имеет ту же форму, что и её части.

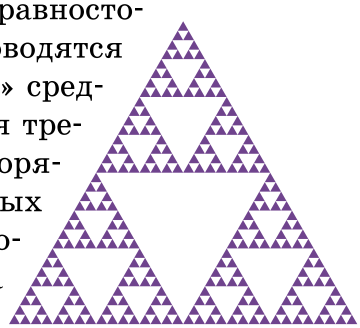


Рис. 1, *б*

А если делить стороны равностороннего треугольника не на 2 равные части, а на 3, 4 и т. д.? Тогда можно разбить его на 9, 16, … равных равносторонних треугольников (рис. 2, *а*, *б*). Ведь если поделить одну из сторон на n равных частей, то сторона маленького треугольника будет в n раз меньше стороны исходного, а площадь тогда – в n^2 раз меньше. Это и значит, что в разбиении будет n^2 треугольников. Кстати, их можно было подсчитать

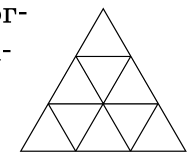


Рис. 2, *а*

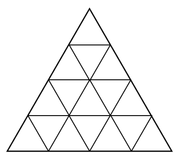


Рис. 2, *б*

[1] Два треугольника подобны, если углы одного соответственно равны углам другого (достаточно соответствующего равенства двух углов).

и по «слоям»: в верхнем слое – один треугольник, в следующем – 3, в последующем – 5, ..., в самом нижнем слое будет $2n-1$ треугольников. Попутно мы доказали геометрически, что $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Обобщаем на произвольные треугольники

Всё сказанное выше легко обобщить на случай произвольного треугольника, проводя три семейства параллельных прямых (в каждом семействе прямые параллельны одной стороне и делят каждую из двух других сторон на n равных частей). Теперь несложно понять, как разбить любой треугольник на n ему подобных, где $n>5$. Разбиение на 6 треугольников, подобных исходному, получается, если сделать чертёж, аналогичный рисунку 2, *а*, и стереть лишние линии (рис. 3, *а*). Разбиение на 8 подобных (рис. 3, *б*) получается из рисунка 2, *б*, и т. д., для любых чётных n, больших 5. Если же n – нечётное, то после стирания надо сделать ещё один шаг: разбить «верхний» треугольник средними линиями на четыре равных. На рисунке 3, *в* показано такое разбиение на 11 треугольников.

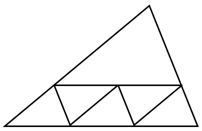


Рис. 3, *а*

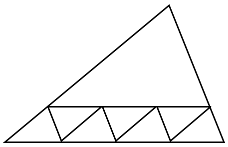


Рис. 3, *б*

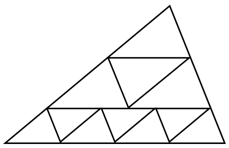


Рис. 3, *в*

А вот на 2, 3 или 5 треугольников, подобных исходному, можно разбить не любой треугольник.

Прямоугольные треугольники

Выясним, какой треугольник можно разбить на два ему подобных. Пусть отрезок CD делит треугольник ABC на два ему подобных: ACD и BCD. Если $\angle CAD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$, то $\angle BDC=\alpha+\beta$ (рис. 4, *а*). Тогда в треугольнике ACD должен быть угол $\alpha+\beta$, и это может быть только угол ADC. Значит, $\angle ADC=\angle BDC=\alpha+\beta=90°$. Тогда исходный треугольник тоже прямоугольный, и $\angle ACB=90°$.

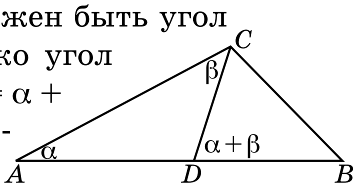


Рис. 4, *а*

Так как $\alpha+\beta=90°$, то $\angle DCB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, и треугольники ACD и BCD подобны треугольнику ABC (рис. 4, *б*).

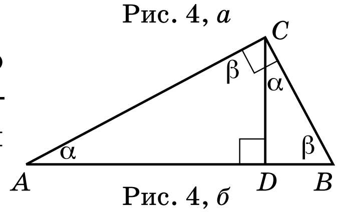


Рис. 4, *б*

Проведя в любом из полученных треугольников высоту из вершины D, мы разобьём треугольник ABC на три треугольника, ему подобных. Продолжая этот процесс, можно разбить прямоугольный треугольник на любое количество ему подобных. А можно ли сделать эти треугольники равными? Иногда можно.

Так, если прямоугольный треугольник ABC – ещё и равнобедренный, высота CD разбивает его на 2 равных прямоугольных равнобедренных треугольника, подобных ABC, а их высоты, проведённые из вершины D, дают уже 4. Продолжая, можно разбить прямоугольный равнобедренный треугольник на 2^n равных треугольников, подобных ему (n – любое натуральное).

Но этот случай – не единственный. Пусть длины катетов прямоугольного треугольника равны целым числам m и k, тогда его можно разбить на $m^2 + k^2$ равных треугольников, подобных ему. Для этого проведём высоту из вершины прямого угла и разобьём один получившийся треугольник на m^2, а другой – на k^2 равных треугольников, как на рисунке 2. Полученные маленькие прямоугольные треугольники двух видов равны (по гипотенузе и острому углу) и подобны исходному. На рисунке 5 – пример разбиения треугольника с катетами 5 и 7 на $74 = 5^2 + 7^2$ равных треугольника.

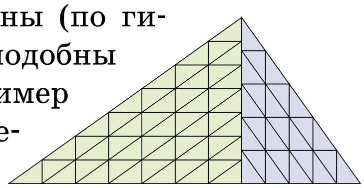


Рис. 5

Разбиения на различные подобные треугольники

А какой треугольник можно разбить на треугольники, ему подобные, среди которых не будет равных? Оказывается, любой неравносторонний. Перед тем как объяснить решение, напомним, что в подобных треугольниках равны отношения соответствующих сторон. Построить искомое разбиение поможет обобщённая теорема Фалеса: параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $BC/AC = k > 1$. Приложим к треугольнику ABC треугольники 1, 2, 3, 4 и 5 (рис. 6). Получим треугольник, разбитый на 6 неравных подобных треугольников.

Треугольники ABC, 1, 2, 3, 4 все различны, так как каждый следующий в k раз больше предыдущего.

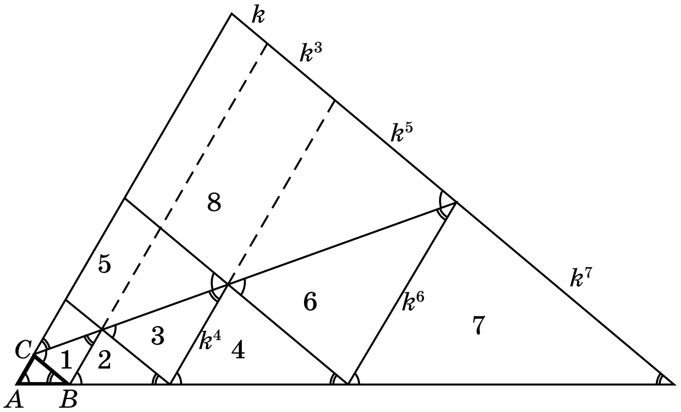


Рис. 6

Но треугольники 4 и 5 могут оказаться равными, если $k + k^3 = k^4$. Тогда достроим треугольники 6 и 7, а треугольник 5 заменим треугольником 8. Треугольники 7 и 8 не равны, так как $k^6 \neq k + k^3 + k^5$. Ведь если $k + k^3 = k^4$, то $k^6 = k^2(k + k^3) = k^3 + k^5 < k + k^3 + k^5$.

