№ 4 | апрель 2021

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 4
апрель
2021

КАК ДРЕВНИЕ ГРЕКИ ОПЕРЕДИЛИ КОПЕРНИКА

ФИГУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

ПАРАДОКС СИМПСОНА

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 4, апрель 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Е.А. Котко, Р.В. Крутовский, Г.А. Мерзон, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: kvantik@mccme.ru
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 18.03.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Протасов

КАК ДРЕВНИЕ ГРЕКИ ОПЕРЕДИЛИ КОПЕРНИКА

Окончание. Начало в № 3, 2021

ШАГ 2. ВО СКОЛЬКО РАЗ СОЛНЦЕ БОЛЬШЕ ЛУНЫ?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы понаблюдаем солнечное затмение – оно происходит, когда Луна загораживает Солнце. При *частичном* затмении Луна лишь проходит по диску Солнца, не закрывая его полностью. Порой такое затмение даже нельзя разглядеть невооружённым глазом, Солнце светит как в обычный день. Лишь сквозь сильное затемнение, например через закопчённое стекло, видно, что часть солнечного диска закрыта чёрным кругом.

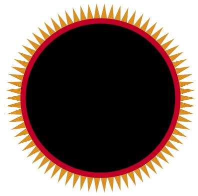


Рис. 4. Полное солнечное затмение

Гораздо реже происходит полное затмение, когда Луна на несколько минут полностью закрывает солнечный диск (рис 4). В это время становится темно, на небе появляются звёзды. Затмения наводили ужас на древних людей, считались предвестниками несчастий. Солнечное затмение наблюдается по-разному в разных частях Земли. В одном и том же месте полное затмение происходит крайне редко – в среднем раз в 200 – 300 лет. Аристарху повезло – он смог наблюдать его собственными глазами. На безоблачном небе Солнце постепенно начало тускнеть и уменьшаться в размерах, установились сумерки. На несколько мгновений Солнце исчезло. Потом проглянул первый луч света, солнечный диск стал расти, и вскоре Солнце засветило в полную силу.

Почему затмение длится столь короткое время? Потому что Луна имеет те же видимые размеры на небе, что и Солнце[3]. Что это значит? Нарисуем чертёж. Два круга – Солнце и Луна, Z – точка, из которой мы наблюдаем затмение. Так как во время затмения нам кажется, что круги совместились, то совместятся и их центры. Это значит, что центры Луны и Солнца – точки L и S – лежат на одной

[3] Равенство видимых размеров Луны и Солнца – счастливое совпадение. Оно не вытекает из законов физики. У многих планет Солнечной системы есть спутники: у Марса их два, у Юпитера – четыре крупных (и ещё несколько десятков мелких), и все они имеют разные видимые размеры, не совпадающие с размером солнечного диска.

прямой с точкой Z (рис. 5). А так как совместились не только центры, но и края кругов, то крайние точки (обозначим их A и B) тоже лежат на одной прямой с точкой Z. Снова получаем два подобных треугольника: ZAL и ZBS. Сторона ZS большого треугольника в 400 раз больше стороны ZL маленького треугольника (потому что это – расстояния до Солнца и Луны!). Значит, и сторона BS большого треугольника в 400 раз больше стороны AL маленького. Но это ведь радиусы Солнца и Луны! Таким образом, по линейным размерам **Солнце в 400 раз больше Луны**. Второй шаг сделан.

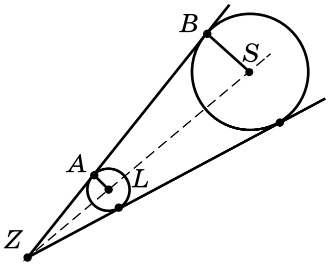


Рис. 5 . Совпадение размеров Луны и Солнца при затмении

ШАГ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ СОЛНЦА И ЛУНЫ

Понаблюдав квадратуру Луны и солнечное затмение, мы доказали, что Солнце в 400 раз больше Луны и во столько же раз дальше от нас. А каковы же их реальные размеры? Из всех астрономических величин мы с вами пока знаем только радиус Земли. Поможет ли это? Хоть в каком-то из видимых явлений, происходящих на небе, появляется Земля? Не случайно говорят «небо и земля», имея в виду две несовместные вещи. И всё же такое явление есть. Это – *лунное затмение*.

При лунном затмении Луна уходит в тень от Земли. Спрятавшись за Землю, Луна лишается солнечного света и таким образом перестаёт светить. Она не исчезает из вида полностью, но темнеет, приобретая красноватый оттенок (через атмосферу лучше всего проходят красные и оранжевые лучи). На лунном диске при этом отчётливо видна тень от Земли (рис. 6). Круглая форма тени ещё раз подтверждает шарообразность Земли. Для того чтобы определить радиус круга земной тени (мы сделаем это по рисунку 6), достаточно решить простое упражнение:

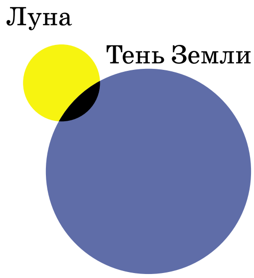


Рис. 6. Лунное затмение

Упражнение 1. На плоскости дана дуга окружности. Постройте центр этой окружности и найдите её радиус.

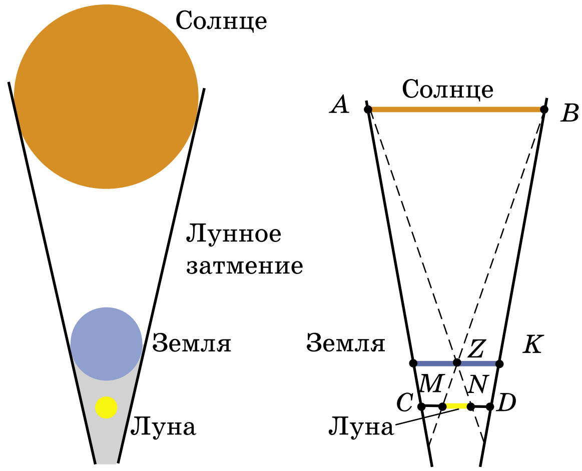


Рис. 7. Вычисление размеров Солнца и Луны

Мы получаем, что радиус земной тени примерно в $\frac{8}{3}$ раза больше радиуса Луны. Обратимся теперь к рисунку 7. Серым цветом закрашена область земной тени, в которую попадает Луна при затмении. Возьмём за единицу измерения диаметр Луны. Это отрезок MN на рисунке 7, он равен 1; CD – диаметр земной тени, он равен $\frac{8}{3}$. Значит, на отрезки CM и ND приходится $\frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$. Поэтому каждый из них равен $\frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{6}$, а отрезок MD равен $1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$. Как мы знаем, расстояние от Земли до Солнца в 400 раз больше расстояния от Земли до Луны. Это значит, что $ZB = 400ZM$. Таким образом, точка B находится очень-очень далеко, а прямые MZ и BK почти параллельны. Поэтому отрезок ZK почти равен отрезку $MD = \frac{11}{6}$. Но ZK – радиус Земли. Получается, что он в $\frac{11}{6}$ раза больше диаметра Луны, а значит, в $\frac{11}{3} \approx 3{,}66$ раза больше радиуса Луны.