Вместо заключения

Какие треугольники разрезаются на 5 подобных, до конца неизвестно, см. статью Б. Френкина «О разрезании треугольника на подобные ему» («Квант» № 4 за 2008 г.). Развитие темы для многоугольников см. в книге М. Гарднера «Математические досуги» (Мир, 2000; гл. 24: «Делящиеся» фигуры на плоскости).

Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли какой-нибудь треугольник разбить на три равных треугольника, подобных исходному?

2. Можно ли разбить на пять треугольников, подобных исходному, какой-нибудь: а) прямоугольный треугольник; б) (*С. Маркелов*) непрямоугольный треугольник?

3. (*Т. Емельянова*) Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все между собой равны.

4. (*А. Галочкин*) Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

5. (*Д. Шноль*) Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей первого подобна одной из частей второго. Обязательно ли подобны оставшиеся части?

6. (*М. Панов*) Можно ли равносторонний треугольник разбить на 5 равнобедренных, но попарно не подобных?

Художник Мария Усеинова

Анастасия Челпанова

САВРАСОВ, СТРАВИНСКИЙ, РЕПИН

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

САВРАСОВ

Как-то раз художник Алексей Кондратьевич Саврасов поссорился с другом. Тот не раз пытался примириться, но художник наотрез отказывался с ним видеться. Тогда друг решил незаметно пробраться в мастерскую Саврасова и подложить ему новые краски, в которых тот так нуждался. Вечером, когда свет в мастерской погас, друг залез в неё через открытое окно. Через минуту там раздались крики и грохот. Прибежавший на шум художник увидел сидящего на полу друга, испачканного красками. Огромная, только что законченная Саврасовым знаменитая картина «Три богатыря» в полумраке так испугала своего первого зрителя, что он оступился, упал и опрокинул палитру.

СТРАВИНСКИЙ

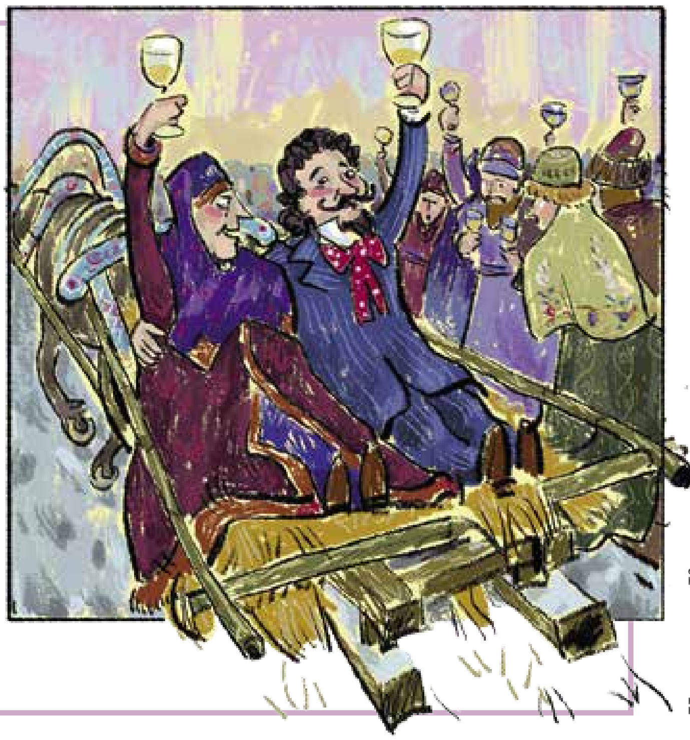
Однажды композитор Игорь Фёдорович Стравинский переезжал из Италии в Швейцарию и вёз свой портрет, нарисованный Пабло Пикассо. На границе военные, увидев рисунок, ни за что не хотели его пропустить. Композитор объяснил, что это его портрет, нарисованный известным художником. Военные не поверили: «Это не портрет, а план», – сказали они. «Да это план моего лица, а не чего-либо другого», –

уверял Стравинский, но не убедил военных, опоздал на поезд и задержался на границе до следующего дня. А рисунок пришлось оставить в Италии: Стравинский отослал его в британское посольство в Риме, откуда портрет переправили композитору дипломатической почтой.

РЕПИН

Художник Илья Ефимович Репин часто устраивал у себя обеды, куда могли прийти не только друзья, но и малознакомые или впервые пришедшие к нему люди. Один раз такой гость сказал за обедом тост, закончив его восхвалением Репина как автора гениальной картины «Боярыня Морозова». Художник сразу же откликнулся, что он присоединяется к этому тосту всем сердцем. Он тоже считает эту картину гениальной и был бы горд, если бы действительно написал её он, а не Суриков.

Гость не понял, что попал в неловкое положение, радостно слушая Репина.



Художник Капыч

ГАНС РАДЕМАХЕР, ОТТО ТЁПЛИЦ

Сергей Львовский

Ганс Радемахер
(Hans Rademacher)
3.04.1892 – 7.02.1969

Отто Тёплиц
(Otto Toeplitz)
1.08.1881 – 15.02.1940

Как правило, в рубрике «Великие умы» рассказывают об учёных, совершивших масштабное открытие, желательно – изменившее ход развития науки. Герои этой статьи были сильными профессиональными математиками, они публиковали хорошие статьи и готовили хороших аспирантов, но лидерами науки они не были – они работали вровень со всеми. Обычно о таких учёных популярных статей не пишут. Почему наши герои составляют исключение, читатель вскоре увидит. Но сначала скажем, о ком, собственно, пойдёт речь.

ГАНС РАДЕМАХЕР

Первый из героев статьи, Ганс Радемахер, родился в 1892 году в пригороде Гамбурга, в семье торговца. В Гамбурге он закончил гимназию, в 1910 году поступил в Гёттингенский университет – в то время главный математический центр Германии, если не всего мира. Молодой человек интересовался как математикой, так и философией, но мощные гёттингенские математики перетянули его на свою сторону. В Гёттингене Радемахер в 1917 году защитил диссертацию по теории функций комплексного переменного; научным руководителем был выдающийся специалист в этой области Константин Каратеодори. Защитившись и отслужив в армии, Радемахер некоторое время поработал учителем, затем в 1919 году Каратеодори позвал его в Берлинский университет. Там Радемахер защитил хабилитационную работу – аналог нашей докторской диссертации, – и началась обычная карьера успешного немецкого профессора: сначала лектор (у нас бы сказали «почасовик») в Берлине, затем экстраординарный профессор (аналог нашего доцента) в родном Гамбурге, с 1925 года высшая ступень: ординарный профессор в Бреслау – теперь это польский город Вроцлав.