А как же Солнце? Оно больше Луны в 400 раз, а значит, больше Земли в $\frac{400}{3{,}66} \approx 109$ раз. Итак, по линейным размерам **Солнце больше Земли примерно в 109 раз, Земля больше Луны в 3,66 раза.** Так как радиус Земли мы знаем, сразу можем вычислить радиусы Луны и Солнца.

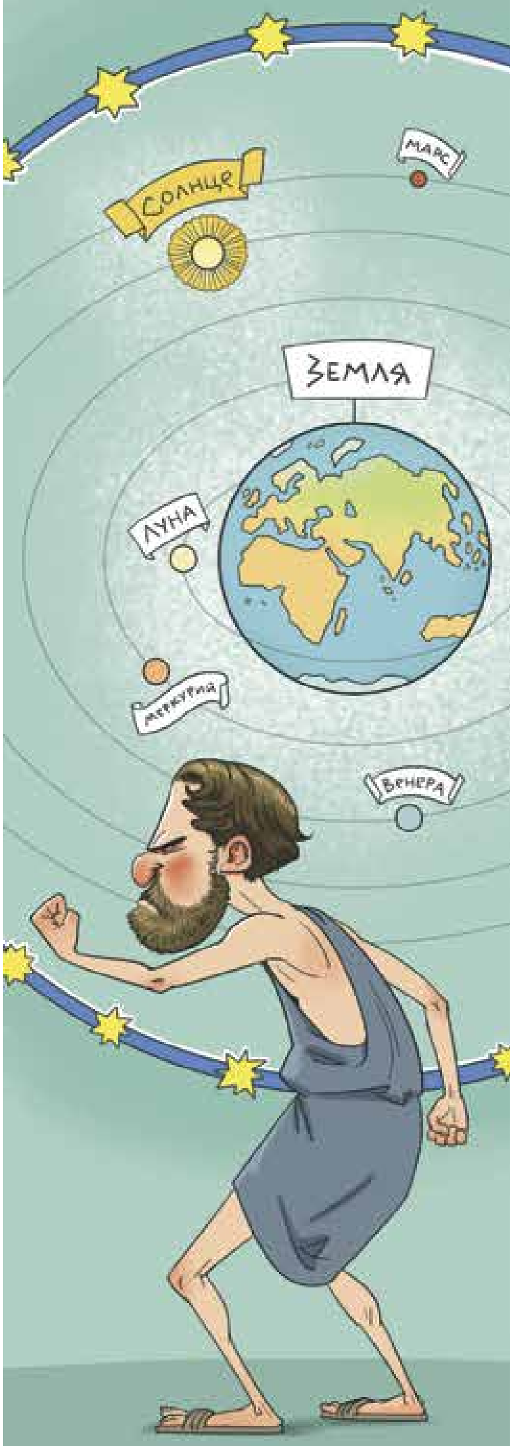
ЧТО ЖЕ В ЦЕНТРЕ – ЗЕМЛЯ ИЛИ СОЛНЦЕ?

В древности устройство нашей Вселенной представляли так: в центре – неподвижная Земля, вокруг неё по круговым орбитам вращаются 7 планет, включая Луну и Солнце (которое тоже считалось планетой). Завершается всё небесной сферой с прикреплёнными к ней звёздами. Сфера вращается вокруг Земли, делая полный оборот за 24 часа. Это – *геоцентрическая* система мира, в центре которой – Земля («гео»).

Эту модель многократно подправляли. Так, стали считать, что небесная сфера неподвижна, а Земля вращается вокруг своей оси. Затем стали исправлять траектории движения планет: круги заменили циклоидами, то есть линиями, которые описывают точки окружности при её движении по другой окружности. Во II веке н. э. модель приняла окончательный вид в знаменитом трактате «Альмагест» Клавдия Птолемея (87–165), выдающегося греческого астронома, тёзки египетских царей. Со временем некоторые циклоиды усложнялись, добавлялись всё новые окружности. Но в целом система Птолемея господствовала около полутора тысячелетий, до XVI века, до открытий Коперника.

Но если знать размеры Земли и Солнца, простая интуиция подскажет, что в центре должно находиться Солнце. Оно же больше Земли в 109 раз! Представим себе такую модель: Земля имеет размер теннисного мячика – около 6,5 см. Тогда Солнце будет иметь диаметр 7 метров! И почему же такая махина, размером с трёхэтажный дом, должна вращаться вокруг «теннисного мячика»? Может, всё наоборот?

Архимед пишет, что именно такой вывод сделал Аристарх, предложив *гелиоцентрическую* систему мира с Солнцем («гелиос») в центре. Она лучше объясняет видимое движение планет и лучше согласуется с результатами наблюдений. Да и другие учёные понимают, что новая модель проще и естественнее геоцентрической. Но тем не менее её никто не принял! Из всех астрономов античности только Селевк стал сторонником новой модели. Больше никто! Даже великий Архимед, почитавший Аристарха, не решился поставить Солнце в центр мира.



СТРАХ ПЕРЕД БЕЗДНОЙ

Почему же 18 веков учёные не принимали простой и логичной системы мира, предложенной Аристархом? И это несмотря на то, что официально признанная геоцентрическая система Птолемея часто давала сбои, не согласуясь с результатами наблюдений за планетами и звёздами. Приходилось добавлять всё новые окружности (так называемые *вложенные циклы*) для «правильного» описания движения планет. Уже к XIII веку этих окружностей накопилось 75.

Модель стала столь громоздкой, что начали раздаваться осторожные возражения: неужели мир в самом деле устроен так сложно? Широко известен случай с Альфонсом X (1221–1284), королём Кастильи и Леона, государства, занимавшего часть современной Испании. Он как-то обмолвился, что «если бы при сотворении мира Господь оказал мне честь и спросил моего совета, многое было бы устроено проще».

Но сомнения остались. Часть из них можно было бы разрешить, поставив Солнце в центр Вселенной и приняв гелиоцентрическую систему Аристарха. Его труды были хорошо известны. Однако ещё много веков никто из учёных не решался это сделать. Причины были не только в страхе перед властями и официальной церковью и не только в инертности человеческого мышления (не так-то просто признать, что наша Земля – не центр мира, а лишь рядовая планета!). Всё-таки настоящему учёному ни страх, ни стереотипы – не препятствия на пути к истине. Гелиоцентрическая система отвергалась по вполне научным причинам. Если допустить, что Земля вращается вокруг Солнца, то её траектория – окружность с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца. Это больше 150 миллионов километров. Значит, Земля в течение полугода перемещается на 300 миллионов километров. Гигантская величина! Но картина звёздного неба для земного наблюдателя при этом остаётся такой же. Земля то приближается, то удаляется от звёзд на 300 миллионов километров, но ни видимые расстояния между звёздами (например, форма созвездий), ни их яркость не меняются. Это означает, что расстояния до звёзд должны быть ещё в несколько тысяч раз больше. То есть небесная сфера должна иметь совершенно невообразимые размеры!

Вместо компактного и уютного мира, в центре которого находится Земля и который помещается внутри относительно небольшой небесной сферы, Аристарх нарисовал бездну. И эта бездна испугала всех.

Пройдёт ещё много веков, прежде чем человек сможет смириться с тем, что наш мир имеет столь огромные размеры, и примет гелиоцентрическую систему, предложенную Аристархом и обоснованную Коперником. Отсюда останется только один шаг до бесконечной Вселенной и учения Джордано Бруно о множестве миров. Но это уже другая история.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Можно ли было во времена Эратосфена синхронизировать (сделать одновременно) два измерения на расстоянии 800 км друг от друга? Хотя бы с разницей не больше 10 минут? Предложите какой-нибудь способ.

3. Как вычислить радиус Земли по следующим данным: с горы высотой 500 м просматриваются окрестности на расстоянии 80 км?

4. Как вычислить радиус Земли по следующим данным: корабль высотой 20 м, отплыв от берега на 16 км, полностью исчезает из вида? (В реальном эксперименте этот корабль может быть виден и намного дальше из-за преломления света, см. kvan.tk/bedford)

5. Солнечное затмение может наблюдаться в одних частях Земли и не наблюдаться в других. А лунное?

6. Докажите, что солнечное затмение может наблюдаться только во время новолуния, а лунное затмение – только во время полнолуния.

7. Что происходит на Луне, когда на Земле происходит лунное затмение?

8. Аристарх вычислил и расстояния до Луны и Солнца. Предложите способ, как он мог это сделать.

9. Почему не каждое новолуние сопровождается солнечным затмением? Ведь если освещённая сторона Луны нам не видна, Солнце должно располагаться за Луной, то есть Луна загородит Солнце. И почему полнолуние не всегда сопровождается лунным затмением? Ведь если нам полностью видна освещённая сторона Луны, то мы (Земля) должны располагаться между Луной и Солнцем, и на Луне должна возникать земная тень.

Художник Мария Усеинова

Математический кружок

Сергей Табачников

С 1981 по 1984 год на Всесоюзном радио ежемесячно работал математический радиокружок «Сигма». Аудиозаписи нескольких занятий можно найти в Интернете (kvan.tk/sigma). Однажды профессор Сигма и его постоянные помощники мальчик Альфа и девочка Бета пришли в гости в журнал «Квант». Мы перепечатываем рассказ об этой встрече.

У НАС В ГОСТЯХ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАДИОКРУЖОК

Сигма. Мы начнём с задачи из «Кванта» для младших школьников» (№ 1 за 1981 г.): «В Советском Союзе население составляет 260 млн человек. Казалось бы, на карте СССР с масштабом 1:1 000 000 (в одном сантиметре 10 километров) может поместиться в миллион раз меньше людей, чем на всей территории страны, то есть может поместиться 260 человек. Однако из опыта известно, что и пяти десяткам человек это будет нелегко сделать. Почему?»

Альфа. Да я эту задачу сразу решил! Ведь люди живут в многоэтажных домах, значит, на единицу земной поверхности приходится не один, а несколько человек.

Бета. А по-моему, Альфа, ты не прав. Возьмём, например, такое густонаселённое здание, как здание школы. Первого сентября все, кто находятся в этом здании, выходят во двор на линейку, посвящённую началу учебного года. Также и жители других домов могут разместиться во дворах и на улицах – им даже не будет тесно. А ещё остаются степи, пустыни, тундра!

Сигма. Бета права. Тебе, Альфа, придётся поискать другое объяснение. А пока попробуй сравнить площади квадратов со сторонами 2 и 1.

Альфа. Ну как же – площадь первого будет в четыре раза больше, чем площадь второго. И вообще, при уменьшении размеров любой фигуры в N раз её площадь уменьшается в N^2 раз. Не зря площадь измеряется в квадратных единицах!

Бета. Теперь всё ясно! Человек занимает на Земле определённую часть площади. При изображении на карте с масштабом $1:1\,000\,000$ площади всех фигур уменьшаются в $1\,000\,000^2$ раз, то есть в 10^{12} раз. Именно на это число, а не на миллион и нужно разделить население страны. При этом получится около одной четырёхтысячной части человека, и никакой парадокс не возникает.

Сигма. Очень хорошо, ребята, вы во всём разобрались. Мне остаётся лишь добавить, что при решении задачи вы воспользовались так называемыми соображениями подобия. Тема нашего занятия как раз – соображения подобия.

А теперь решим ещё одну задачу. В два одинаковых заполненных водой ведра засыпают дробь: в первое ведро крупную, а во второе – мелкую. В каждое ведро насыпают столько дроби, сколько помещается. Из какого ведра выльется больше воды?

Альфа. Ну конечно, из второго, в него насыпают мелкую дробь!

Бета. Ну и что?

Альфа. Раз дробь мелкая, то и промежутки между отдельными дробинками будут маленькими. Поэтому мелкая дробь уляжется плотнее.

Бета. Хотя промежутки между крупными дробинками и большие, зато самих промежутков будет меньше. Так что ещё неизвестно, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная.

Сигма. Действительно, надо выяснить, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная. Давайте для простоты предположим, что отношение диаметров дробинок равно двум. Теперь посмотрим на ведро с мелкой дробью в бинокль с двукратным увеличением. Что мы увидим?

Альфа. Мы увидим ведро, заполненное крупной дробью. При двукратном увеличении и объём ведра, и объём каждой дробинки увеличится в 8 раз ($8 = 2^3$), а их отношение останется неизменным. Значит, плотность мелкой и крупной дроби будет одинаковой.

Бета. Получается, что из вёдер вытечет одинаковое количество воды. Вот никогда бы не подумала!

Сигма. Тем не менее, это правильный ответ. И получить его нам помогли соображения подобия. Хочу только внести небольшое уточнение: наш ответ верен, если размеры дробинок намного меньше размеров ведра. Если же дробинки крупные (или ведро совсем маленькое), то наши рассуждения теряют силу. Причина в том, что мы пренебрегли нарушением правильного расположения дробинок вблизи стенок ведра. А если дробинки большие, то влиянием стенок ведра пренебречь уже нельзя.

Бета. Профессор Сигма, а какие ещё задачи можно решать с помощью соображений подобия?

Сигма. Соображения подобия оказались очень полезными в биологии. А впервые их применил к изучению строения животных великий итальян-

ский учёный XVI века Галилео Галилей. Его занимал вопрос, как могло бы выглядеть очень крупное сухопутное животное, например гигантская собака. В одной из книг Галилея можно даже найти рисунки костей такой воображаемой собаки.

Альфа. А о чём здесь думать? Увеличить скелет обычной собаки раз в десять – и всё!

Сигма. Нет, всё не так просто. Прочность костей пропорциональна площади их поперечного сечения. При увеличении размеров в 10 раз эта площадь увеличится в 100 ($=10^2$) раз. Значит, кости гигантской собаки смогут выдержать стократную нагрузку. Но в том-то и дело, что нагрузка возрастёт не в 100, а в тысячу раз. Ведь нагрузка пропорциональна массе животного, то есть его объёму. Объём же увеличится в 1000 ($=10^3$) раз. Вот и получается, что гигантская собака не сможет выдержать собственный вес.

Бета. Но ведь живут же на Земле очень крупные животные: слоны, носороги...

Сигма. Да, но ноги у них относительно толще, чем у мелких животных. А вот киты и вовсе не смогли бы жить на суше[1].

Альфа. Я читаю сейчас «Путешествие Гулливера». Гулливер попадает в страну лилипутов, которые в 12 раз меньше него, и в страну великанов, которые больше него тоже в 12 раз. Что же, Джонатан Свифт не учёл того, что было известно уже Галилею?

Сигма. Автор «Путешествия Гулливера» старался пользоваться соображениями подобия. Например, описывая обед Гулливера или пошив его костюма. В других местах, однако, Свифт не обошёлся без ошибок – как в истории с яблоком, попавшим в Гулливера в стране великанов.