ОТТО ТЁПЛИЦ

Второй герой нашей истории был на десяток лет старше Радемахера. Тёплиц родился в 1881 году в уже упоминавшемся городе Бреслау, в еврейской семье. Его дед и отец преподавали математику в гимназии. Тёплиц закончил университет и защитил диссертацию в своём родном городе. Защитившись, Тёплиц направился всё в тот же Гёттинген. В Гёттингенском университете он сменил тему своих научных занятий и в этой новой теме (интегральные уравнения) весьма преуспел. Дальше можно ограничиться списком годов и ступеней карьеры: хабилитация (1907, Гёттинген), приват-доцент (там же), экстраординарный профессор (1913, Киль), ординарный профессор (1920, там же), наконец, заведующий кафедрой (1928, Бонн). Помимо собственно научной работы, Тёплиц интересовался историей и преподаванием математики – в частности, он с удовольствием преподавал математику будущим учителям. Эти его вкусы чувствуются и при чтении книги, о которой сейчас пойдёт речь.

КНИГА

В 1930 году Радемахер и Тёплиц выпустили научно-популярную книгу под названием «О числах и фигурах» (в русском переводе – просто «Числа и фигуры»), и эта небольшая книжка сделала их известными за пределами узкого круга профессиональных математиков. Чем же она замечательна?

Научно-популярные книги по математике выходили и ранее. Например, ещё в 1913 году вышла книга В. Литцмана и Ф. Трира «Где ошибка?», посвящённая примерам ошибочных математических рассуждений, иногда весьма забавным и поучительным; в 1926 году в СССР вышла «Занимательная арифметика» Я. И. Перельмана. Однако в этих и других книгах речь шла исключительно о математике, которую изучают в школьном курсе. Радемахер и Тёплиц поставили себе иную задачу: объяснить неспециалистам, в чём заключается работа профессиональных математиков – вот таких, как авторы книги. Расстояние от математики, входящей в школьную программу, до математики, которой занимаются научные работники, и сейчас огромно, и в 1930 году было огромно, но Радемахер и Тёплиц отобрали пару де-

Якоб Розанес (16.08.1842–6.01.1922), математик и шахматист, научный руководитель Тёплица в университете Бреслау

Константин Каратеодори (13.09.1873–2.02.1950), научный руководитель Радемахера

Гёттингенский университет, в котором герои статьи сформировались как математики

Знаменитая книга на английском, испанском, венгерском и турецком языках

сятков интересных задач с элементарными формулировками, которыми в какой-то момент занимались исследователи, и рассказали, как профессионалы эти задачи решали. Некоторые из тем, разбираемых в книге (например, вопрос о бесконечности последовательности простых чисел), известны уже несколько тысяч лет, другие (например, начала канторовской теории множеств) были к моменту написания книги относительно новыми, и все их объединяло то, что и формулировки, и решения были совершенно не похожи на ту математику, которой учили в школе.

Сейчас, 90 лет спустя, книг по занимательной математике выпускается много, и сказанным выше никого не удивишь. Радемахер и Тёплиц были первыми, но дело не только в этом: современные авторы популярных книг в значительной степени рассказывают о том же, о чём идёт речь в «Числах и фигурах», – и о бесконечности последовательности простых чисел, и почему разложение числа на простые множители однозначно, и о теореме Эйлера для многогранников, и почему рациональных чисел столько же, сколько целых, а точек внутри квадрата столько же, сколько их на отрезке... Удивляться этому не приходится: тем в «серьёзной» математике, доступных без специальной подготовки, действительно мало! Даже некоторые педагогические приёмы, впервые использованные Радемахером и Тёплицем, порой повторяют в современных книгах: если автор, объясняя читателю понятие равномощности множеств, пишет, что для того чтобы узнать, кого больше в танцевальном зале – мужчин или женщин, – не надо их пересчитывать по отдельности, а достаточно объявить танец и посмотреть, кто остался без пары, то знайте, что это рассуждение было опубликовано в седьмой главе «Чисел и фигур»!

Нелишне заметить, что авторы не предназначали свою книгу именно школьникам. Читателем они видели взрослого человека, математиком становиться не собирающегося, но желающего получить представление о математике как науке. Ведь есть же немало людей, рассуждали авторы, не являющихся музыкантами, но хорошо разбирающихся в музыке! Ведь есть же в музыке не только крупные произведения, но и «малые формы», песенки, и пусть читатель-неспециалист научится находить радость в математических «песенках». Более того, темы, затронутые в книге, авторы опробовали на публичных лекциях для неспециалистов. Они писали, что каждая глава книги соответствует примерно часовой лекции.

ТРИДЦАТЫЕ ГОДЫ

В 1933 году из печати вышло второе издание «Чисел и фигур»; в нём авторы заменили тему о конических сечениях на более, по их мнению, актуальную тему из комбинаторики. А 30 января того же года в Германии произошла политическая катастрофа: всенародно избранный президент Пауль фон Гинденбург назначил главой правительства Адольфа Гитлера. Менее чем за два месяца Гитлер, сочетая интриги с открытым террором, добился абсолютной власти в стране. Начался двенадцатилетний период нацизма, и на судьбах героев статьи это сказалось пагубным образом.

Уже 7 апреля 1933 года нацистские власти издали «Закон о реорганизации государственной службы». Третий параграф этого закона гласил, что увольнению с государственной службы подлежали все «неарийцы» (на практике это означало попросту «евреи»). При этом все университетские преподаватели были в Германии государственными служащими. Правда, в законе было предусмотрено исключение, принятое по настоянию Гинденбурга: «неарийцам», поступившим на государственную службу до начала войны (то есть до 1914 г.), на службе разрешалось остаться, и Тёплиц, ставший профессором, как мы помним, ещё в 1913 году, под это исключение подпадал. Это позволило ему ещё некоторое время продержаться в Боннском университете, но в 1935 году все исключения для «неарийцев» были отменены, и Тёплиц работы в университете был лишён.