Бета. А я это всё знаю – прочитала в «Кванте» в статье «Из книг Я. И. Перельмана»[2].

Альфа. Профессор Сигма, а почему муравьи могут переносить тяжести во много раз больше собственного веса, а человек не может?

Сигма. Известно, что сила мышц определяется только площадью их поперечного сечения и не зави-

[1] См. статью Н. Родиной «Архимедова сила и киты», «Квант», 1982, № 8.
[2] «Квант», 1982, № 11.

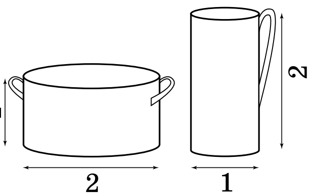
сит от их длины. Площадь же пропорциональна квадрату линейных размеров, а вес – кубу. Значит, на единицу веса у муравья приходится бóльшая сила, чем у человека и тем более чем у слона. Этим же соотношением между площадью и объёмом объясняется то, что муравьи не могли бы быть теплокровными.

Бета. Почему?

Сигма. Количество тепла, вырабатываемого в организме, пропорционально объёму тела. А вот количество тепла, излучаемого в окружающее пространство, пропорционально площади поверхности – ведь теплообмен происходит через кожу. Как мы видели, на единицу объёма у маленьких животных приходится бóльшая площадь поверхности, чем у крупных. Поэтому маленьким животным труднее бороться с холодом[3].

Бета. Теперь понятно, почему у маленьких синиц перья длиннее ширины тела, а у больших ворон – короче. Синицам нужна шуба теплее – ведь они намного меньше.

Сигма. А теперь задачи для самостоятельного решения.



1. В какую кастрюлю можно налить больше воды?

2. После семи стирок кусок мыла уменьшился вдвое, то есть вдвое уменьшились его длина, ширина и высота. На сколько ещё стирок его хватит?

3. Килограмм какой картошки быстрее чистить и почему: мелкой или крупной?

4. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?

5. По одной гипотезе, гигантские динозавры предпочитали проводить время, стоя в неглубоких водоёмах. Почему?

6. Животным пустыни приходится иногда долго не пить. Какое животное может не пить дольше – крупное или мелкое?

7. Почему человек ест три раза в день, а, например, хомячки жуют почти постоянно?

И, наконец, два вопроса посложнее:

8. Как зависит от размеров животного высота его прыжка?

(Ответ: зависит не очень сильно.)

9. Объясните, почему для мелких дробинок нарушение их правильного расположения вдоль стенок мало влияет на отношение объёмов дробинок и ведра.

[3] Соответствующий расчёт можно посмотреть в «Кванте», 1981, № 4, с.11.

Художник Алексей Вайнер

Амелия Алаева

Парадокс Симпсона

В классной комнате на переменах всегда стоял шум и гам. Поэтому Лена, пропустив несколько дней по болезни, почувствовала себя не в своей тарелке, когда перед уроком истории в классе воцарилась мёртвая тишина. Все её одноклассники, словно сговорившись, не отрывали глаз от учебника, хотя никакой контрольной не намечалось. Вдруг её кто-то слегка толкнул: «Лена, ты хорошо помнишь то правило? Может, повторишь ещё раз?» Соседка по парте Маша протягивала ей свой учебник.

– Да, я дома учила, – твёрдо заявила девочка. – А чего это все сегодня такие странные?

– Как? Ты не знаешь? – удивилась Маша. – Пока тебя не было, директор решил в честь 800-летия со дня рождения Александра Невского устроить конкурс и вручить призы лучшим классам в каждой параллели!

– А что делать-то, собственно, нужно?

– Ничего сложного: просто получать четвёрки и пятёрки по истории и математике. Завуч найдёт долю хороших оценок по этим предметам, и у кого она выше – тот и победил.

Целую неделю все ребята усердно трудились – учителя не переставали удивляться, какие замечательные дети у них учатся. И вот настало время подвести итоги. Почти в каждом классе есть такой всезнайка, который всё уже сам раньше всех подсчитал и решил. Знакомьтесь – Витя из 7-го «Б», одноклассник Маши, уверенно заявил, что их класс победил. Но таблица результатов, которую составил завуч, показывала другое:

	МАТЕМАТИКА		ИСТОРИЯ	
	7«А»	7«Б»	7«А»	7«Б»
Хорошие оценки	15	9	18	27
Плохие оценки	18	12	9	15
Доля хороших оценок	0,45	0,43	0,67	0,64

– Стойте! – подал голос мальчик. – В моей таблице столько же хороших и плохих оценок, но я объединил результаты двух предметов вместе, и доли получились другие:

	7«А»	7«Б»
Хорошие оценки	33	36
Плохие оценки	27	27
Доля хороших оценок	0,55	0,57

Это что же выходит: и «А», и «Б» победили одновременно? Ведь данные, по которым составлены таблицы, одни и те же, а результаты разные. Поскольку в правилах конкурса не было явно указано, считаются доли хороших оценок отдельно по предметам или все вместе, завуч решил отложить награждение и посоветоваться с директором.

Маша, уверенная в правоте своего класса, времени даром терять не хотела. Она этим же вечером зашла в гости к своему старому другу – профессору Ивану Петровичу. Пусть он с научной точки зрения объяснит, кто здесь прав.

– Интереснейший случай! – воскликнул профессор. – Кто бы знал, что ты обратишь внимание на возникший здесь парадокс Симпсона!

– Кого-кого? Симпсона? Это из мультика, что ли?

– Да нет, парадокс носит имя вполне реального учёного Эдварда Симпсона. Говоря в общих словах, это когда в каждой группе выполняется одно соотношение между данными, а в объединении групп – противоположное. Давай посмотрим, как это произошло на твоём примере.

Мы сравниваем долю хороших оценок (результаты в подгруппах) для классов 7«А» и 7«Б» отдельно по математике и истории (подгруппы данных). Они явно указывают на лидерство 7«А». Но когда мы объединили результаты обоих предметов вместе, то увидели, что на самом деле общая доля хороших оценок больше у твоего класса. Любопытно заметить, как работает наша интуиция. Мы думаем, что «победа» в каждой группе всегда означает и «победу» в целом, но увы, это не так.

По Машиному выражению лица было видно, что за всё это время она только успела запутаться в словах, но к разгадке этой тайны так и не приблизилась.

– Давай приведу ещё один пример. Представь себе, что на упаковке лекарства, которое лечит от болезни Y, написано: «Рекомендовано для мужчин при заболевании Y, рекомендовано для женщин при заболевании Y. Противопоказание: не рекомендовано для людей при заболевании Y».

– Да не может такого быть! – засмеялась Маша. – Вы, наверное, шутите. Ведь мужчины и женщины – это и есть люди!