Современное немецкое переиздание


Боннский университет, из которого был изгнан нацистами Отто Тёплиц

Надпись на мемориальной доске в Боннском университете: «В память Отто Тёплица (1.08.1881–15.02.1940), математика, преподавателя и с 1928 по 1935 год – нашего коллеги, униженного и изгнанного нацистами, потому что он был евреем»

ГАНС РАДЕМАХЕР, ОТТО ТЁПЛИЦ

Университет Бреслау (ныне Вроцлавский университет, Польша), из которого был изгнан нацистами Ганс Радемахер

Пенсильванский университет, в котором Радемахер проработал всю вторую половину жизни

Кампус Еврейского университета в Иерусалиме, функционировавший в 1939 году (современная фотография)

Ганс Радемахер евреем, в отличие от Тёплица, не был, но и он при нацистах лишился работы по специальности, причём даже раньше, чем Тёплиц. Согласно четвёртому параграфу упомянутого выше нацистского закона государственные служащие, «про которых, вследствие их политического прошлого, нельзя гарантировать, что после 1918 года они всё время искренне поддерживали национальное государство», подлежали увольнению. Радемахер же состоял в антивоенной организации «Товарищество за мир» и, более того, возглавлял её местное отделение в Бреслау. Нечего и говорить, что с нацистской идеологией, в которой важнейшую роль играли культ армии и воинственная риторика, такая деятельность была полностью несовместима, а свидетельства о том, что он всё время поддерживал «национальное государство», Радемахер представить не мог, даже если бы захотел. Уже в 1933 году он вынужденно оставил свой пост в университете Бреслау. Из Германии Радемахеру также пришлось срочно уехать: если бы он остался в стране, политическое прошлое сулило бы ему много худшие неприятности, чем увольнение. В итоге Радемахер переехал в США и начал там новую жизнь. Получив должность в Пенсильванском университете в Филадельфии, он благополучно проработал в нём до самого выхода на пенсию. Умер Радемахер в США в 1969 году.

Тёплиц, лишённый права работать в университетах, остался в Германии. Всё, что он теперь мог, – по возможности помогать другим немецким евреям, своим товарищам по несчастью. Он основал школу для еврейских детей и преподавал в ней; он вступил в созданную в сентябре 1933 года организацию под названием «Представительство евреев в Германии», целью которой было оказывать помощь немецким евреям, подвергавшимся всё бо́льшим преследованиям. Тёплиц в этой организации возглавлял отдел высшего образования; в частности, этот отдел оказывал помощь евреям, собиравшимся продолжить учёбу в американских университетах. Между тем обстановка в Германии становилась всё более невыносимой. В феврале 1939 года Тёплиц уехал в Иерусалим – в тот момент такое ещё было возможно. Он получил там должность научного советника при Еврейском университете, но жизнь уже подходила к концу: через год после отъезда Отто Тёплиц умер от туберкулёза.

СУДЬБА КНИГИ

Выйдя в свет, книги начинают жить своей жизнью, независимо от желаний их авторов. Книгу, предназначавшуюся взрослым читателям, стали читать вовсе не они, а интересующиеся математикой школьники, и именно в качестве книги для школьников «Числа и фигуры» завоевали популярность. В русском переводе книга дважды выходила до войны и несколько раз – после войны. В 1956 году в США вышел и перевод на английский. Для него Радемахер сделал важное дополнение к одной из глав. (Кроме того, переводчик две главы дописал от себя.)

В переводах облик книги изменился. В оригинале заглавие было цитатой из стихотворения Нова́лиса – немецкого поэта XVIII века. В русском переводе это заглавие упростили, а в английском переводе оно и вовсе превратилось в «Удовольствие от математики». Поубавилось в переводах и количество ссылок на других немецких писателей, филологов и философов – за пределами Германии большинству читателей это было бы попросту непонятно. Но главное содержание книги, математическое, сохранилось и в русском, и в английском текстах, ничуть не устарев за 90 лет. Разве что слой людей, не являющихся математиками, но математику любящих, так, кажется, и не сложился. Может быть, эта мечта Радемахера и Тёплица ещё сбудется?

Иллюстрации предоставлены автором

Издания разных лет
на русском языке
(1936, 1938, 1962, 2020)

Новалис (2.05.1772–25.03.1801)
и Христиан Моргенштерн
(6.05.1871–31.03.1914) –
немецкие поэты, ссылки на творчество
которых присутствуют в книге

LXXXVI Санкт-Петербургская олимпиада по математике

Материал подготовил
Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Мы приводим несколько задач второго (городского) тура для 6–8 классов, прошедшего 9 февраля 2020 года.

Городская олимпиада – устная. Решив задачу, школьник рассказывает решение одному из членов жюри, который ищет ошибки и задаёт уточняющие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение «на ходу», но если он не может сделать этого достаточно быстро, то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать три подхода по каждой задаче. При подведении итогов учитывается только количество задач, решённых каждым участником.

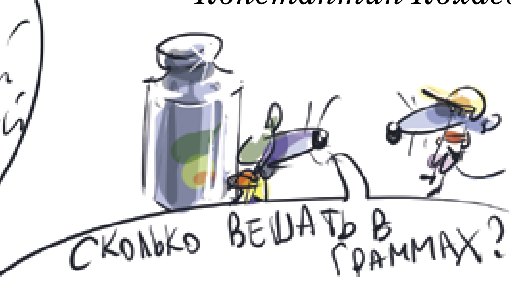
Избранные задачи городского тура

1 (6 класс). Первого сентября дети принесли в школу розы и гвоздики. 101 мальчик и 3 девочки встали по кругу, каждый держал в руках все свои цветы. Оказалось, что у каждого мальчика ровно 50 цветков. По сигналу директора каждый из детей передал все свои гвоздики соседу слева. После этого оказалось, что у каждого мальчика ровно 49 цветков. Докажите, что никакие две девочки не стояли рядом.

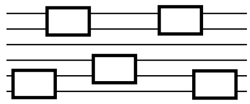
Ольга Иванова

2 (6 класс). Есть 111 детей. Они весят одинаковое число граммов и всегда говорят правду, кроме одного, который весит меньше и всегда лжёт. Подслеповатая воспитательница ставит на чаши весов по 55 детей, после чего ребёнок, не участвовавший во взвешивании, сообщает воспитательнице, которая из чаш перевесила (или что весы в равновесии). Сможет ли воспитательница с помощью таких операций найти фальшивого ребёнка?

Константин Кохась



3 (7 класс). Имеется несколько параллельных рельсов. На этих рельсах стоят 30 грузовых и 20 пассажирских вагонов, каждый вагон – на двух соседних рельсах. Вагон называется *подвижным*, если оба рельса, на которых он стоит, не заняты другими вагонами (на приведённом рисунке нет подвижных вагонов). Среди пассажирских вагонов подвижных ровно 10, а среди грузовых – ровно 9. Докажите, что есть рельс, на котором стоят колёса хотя бы двух грузовых вагонов.



Андрей Солынин

4 (6 класс). Назовём число *сложным*, если оно имеет не меньше двух различных простых делителей. Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух сложных чисел.

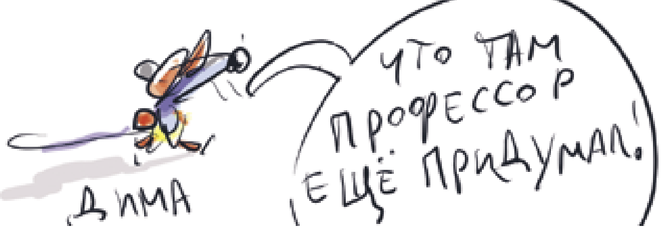
Сергей Берлов

5 (6 класс). На доске написано десятизначное число. Можно взять любую цифру этого числа, меньшую 8, прибавить к ней 1 или 2 и записать на доску получившееся новое число вместо старого. Эту операцию проделали 55 раз. Докажите, что хотя бы одно из 56 чисел, которые выписывались на доску в этом эксперименте, было составным.

Сергей Берлов

6 (6 класс). Дима и Гоша играют в «нолики-нолики» на доске 14×441. За один ход можно поставить один нолик в любую пустую клетку. Ходят по очереди, первым ходит Гоша. Выигрывает тот игрок, после хода которого образуется 7 подряд стоящих ноликов по вертикали или по горизонтали. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл его соперник?

Дмитрий Ананьев,
Александр Кузнецов,
Георгий Левцов



Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения III тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 15 сентября. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы. Предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Предлагайте задачи своего сочинения – лучшие мы опубликуем!

III ТУР

11. Носители некоторых средне-русских говоров говорят: [*у*]*гурцы*, [*у*]*бледенеть*, [*у*]*творить дверь*. Найдите глагол, услышав который от носителя такого говора, можно подумать, что он означает нечто вроде «увлекаться созданием орнаментов».

С. В. Дьяченко

12. Много лет назад в одно почтовое отделение пришло письмо. В написанном от руки адресе получателя был указан непонятный российский город Камра. Сотрудники почты долго ломали голову, что же это за город, а потом догадались. В какой город они отправили письмо?

С. Л. Елисеев

14. Рука поднимается. А язык?

С. И. Переверзева

13. Маленький Лёва считает, что название одного из его любимых произведений начинается с притяжательного местоимения. Напишите это название.

И. Б. Иткин

15. В русском языке есть слова, состоящие из двух одинаковых «половинок»: *мама*, *папа*, *тамтам*, *комком* (от *комок*), *лили* (от *лить*)... Найдите исконно русское слово, обладающее тем же свойством, у которого есть приставка, корень, не меньше одного суффикса и окончание.

Т. Г. Пшеницын

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, II ТУР

(«Квантик» № 4, 2020)

6. *Найдите русский односложный предлог, который можно понять как деепричастие. Напишите начальную форму глагола, от которого образовано это деепричастие.*

Этот предлог – ***для***. Его можно понять как деепричастие *для* «продолжая», образованное от глагола ***длить***.

7. *В русской букве В две «дырочки». А сколько всего «дырочек» в буквах русского алфавита? (Под «буквами» в этой задаче понимаются заглавные печатные буквы.)*

Считаем: А – 1, Б – 1, В – 2, Д – 1, О – 1, Р – 1, Ф – 2, Ъ – 1, Ы – 1, Ь – 1, Ю – 1, Я – 1 (в заглавных Е и Ё дырочек нет). Итого **14 дырочек**.

8. а, б, в, ж, ... *Напишите два следующих элемента этого списка.*

В первый момент приведённый набор кажется странным: почему после *а*, *б* и *в* идёт именно *ж*? Подумав, мы понимаем, что перед нами – начало <u>упорядоченного по алфавиту списка однобуквенных слов русского языка.</u> Два следующих элемента этого списка – ***и*** и ***к***, а ещё он включает в себя буквы (они же слова) *о*, *с*, *у*, *э*, *я*.

9. *Решите шуточную задачу: с суффиксом -ник – любитель, без суффикса – профессионал.*

Слово «шуточная» в этой задаче – не характеристика жанра (задача как раз вполне серьёзная), а намёк на то, в какой области искать ответ. От того же корня, что и прилагательное *шуточный*, образованы существительные ***шутник*** «любитель пошутить» (с суффиксом *-ник*) и ***шут*** «человек, профессиональная обязанность которого – развлекать какое-либо высокопоставленное лицо» (без суффикса).

10. *Двухлетний Петя недавно узнал несколько новых слов. Произносит он их примерно так:* кук, ава́й, его́ни, апе́пе. *Все эти слова относятся к одной группе. Значения этих слов Петя знает хорошо и никогда не путает кук и авай, гегони и апепе. Как выглядят эти слова во «взрослом» языке?*

Петя узнал <u>названия четырёх геометрических фигур</u>: ***круг***, ***овал***, ***треугольник***, ***трапеция***. Если в столь юном возрасте Петя никогда не путает круг с овалом, а треугольник – с трапецией, он, безусловно, большой молодец.

ПАМЯТЬ СНОВА ПОДВЕЛА

(«Квантик» № 5, 2020)

Найдём все числа с этим свойством. Однозначные числа подходят, поищем ещё. Пусть x – самая большая цифра в числе среди тех, что стоят не на последнем месте. Если $x=1$, наше число двузначное, начинающееся с 1, но не 11.

Пусть $x>1$. Если за какой-то из цифр x следует y, то y – самая частая цифра, и перед каждым y стоит x, если только y не на первом месте. Верно и обратное, после каждой цифры x всегда стоит y. Ведь если бы следом за x встречались две разные цифры y и z (одна из них может совпасть с x), то вместе цифр y и z было бы $2x$, и цифр x было бы хотя бы $2x-1$. Но $2x-1>x$, и тогда y – не самая частая цифра, противоречие.

Итак, y может стоять первой в числе, но далее x и y идут всегда парами xy, и всего цифр x либо x (столько, сколько y), либо $x-1$.

Если цифр x всего x, то перед одной из цифр x будет стоять x, и тогда $x=y$. В этом случае число состоит из x цифр x. Максимальное такое число – 999999999.

Пусть теперь в числе всего $x-1$ цифр x. Поскольку цифр y всего x, имеем $y \neq x$. Так как x – максимально, то $y<x$ и число начинается на y. Тогда начало числа разбивается на $x-1$ блоков цифр «от y до следующего x»:

$$\boxed{y \,.....\, x}\ \boxed{y \,.....\, x} \dots \boxed{y \,.....\, x}\ y \,...........$$

Заметим, что каждый блок однозначно восстанавливается справа налево. Значит, каждая цифра блока встречается в числе хотя бы $x-1$ раз. Тогда все цифры в блоке не меньше $x-1$, в частности и y. Итак, $y=x-1$, и блоки равны yx.

Значит, число начинается на $yxy...xy$, а дальше нет цифр x или y. Если за последним y идёт новая цифра z, то $y=1$, ведь иначе z повторится и перед ней снова будет y. Поэтому число либо равно $yxy...xy$, где $y=x-1$, либо равно 121?, где последняя цифра может быть любой, кроме 1 и 2. Наибольшее число получается при $x=9$.

НАШ КОНКУРС, IX тур (**«Квантик» № 5, 2020**)

41. *Перед игроком стоят в ряд 3 шкатулки, в одной из которых лежит приз. К шкатулкам прикреплены записки с утверждениями, как на рисунке. Известно, что ровно одно из утверждений истинно. Какую шкатулку нужно открыть, чтобы получить приз?*

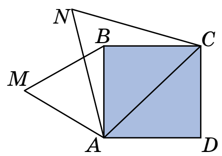
Здесь приза нет	Приз лежит здесь	Приз в соседней шкатулке

Ответ: правую. Если приз в левой шкатулке, то все утверждения ложны, если в средней – то все верны. А если приз в правой – верно только утверждение на левой шкатулке.