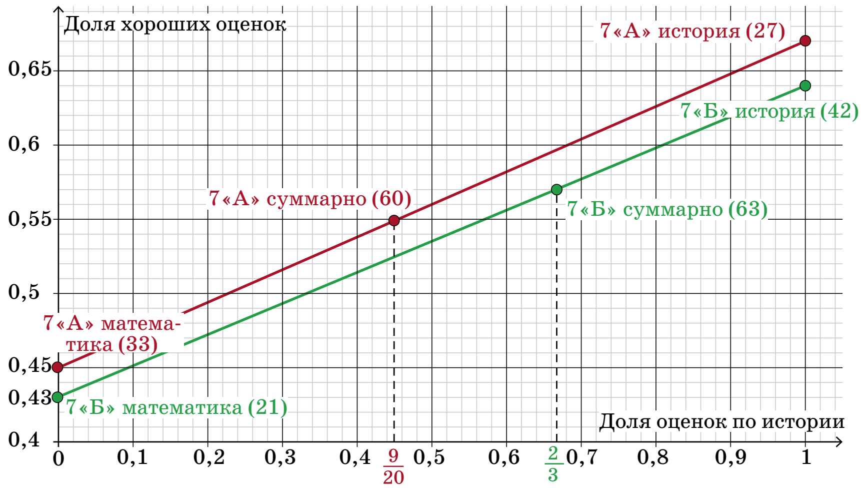
– Я и не утверждаю, что такое было в реальности написано. Но могло быть написано и было бы сущей правдой. Правда не всегда серьёзна. Иногда она курьёзна и... парадоксальна, – хитро прищурился профессор. – Всё дело в результатах исследований. Испытуемых мужчин разделили на две группы. Одним давали плацебо (пустышку), а другим лекарство. То же самое провели с группой женщин, и оказалось, что доля выздоровевших от Y больше среди тех, кто принимал лекарство. Однако если не делить людей на группы, то окажется, что среди тех, кто принимал плацебо, доля излечившихся людей больше. Вот тебе и парадокс! И думай теперь, работает ли лекарство...

– А наоборот может быть? Ну, скажем, лекарство от Z показано всем людям, но не рекомендовано для мужчин и женщин.

– Да, такое тоже возможно. При проведении исследований очень важно замечать такие «перевёртыши». Дело в том, что у 7«А» больше оценок по математике (33), чем по истории (27), и итоговая доля хороших оценок складывается из долей по предметам с бóльшим весом математики (11/20 против 9/20):

$$0{,}55=\frac{15+18}{33+27}\approx\frac{0{,}45\cdot 33+0{,}67\cdot 27}{60}=0{,}45\cdot\frac{11}{20}+0{,}67\cdot\frac{9}{20}.$$

А у 7«Б» наоборот, оценок по истории (42) вдвое больше, чем по математике, поэтому в итоговой доле хороших оценок будет с бóльшим весом участвовать история (2/3 против 1/3):



В скобках указано суммарное количество хороших и плохих оценок этого класса

$$0{,}57 \approx \frac{9+27}{21+42} \approx \frac{0{,}43 \cdot 21 + 0{,}64 \cdot 42}{63} = 0{,}43 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}64 \cdot \frac{2}{3}.$$

В такой ситуации говорят, что выборки оценок для 7«А» и 7«Б» не репрезентативны.

– Вот чудеса! А как вы думаете, кто всё-таки победил? – подозрительно посмотрела на профессора Маша.

– Чтобы устранить парадокс, сделаем веса предметов одинаковыми для каждого класса. Например, можем взять веса предметов для 7«Б» такими же, как для 7«А», тогда общая доля хороших оценок для 7«Б» станет $0{,}43 \cdot \frac{11}{20} + 0{,}64 \cdot \frac{9}{20} \approx 0{,}52$, и 7«А» победит. На самом деле, 7«А» победит и для любого другого соотношения предметов – ведь на графике линия для 7«А» всюду выше, чем для 7«Б».

– Эх, получается, призы достанутся 7«А»...

На следующий день Маша рассказала о парадоксе сначала завучу, а потом и самому директору, который похвалил её за честность (она упомянула и про победу их соперников). Но самым приятным оказалось то, что школа закупила призов «с запасом», поэтому было принято единогласное решение наградить и 7«А», и 7«Б» класс. Домой Маша вернулась с действительно хорошим подарком: увлекательной книгой.

Художник Мария Усеинова

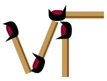
Игорь Акулич

СНОВА СПИЧКИ

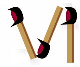
Человечество создало огромное количество задач со спичками. В последние годы их поток ослаб, ведь спички в быту всё чаще вытесняются более удобными средствами (газовыми зажигалками и пр.). Но сей предмет рано списывать со счетов, тем более что многие известные спичечные головоломки допускают возможность «расширения» – дополнительные решения, «шевеление» условия и т.д. Убедимся в этом.

1. Вот задача из книги Ф. Ф. Нагибина «Математическая шкатулка»[1]:

Из четырёх спичек сложено число 7. Переложите одну спичку, чтобы получилось число 1.

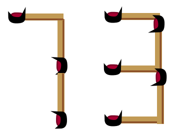


Автор поступил весьма остроумно: переложил самую правую спичку горизонтально над предыдущей, чтобы образовался знак квадратного корня. Так как $\sqrt{1} = 1$, то всё в порядке.



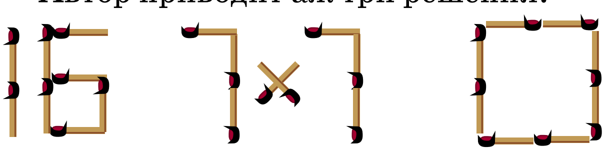
Теперь попробуйте решить ту же задачу, если исходное число «укоротить» на одну спичку.

2. А это задача С.В. Костина – из раздела «КМШ» журнала «Квант»[2]:



Из спичек сложено число 73. Переложите две спички так, чтобы получился квадрат.

Автор приводит аж три решения:



В первых двух термин «квадрат» интерпретируется как квадрат целого числа ($16 = 4^2$; $7 \times 7 = 7^2$), а в третьем – как геометрическая фигура.

Найдите ещё одно решение, чтобы суммарное количество переложенных спичек равнялось двум.

[1] Москва, Учпедгиз, 1958, задача № 109.

[2] № 12 за 2017 г., с.22.

Художник Елена Цветаева

Валерия Сирота

«Классики»

Сейчас в «классики» прыгают не так уж часто. И в основном малыши, которым бабушки заботливо расчерчивают мелком клетки. А раньше прыгали все, и асфальт во дворах был разрисован прямоугольниками. Прыгали просто так и с «битком» – баночкой из-под гуталина, – или хотя бы с камушком. «Классы» были разные – был вариант 2×4 клетки, куда вписывались подряд цифры от 1 до 4 в одну сторону, от 5 до 8 – в обратную. Трудность тогда была в том, что на втором кону надо было начинать сразу с двойки, минуя единицу; на третьем – с тройки и т.д. А были «классики» $3 \times 3 + 1$, где в квадрат 3×3 вписывались цифры от 1 до 9 в каком-то сложном порядке, так что с единицы на двойку, например, надо было прыгать назад, с двойки на тройку – очень далеко... Число 10 писали в отдельную клетку, за квадратом.

Но я уже не помню, в каком порядке вписывались цифры. К тому же не было в этой системе последовательного усложнения – короткие и длинные прыжки чередовались. Так что давайте лучше придумаем свои «классики».

1. Дано клетчатое поле 3×3. Впишите в клетки числа для «классиков» так, чтобы каждый следующий прыжок был длиннее предыдущего. (Некоторые клетки могут остаться пустыми.) Постарайтесь сделать как можно больше прыжков, то есть «занять» максимально возможное число клеток. Начинаем с клетки 1. Сколько прыжков получилось? Можете ли вы доказать, что это – максимум?

2. То же самое – в поле 4×4.