42. *Толя Втулкин отметил на прямой три точки и заметил, что всевозможных отрезков с концами в этих точках оказалось 3, а всевозможных лучей с началами в этих точках – 6, в два раза больше. «Интересно, – подумал Толя, – а можно ли отметить столько точек, чтобы получилось наоборот: число всевозможных лучей с началами в этих точках было бы в два раза меньше количества всевозможных отрезков с концами в этих точках?» Ответьте на вопрос Толи.*

Ответ: да. Отметим 9 точек. Тогда отрезков столько же, сколько пар точек: $9\cdot 8/2=36$, а лучей – удвоенное число точек: $9\cdot 2=18$.

43. *На диагонали и стороне единичного квадрата ABCD построены правильные треугольники AMB и ANC так, как показано на рисунке. Чему равно расстояние MN?*



Ответ: 1. Треугольник BAC при повороте на 60° против часовой стрелки вокруг вершины A переходит в треугольник MAN. Действительно, треугольники BAM и CAN правильные, поэтому стороны AB и AC переходят соответственно в AM и AN, а угол BAC – в угол MAN. Значит, треугольники BAC и MAN равны по первому признаку, и $BC=MN$.

44. *Число 1210 обладает таким свойством: каждая его цифра, кроме последней, показывает, сколько раз в нём встречается следующая цифра. А именно: «12» означает, что в числе одна двойка, «21» – что в нём две единицы, «10» – что в нём один ноль. Существует ли число с таким же свойством, большее миллиарда?*

Ответ: да, например, 89 898 989 898 989 898 (это число – максимально возможное, см. выше ответ к статье «Память снова подвела»).

45. *Можно ли записать в клетках фигуры F натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом горизонтальном прямоугольнике 1×3, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 10, а сумма чисел в любом вертикальном прямоугольнике 3×1, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 11, если фигура F – это*

а) квадрат 5×5; б) квадрат 5×5, у которого удалили центральную клетку?

а) Ответ: нельзя. Пусть числа записать удалось. Рассмотрим любой квадрат 3×3 внутри фигуры F. Его можно разрезать на три «горизонтальных» прямоугольника 1×3, а можно – на три «вертикальных». Тогда сумма чисел в клетках этого квадрата равна $3\times 10=30$ и она же равна $3\times 11=33$, что невозможно.

1	1	8	1	1
1	1	8	1	1
9	9		9	9
1	1	8	1	1
1	1	8	1	1

б) Ответ: можно, см. рисунок.

НОВЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ФЕЙЕРВЕРК

(«Квантик» № 6, 2020)

Белая мгла и снежная слепота. Белая мгла бывает разной. Когда низовая метель поднимает вверх пушистый снег, видимость может упасть настолько, что, отойдя на несколько метров, легко потеряться. В другом случае белая мгла случается, когда земля покрыта белым снегом, а небо затянуто сплошными белыми облаками. Поскольку и снег, и облака хорошо отражают свет, освещение становится настолько диффузным (иначе говоря, рассеянным), что исчезают тени. Когда снег под ногами столь же яркий, как и облака над головой, горизонт неразличим, а небо и снег сливаются в одну белую пелену. Тогда может возникнуть ощущение, что вас окружает бесконечная белая пустота. Рассказывая о полярной экспедиции, длившейся пять лет, Вильялмур Стефанссон вспоминал, что обычно белая мгла опускалась и не в ясные дни, и не когда на небе была сплошная плотная облачность. Скорее, такая угроза возникала в тех случаях, когда солнечный свет пробивался через прикрывающие небо облака. Вот тогда можно не заметить и ледяную глыбу высотой в половину человеческого роста, не говоря уже о льдинах меньшего размера, о которые легко споткнуться.

Яркий видимый свет и интенсивное ультрафиолетовое излучение могут вызвать боль в глазах и даже привести к слепоте. До сих пор, чтобы уменьшить воздействие света на глаза, коренные жители Канады и Аляски защищают глаза маской из дерева или кости с узкими прорезями для глаз.

Одностороннее зеркало. Ответ см. в этом номере журнала на с. 2–5.

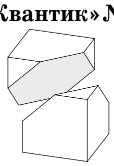
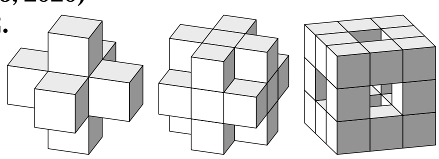
Бар в «Фоли-Бержер». Формы отражённых в зеркале изображений правильные, но расположены изображения неправильно. Это чувствуется уже при первом взгляде на картину, ещё до того, как понимаешь, в чём дело. Настоящие бутылки слева на картине стоят ближе к барменше, а на отражении они на дальнем от неё краю стойки. Отражение девушки должно быть позади неё, а не сдвинуто, причём достаточно далеко, вправо. И самое странное: девушка смотрит прямо на вас, но в зеркале вы видите стоящего перед ней мужчину. Выходит, что именно вы и есть тот мужчина. Но тогда ваше отражение не должно быть сдвинуто ещё дальше вправо, как это нарисовано на картине. На самом деле фигура девушки заслонила бы от вас ваше отражение.

Недолитое пиво. Толстые стенки кружки создают такое впечатление благодаря преломлению луча света, идущего из пива через стекло, а затем по воздуху. Например, самый левый луч от пива вблизи стенки кружки отклоняется в том направлении, где вы видите центр кружки (см. рисунок). Вы видите этот луч и, мысленно продолжив его по прямой обратно к кружке, делаете вывод, что он исходит от точки, расположенной левее, чем на самом деле. И вам кажется, что пива в кружке больше. Толщина и кривизна стекла могут менять и кажущуюся глубину пива. Можно добиться того, что реальное содержимое кружки будет в два раза меньше кажущегося.

Вид сверху на пивную кружку, создающую иллюзию «лишнего» пива

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ

(«Квантик» № 6, 2020)

1.  **2.** 

3. Можно. «Ежа» к «ежу» нужно приставлять, как приставлен на рисунке 1 белый «ёж» к розовому или наоборот. Тогда всё пространство заполнится «ежами». Покажем, что «ежи» не наложатся друг на друга и не останется дыр. Добавим сначала ещё 4 голубых «ежа», как на рисунке 2, а потом ещё один белый, как на рисунке 3. Центры восьми «ежей» лежат в вершинах параллелепипеда (непрямоугольного). Замостив копиями этого параллелепипеда пространство, мы также заполним его «ежами».