3. И то же самое – в кубе $3 \times 3 \times 3$.

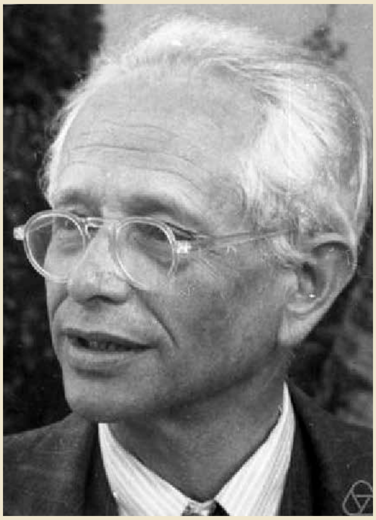
4. А сколько прыжков можно сделать в прямоугольнике 5×2? Не забудьте доказать, что больше нельзя!

Художник Ольга Демидова

МАКС ДЕН

Сергей Львовский

В популярных статьях о математиках XX века рассказать об их научных достижениях обычно невозможно, приходится отделываться общими словами. Герой этой статьи составляет исключение: об одной из его теорем мы кое-что расскажем.



Макс Ден
1878 – 1952
Фото: Konrad Jacobs, Oberwolfach Photo Collection

КАРЬЕРА В ГЕРМАНИИ

Макс Вильгельм Ден родился в Гамбурге в 1878 году в семье врача. Окончив гимназию, он поступил во Фрайбургский университет, но затем перевёлся в университет города Гёттингена – в то время ведущий математический центр мира. В Гёттингене научным руководителем Дена стал великий математик Давид Гильберт. Под его руководством Ден защитил диссертацию о неевклидовых геометриях. Вскоре после этого Ден сделал ту самую работу, о которой мы расскажем подробнее, а затем занялся топологией – новым в то время разделом математики – и получил в этой науке много важных результатов. Он продолжал заниматься математикой в Германии даже после того, как нацисты уволили его из университета за еврейское происхождение, и в 1938 году опубликовал (за границей – в Швеции) одну из основополагающих топологических работ. Да и самая последняя статья Дена, вышедшая в 1950 году, когда он уже жил в Америке, также посвящена его любимой маломерной топологии.

ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

В августе 1900 года в Париже на Втором международном математическом конгрессе Гильберт сформулировал список из 23 задач, решение которых, по его мнению, особенно важно для развития математики в наступающем XX веке. Десятка полтора из этих проблем сейчас решены; первой поддалась «третья проблема», и решил её именно Макс Ден.

Чтобы понять, в чём эта проблема заключалась, вспомним, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. Доказать это можно «методом разрезания и складывания»: например, остроугольный треугольник с основанием a и высотой h разрезается на части, из которых складывается прямоугольник с основанием a и высотой $h/2$ (рис. 1). Как говорят, остроугольный треугольник с основанием a и высотой h и прямоугольник со сторонами a и $h/2$ *равносоставлены*: один из них можно разрезать на части, из которых можно сложить другой.

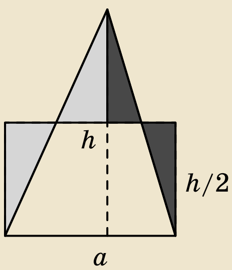


Рис. 1

Имеется аналогичное утверждение и для объёмов: объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту. Но ни в одном учебнике не рассказывается, на какие части надо разрезать пирамиду с площадью основания P и высотой h, чтобы потом сложить из них параллелепипед или призму с площадью основания P и высотой $h/3$ – формулы для объёма пирамиды доказываются совсем иначе.

Вот, например, как это сделано в классическом школьном учебнике геометрии А. П. Киселёва.

Для простоты найдём объём треугольной пирамиды $SABC$, у которой ребро SB перпендикулярно основанию ABC (у Киселёва рассмотрен и общий случай). Пусть площадь основания – треугольника ABC – равна P, а длина ребра SB – высоты пирамиды – равна h. Достроим нашу пирамиду до призмы $ABCESD$ с площадью основания P и высотой h (рис. 2). Эта призма разбивается на три треугольные пирамиды: нашу исходную $SABC$, плюс ещё пирамиды $CDES$ и $CAES$. Если удастся доказать, что объёмы этих трёх пирамид равны, мы получим, что объём пирамиды $SABC$ равен трети объёма призмы $ABCESD$, то есть $Ph/3$. Но как установить равенство этих трёх объёмов, ведь три пирамиды, на которые разбита призма $ABCESD$, не обязательно будут равными фигурами? Это делается с помощью следующей леммы.

Лемма. *Если у двух пирамид равны и площади оснований, и высóты, то и объёмы этих пирамид равны.*

Из леммы искомое равенство объёмов выводится легко. В самом деле, объёмы пирамид $SABC$ и $CDES$ равны, потому что у них совпадают и площади оснований (треугольников ABC и DSE), и длины высот (отрезков SB и CD), а у пирамид $CDES$ и $CAES$ объёмы тоже равны: если рассмотреть их как треугольные пирамиды с вершиной S, то высота у них будет общей, а основания (треугольники CDE и EAC) имеют, очевидно, равную площадь.

Давид Гильберт
1862–1943

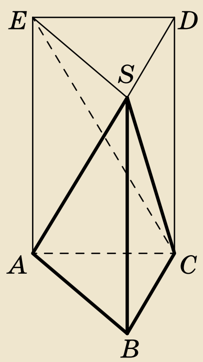


Рис. 2

Остаётся, стало быть, доказать лемму – но тут и начинаются настоящие трудности! Сделать из одной пирамиды другую с помощью разрезания и складывания у авторов учебников никак не получалось, так что приходилось проводить рассуждения, выходящие за рамки «чистой геометрии» и использующие такое математическое понятие, как *предел*.

Когда Давид Гильберт в самом конце XIX века занялся вопросами логического построения геометрии, он в числе прочего поставил вопрос, насколько можно в геометрии обойтись без таких «негеометрических» рассуждений. Ему это удалось при построении теории площадей многоугольников, но с объёмами многогранников ничего не получалось; в результате у Гильберта (как полувеком ранее у другого великого математика, К. Ф. Гаусса) возникло подозрение, что «чисто геометрическое» построение стереометрии и вовсе невозможно. Свою третью проблему Гильберт формулирует так.

Существуют ли такие две треугольные пирамиды с равными высотами и одинаковой площадью основания, что первую из них невозможно разбить на конечное число многогранников, из которых можно сложить вторую?

Мы бы сегодня сказали: если есть две пирамиды, одинаковые по площади основания и по высоте, могут ли они быть неравносоставленными? Иными словами: можно ли доказать с помощью разрезаний и складываний нашу лемму?

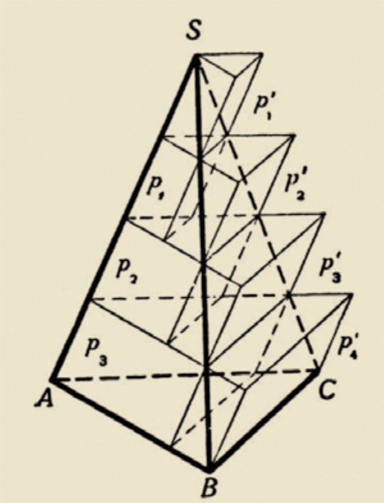
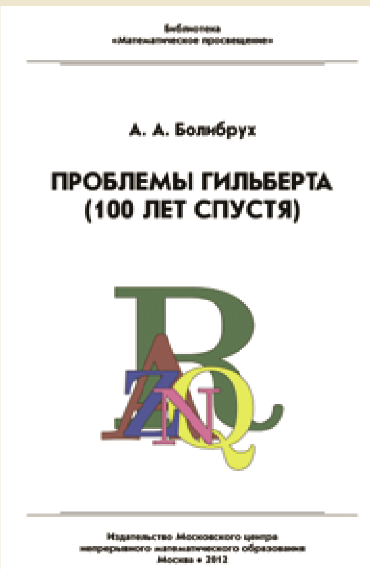


Чертёж к традиционному доказательству леммы: обе пирамиды приближают (изнутри и снаружи) объединениями треугольных призм, а затем переходят к пределу при высотах призм, стремящихся к нулю



Библиотека
«Математическое просвещение»

А. А. Болибрух

ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА
(100 ЛЕТ СПУСТЯ)

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012

На самом деле Гильберт хотел большего: он предлагал найти пример двух пирамид с одинаковыми площадями оснований и высотами, которые не только не были бы равносоставленными, но не были бы ещё и «равнодополняемыми». Два многогранника называются *равнодополняемыми*, если к каждому из них можно добавить конечное число одних и тех же многогранников (поворачивая их как угодно) так, чтобы получающиеся бо́льшие многогранники стали равносоставленными. Ясно, что объёмы равнодополняемых фигур совпадают, и если бы две пирамиды, о которых идёт речь в лемме, оказались равнодополняемыми, мы получили бы её чисто геометрическое доказательство.

ЧТО СДЕЛАЛ ДЕН

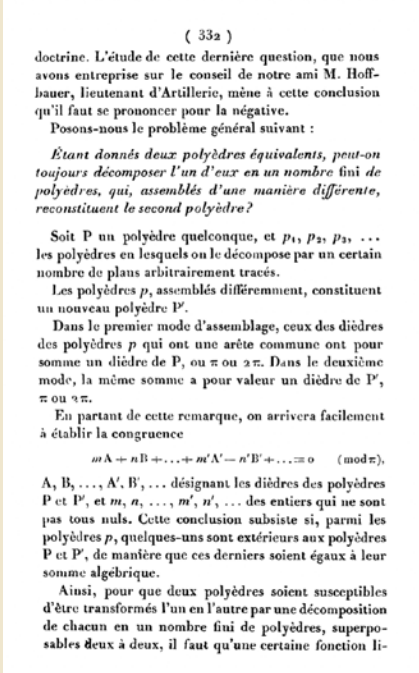
Доклад Гильберта с перечнем проблем был опубликован в третьем номере «Докладов Гёттингенского королевского научного общества» за 1900 год. И в тот же самый номер этого журнала вошла статья Дена «О равносоставленных многогранниках», в которой приводился пример двух неравносоставленных треугольных пирамид с одинаковыми площадью основания и высотой. Решение проблемы увидело свет одновременно с её формулировкой!

Впрочем, оставалась ещё возможность, что пирамиды, неравносоставленность которых установил Ден, всё же равнодополняемы. Однако в следующем 1901 году Ден доказал, что существуют треугольные пирамиды с равными площадями оснований и высотами, не являющиеся ни равносоставленными, ни равнодополняемыми. Вот теперь можно было точно сказать, что третья проблема Гильберта решена, а чисто геометрически вывести формулу для объёма пирамиды невозможно! Кстати, в учебнике Киселёва (в издании 1914 года) упоминаются работы Дена и говорится, какое отношение они имеют к преподаванию геометрии.

Скажем о результатах Дена чуть подробнее. В работе 1900 года он доказывает вот что. Пусть P и Q – два многогранника. Если у многогранника P всего n рёбер, обозначим величины двугранных углов при этих рёбрах через α_1, α_2, ... , α_n. Аналогично, величины двугранных углов при рёбрах многогранника Q обозначим через β_1, β_2, ... , β_m.

Необходимое условие равносоставленности. *Если в этих условиях многогранники P и Q равносоставлены, то найдутся такие натуральные числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ и $q_1, q_2, \dots, q_m$, что суммы $p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\dots+p_n\alpha_n$ и $q_1\beta_1+q_2\beta_2+\dots+q_m\beta_m$ различаются на рациональное число градусов.*

Вот как из этого условия можно вывести, что правильный тетраэдр неравносоставлен ни с каким прямоугольным параллелепипедом. Все двугранные углы при двенадцати рёбрах прямоугольного параллелепипеда – прямые,



(332)

doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini *de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?*

Soit P un polyèdre quelconque, et p_1, p_2, p_3, ... les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P′.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P′, π ou 2π.

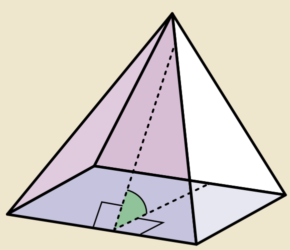
En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \dots + m'A' - n'B' + \dots \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\pi),$$

A, B, ..., A′, B′, ... désignant les dièdres des polyèdres P et P′, et m, n, ..., m', n', ... des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P′, de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction li-

Страница из работы Р. Брикара 1896 года с почти той же формулировкой необходимого условия равносоставленности, которая появится в статье Дена 1900 года. Вместо доказательства своего утверждения Брикар ограничивается словами «легко видеть, что». Вероятно, в опущенном Брикаром доказательстве имелась ошибка.

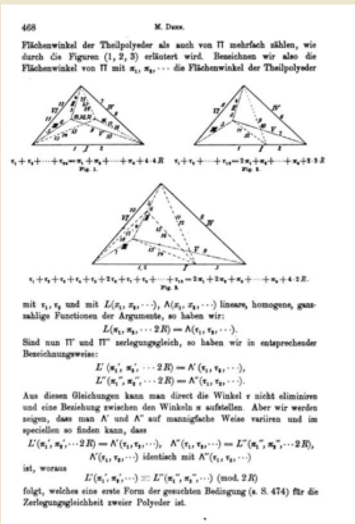


Двугранный угол – угол между гранями

так что при любых натуральных числах q_1, q_2, ..., q_{12} сумма $q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \ldots + q_{12}\beta_{12}$ кратна 90° и тем самым выражается рациональным (и даже целым) числом градусов. С другой стороны, двугранные углы при всех шести рёбрах правильного тетраэдра равны одному и тому же углу (обозначим его α), так что сумма $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_6\alpha_6$ равна $k\alpha$ для некоторого натурального k. Значит, если правильный тетраэдр и параллелепипед равносоставлены, то угол $k\alpha$, а значит и угол α, выражается рациональным числом градусов. Можно проверить, что для данного угла α это не так, и получаем противоречие.

Формулировку и доказательство результата Дена 1901 года можно посмотреть в книге С. Л. Табачникова и Д. Б. Фукса «Математический дивертисмент» (лекция 22).