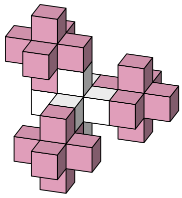


Рис. 1

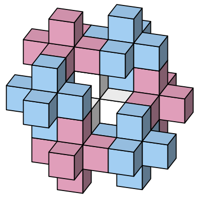


Рис. 2

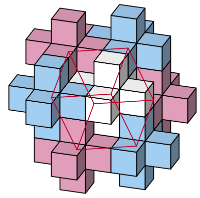


Рис. 3

4. Можно считать, что три грани тетраэдра – это равнобедренные прямоугольные треугольники, на ответ это не повлияет. Плоскости, параллельные этим граням (и делящие рёбра на три равные части), образуют куб, разрезанный на 27 кубиков. Кубик, примыкающий тремя своими гранями к граням тетраэдра, покрасим в зелёный. Три кубика, соседних с ним по грани, – в розовый, а соседние с розовыми – в голубой. На рисунке 4 голубые кубики закрыли собой розовые и зелёный. Четвёртая грань тетраэдра пересекает все голубые кубики и все розовые (по треугольнику, рис. 5). Следующая параллельная ей плоскость пересекает все розовые кубики и зелёный (рис. 6). Наконец, оставшаяся плоскость пересекает только зелёный. Все кубики разрезались на три части, но у каждого голубого кубика только одна часть внутри тетраэдра, у розовых – по две, а у зелёного – все три. Итого: $6\times1+3\times2+1\times3=15$.

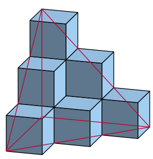


Рис. 4

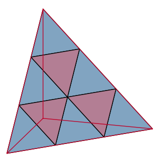


Рис. 5

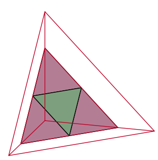


Рис. 6

А вот другие источники наглядных задач:

Дж. Франсис. Книжка с картинками по топологии (как рисовать математические картинки). М.: Мир, 1991.

В. В. Прасолов и И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.

А. Скопенков и А. Таламбуца. Экстремальные расположения правильных многогранников. Мат. просвещение. 3-я сер., вып. 8, 2004.

«ПРАВОБОКАЯ» МАШИНА И ПРЕСТУПНИК («Квантик» № 6, 2020)

В условии не сказано, ловит ли машина преступника, если оказывается с ним в одной клетке. Проверьте, что ответ от этого не зависит.

Если преступник начинал игру рядом с машиной (рис. 1, красная область), он пойман сразу. Первым ходом машина едет прямо или направо и поймает преступника, если он останется в жёлтой или синей области. То есть за первый ход преступник будет пойман, если он начинал в красной области рисунка 2 (добавились две клетки).

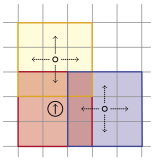


Рис. 1

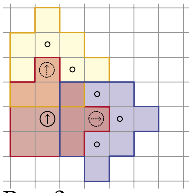


Рис. 2

А где машина поймает преступника за два хода? Если машина сначала едет прямо, то ещё за ход она может поймать преступника в жёлтой области рисунка 2, если вправо – в синей (это копии красной области, только они сдвинуты, а синяя ещё и повёрнута). То есть преступник будет пойман за два хода, если начнёт в части рисунка 2, закрашенной жёлтым или синим, и не сможет за ход из неё убежать.

Возникшие 5 новых точек добавлены в красную область рисунка 3, по ней построены новые жёлтая и синяя области и т. д. (см. рисунки 4–11).

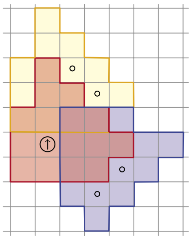


Рис. 3

Кажется, что процесс добавления новых проигрышных позиций будет продолжаться бесконечно. Удивительно, но если полицейские не могут поймать преступника за первые 10 ходов, то они никогда не смогут его поймать – на рисунке 11 никаких новых проигрышных для преступников клеток не добавляется. Тем самым, ответ – красная зона на рисунке 12 (в каждой её клетке указано, за сколько ходов будет пойман преступник, если он стартует из этой клетки).

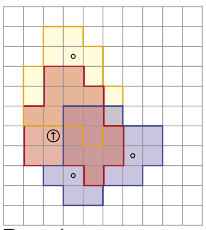


Рис. 4

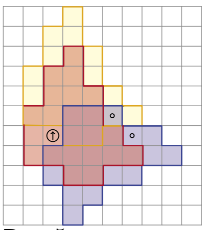


Рис. 5

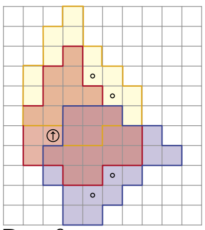


Рис. 6

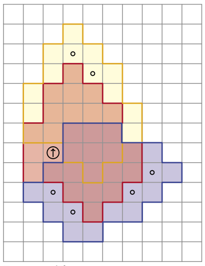


Рис. 7

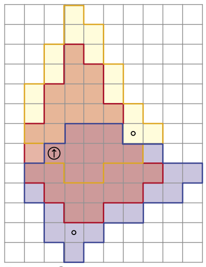


Рис. 8

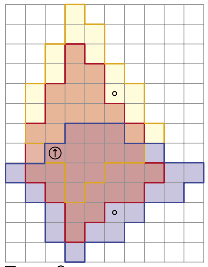


Рис. 9

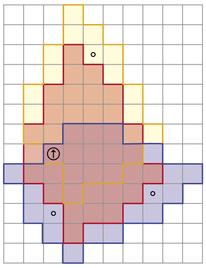


Рис. 10

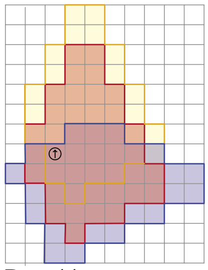


Рис. 11

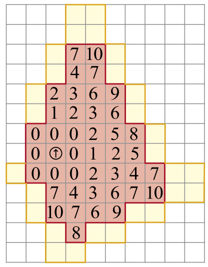
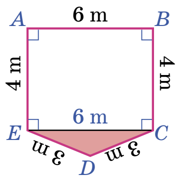


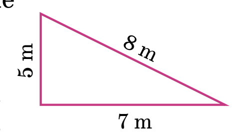
Рис. 12

А если преступник находится вне красной зоны рисунка 12, он сможет избежать поимки. Для этого первым ходом он должен оказаться вне закрашенных клеток рисунка 12 (вне «опасной зоны»). После хода машины вместе с ней сдвигается (и, быть может, поворачивается) и «опасная зона», а преступник снова из неё выходит, и т. д.

ПРОБЛЕМА С ПЕРИМЕТРОМ



Посмотрим на левый нижний рисунок условия. Кажется, что углы при верхней стороне AB прямые. Но тогда $CE = 6$ m и треугольник CDE не существует: одна его сторона равна сумме двух других.



Треугольник в правом нижнем углу условия очень похож на прямоугольный, но для него не выполняется теорема Пифагора: $5^2 + 7^2 = 74 \neq 64 = 8^2$. Если построить настоящий треугольник со сторонами 5, 7 и 8 (попробуйте!), то перепутать его с прямоугольным довольно трудно.

Всего Костя нашёл 5 неверных картинок – а сколько нашли вы?

Можно возразить, что в условии нигде и не сказано, что эти углы прямые. Но хотя говорят, что «геометрия – это искусство правильно рассуждать на неправильных чертежах», лучше, когда чертежи построены аккуратно.

САВРАСОВ, СТРАВИНСКИЙ, РЕПИН

Автор картины «Богатыри» (её ещё называют «Три богатыря») – Виктор Васнецов, а не Алексей Саврасов.

LXXXVI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Избранные задачи городского тура

1. Суммарное количество цветков у мальчиков уменьшилось на 101. Значит, суммарное количество цветков у девочек увеличилось на 101. Если учесть, что некоторое количество цветков девочки могли отдать соседним слева мальчикам, получается, что от соседних справа мальчиков девочки получили не менее 101 цветка. Но один мальчик не мог отдать более 50 цветков, значит, по крайней мере 3 мальчика передавали девочкам цветы. Таким образом, у каждой девочки сосед справа – мальчик, а тогда никакие две девочки не стоят рядом.

2. Проведём все возможные взвешивания. Тогда фальшивый ребёнок ни разу не окажется на тяжёлой чаше, а любой другой ребёнок – окажется (когда фальшивый будет на противоположной).

3. Десять неподвижных пассажирских вагонов занимают не более 20 рельсов, назовём эти рельсы *пассажирскими*. Если какой-то неподвижный грузовой вагон не занимает ни одного пассажирского рельса, то он делит рельс с другим грузовым вагоном. Пусть такого грузового вагона нет. Но всего неподвижных грузовых вагонов – 21, и тогда какие-то два занимают один и тот же пассажирский рельс.

4. Ответ: 23. Все чётные числа, кроме степеней двойки, сложные. Для чётного $n > 23$ имеем

$$n = 6 + (n - 6) = 10 + (n - 10).$$

Здесь n двумя разными способами представлено в виде суммы чётных чисел, слагаемые 6 и 10 – сложные. Если оказалось, что вторые слагаемые в этих разложениях не сложные, то $n - 6$ и $n - 10$ – степени двойки. Их разность равна 4, а степени двойки с такой разностью – только 4 и 8. Тогда $n = 14$, но у нас $n > 23$.

Для нечётного $n \geqslant 23$ рассмотрим разбиения

$$n = 15 + (n - 15) = 21 + (n - 21).$$

Здесь 15 и 21 – сложные, а $n-15$ и $n - 21$ – чётные. Если оба они степени двойки, то их разность 6, что возможно только для 2 и 8, и $n = 23$.

5. Пусть все выписанные числа простые.

Наблюдение 1. При каждой операции сумма цифр числа увеличивалась на 1 или 2. Следовательно, если очередное выписанное число давало остаток 1 при делении на 3, то на следующем шаге должна была прибавляться 1 (если прибавить 2, результат разделится на 3). Если же число давало остаток 2, то на следующем шаге должно прибавляться 2. Итак, попеременно прибавлялись единицы и двойки. Значит, за 55 операций к сумме цифр числа прибавится либо $1 + 2 + ... + 1 = 82$, либо $2 + 1 + ... + 2 = 83$.

Наблюдение 2. Оценим, на сколько максимум могла увеличиться сумма цифр числа. Первая цифра числа могла увеличиться не более чем на 8 (сначала она 1, в конце – не более 9), последняя цифра – не более чем на 2 (она не могла быть чётной или пятёркой, поэтому могла лишь вырасти от 1 к 3 или от 7 к 9), остальные цифры – не более чем на 9. Итого, сумма цифр увеличилась не более чем на $8 + 2 + 8 \cdot 9 = 82$, и это могло произойти лишь если первое число – это 1000000001 или 1000000007, а последнее – соответственно 9999999993 или 9999999997.

Из наблюдений 1 и 2 следует, что в описанном процессе мы увеличили сумму цифр числа ровно на 82, попеременно прибавляя 1 и 2, и первая и последняя операции были прибавлениями 1, а начальные и конечные числа равны указанным выше. Но 1000000001 и 1000000007 дают остаток 2 при делении на 3, и первой операцией должно быть прибавление 2.

6. Ответ: Дима. Разобьём таблицу на два прямоугольника 7×441 – верхнюю и нижнюю половины. Пусть Дима ходит так. Если есть 6 ноликов, которые можно дополнить до 7 ноликов в ряд (назовём такую комбинацию *выигрышной*), – он ставит седьмой нолик и выигрывает. Иначе повторяет ход Гоши в другой половине, так что после каждого хода Димы нолики в верхней половине при сдвиге вниз на 7 клеточек совпадают с ноликами в нижней половине.

Пусть Гоше удалось победить. Тогда после предыдущего хода Димы оказалась выигрышная комбинация из 6 ноликов. Если они расположены в одной половине, то и перед ходом Димы в другой половине была такая же комбинация, и Дима бы выиграл. Пусть эти 6 ноликов расположены в обеих половинах. Тогда они расположены вертикально в одном столбце, и никакие два из них не переходят друг в друга при совмещении половин таблицы. Значит, после хода Димы в этом столбце было 12 ноликов, а перед ходом – 11. Но если в столбце 11 ноликов, то в одной из его половин – 6 ноликов, выигрышная комбинация, и Дима бы выиграл.

Значит, Гоша не может одержать победу.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. В числовом ребусе

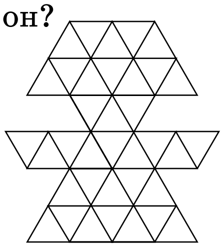
Т×О×П×О×Л×Ь=Т×Ю×Л×Ь×П×А×Н

замените буквы ненулевыми цифрами так, чтобы число ТОПОЛЬ получилось как можно бóльшим. (Одинаковые буквы заменяйте одинаковыми цифрами, разные – разными.) Не забудьте обосновать ответ.

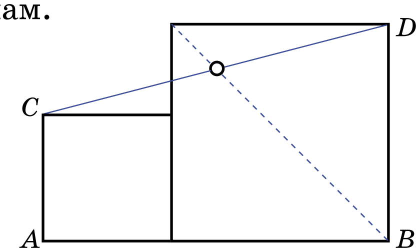
52. Расставьте на шахматной доске несколько белых и чёрных коней так, чтобы каждый белый конь бил ровно четырёх чёрных, а каждый чёрный – ровно четырёх белых.

Авторы: Александр Домашенко (51, 53), Михаил Евдокимов (52, 54), Алексей Воропаев (55)

53. Аня вырезала куклу из бумаги в треугольную сетку. Юра утверждает, что эту фигурку можно свернуть в треугольную пирамидку без просветов и наложений. Прав ли он?



54. На отрезке AB построены два различных прилегающих друг к другу квадрата (см. рисунок). Докажите, что диагональ большого квадрата делит отрезок CD пополам.



55. Петя стреляет по мишени. Табло показывает отношение числа попаданий к числу сделанных выстрелов (до начала стрельбы табло не горит). В какой-то момент число на табло было меньше чем q. Через некоторое время это число стало больше, чем q. Для каких q от 0 до 1 отсюда следует, что в какой-то момент доля попаданий была ровно q?

Художник Николай Крутиков

Прозрачный бак?

У нас на даче есть металлический бак с водой. Утром на нём бывает видно, докуда налита вода. Ещё это видно в тёплый день, когда бак только что наполнили холодной водой из колодца. Неужели бак становится прозрачным?

Автор Валерия Сирота • Фото автора

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 20007

9 772227 798206