Книга «Математический дивертисмент» (МЦНМО, 2016)



468 M. Dehn.

Flächenwinkel der Theilpolyeder als auch von Π mehrfach zählen, wie durch die Figuren (1, 2, 3) erläutert wird. Bezeichnen wir also die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$ die Flächenwinkel der Theilpolyeder

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

mit τ_1, τ_2 und mit $L(\pi_1, \pi_2, \cdots)$, $\Lambda(\pi_1, \pi_2, \cdots)$ lineare, homogene, ganzzahlige Functionen der Argumente, so haben wir:

$$L(\pi_1, \pi_2, \cdots 2R) = \Lambda(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Sind nun Π' und Π'' zerlegungsgleich, so haben wir in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots),$$
$$L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R) = \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Aus diesen Gleichungen kann man direct die Winkel τ nicht eliminiren und eine Beziehung zwischen den Winkeln π aufstellen. Aber wir werden zeigen, dass man Λ' und Λ'' auf mannigfache Weise variiren und im speciellen so finden kann, dass

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots), \quad \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots) = L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R),$$
$$\Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots) \text{ identisch mit } \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots)$$

ist, woraus

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots) \equiv L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots) \pmod{2R}$$

folgt, welches eine erste Form der gesuchten Bedingung (s. S. 474) für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder ist.

Страница из работы Дена

ПОД КОНЕЦ ЖИЗНИ

Большинству математиков, имевших несчастье в 30-е годы прошедшего века оказаться в Центральной Европе и вообще на территории, оккупированной Германией в ходе Второй мировой войны, прожить спокойную жизнь не довелось: кто не успел вовремя эмигрировать, тот погиб или, в лучшем случае, пережил очень тяжёлое время. Георг Пик[1], Отто Блюменталь и Альфред Таубер погибли в нацистских концлагерях, куда они были заключены просто за своё еврейское происхождение. Фридриха Хартогса и Феликса Хаусдорфа нацистские преследования (за ту же «вину») довели до самоубийства. Юлиуш Шаудер и Станислав Сакс были казнены за участие в польском антинацистском сопротивлении. Гуго Штейнгауз с 1941 по 1945 год был вынужден скрываться под чужим именем. Стефан Банах в годы немецкой оккупации вместо работы по специальности стал объектом бесчеловечных медицинских экспериментов...

Дену повезло больше: он успел уехать в последний момент перед тем, как началось самое страшное. В начале 1939 года он переехал из Германии в Норвегию, нашёл там работу, а когда Норвегию оккупировали

[1] См. статью Г. Мерзона «Площади многоугольников и тающий лёд» о формуле Пика в «Квантике» № 9 за 2018 год.

нацисты, уехал в США, для чего ему пришлось проехать больше чем полмира: сначала пересечь СССР по Транссибирской магистрали, затем из Владивостока по морю перебраться в Японию и, наконец, из Японии на корабле через Тихий океан – в США.

На свою новую родину Макс Ден с супругой прибыли в самом начале 1941 года. Первые годы ему жилось непросто: приходилось за маленькую зарплату учить слабых студентов то в одном, то в другом университете низкого уровня. Но в 1945 году Дену улыбнулась удача: его приняли на работу в Блэк-Маунтин-колледж в штате Северная Каролина. Это было очень своеобразное учебное заведение, основанное в 1933 году как независимый университет, похожий по устройству на коммуну. Все управленческие решения в колледже принимались на общем собрании студентов и преподавателей. Студенты и преподаватели постоянно жили на кампусе среди леса; они питались в общих столовых, а еда для этих столовых выращивалась на университетской ферме, где полевыми работами занимались (наряду с учёбой и преподаванием) опять-таки преподаватели и студенты.

У Блэк-Маунтин-колледжа не было аккредитации (так что он не выдавал официальных дипломов), ему вечно не хватало средств, и Дену платили очень мало, но он, похоже, был на этой работе счастлив. Ден преподавал студентам не только математику, но ещё философию, латынь и греческий, ходил с ними в походы, занимался, как сейчас бы сказали, экологией (боролся против вырубки окрестных лесов)... В 1952 году Макс Ден вышел на пенсию. Предполагалось, что он продолжит жить на кампусе и будет исполнять обязанности консультанта, но уже в следующем месяце он умер от сердечного приступа. Похоронили Дена в том же лесу, в котором был расположен университетский кампус.

Имя Макса Дена осталось в науке: по сей день в топологии важную роль играют «скручивание Дена» и «хирургия Дена».

Русский перевод книги Гильберта, в которой он изложил свои исследования по аксиоматическому построению геометрии. С этими исследованиями связаны и тема диссертации Дена, и его статьи о равносоставленности многогранников.

Кампус Блэк-Маунтин-колледжа

Александр Перепечко

КВАНТИК, НОУТИК *и фигурные* ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

– Квантик, да здесь целый склад фигурных преобразователей!

– Давай опробуем их в действии!

Вот так Квантик и Ноутик, забравшись на заброшенный чердак, принялись исследовать диковинные устройства – фигурные преобразователи.

– Смотри, Квантик, этот – самый простой. Если ему дать треугольник ABC, он разделит его стороны в отношении 1:1, то есть пополам, и выдаст новый треугольник с вершинами в полученных точках (рис. 1).

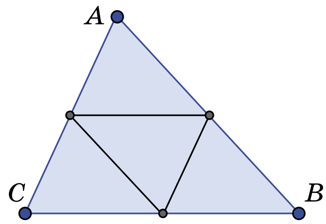


Рис. 1

– Ага, новый треугольник будет такой же, как прежний, но в 4 раза меньше по площади. – Квантик уже скормил преобразователю треугольник и показал Ноутику, как исходный треугольник складывается из четырёх копий полученного. – Видишь, стороны нового треугольника – это средние линии исходного, то есть они соединяют середины его сторон.

– Так-так… средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне, – припомнил Ноутик, – и в два раза короче её!

– И поэтому новый треугольник имеет такие же углы, но в два раза меньшие стороны.

– Ну да… – немного разочарованно протянул Ноутик и перешёл к следующему. – А вот преобразователь поинтересней! Он делит стороны треугольника уже в отношении 1:2 (рис. 2).

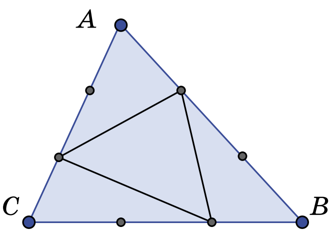


Рис. 2

– Да, здесь треугольник делится уже не на одинаковые части. Но у нового треугольника площадь меньше ровно в три раза!

И Квантик пустился в пространные объяснения. Полчаса спустя Ноутик всё же понял ключевое утверждение Квантика: если два треугольника имеют общий угол, то их площади соотносятся так же, как произведения прилегающих к этому углу сторон.

Задача. Докажите утверждение Квантика, используя такой факт: отношение площадей треугольников ABC и ABC', где C' лежит на AC (рис. 3), равно отношению AC к AC'.

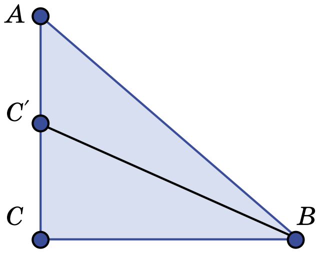


Рис. 3

– Ага, – наконец просветлел Ноутик. – При преобразовании от ABC отрезали три угловых треугольника, каждый площадью $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ площади ABC, суммарно – $\frac{6}{9}$, и остался огрызок как раз в $\frac{1}{3}$ площади ABC. Интересно, а полученный треугольник будет с такими же углами, как и ABC?

– Наверное, не всегда, – предположил Квантик. – Ладно, пошли вон к тем, совсем заковыристым преобразователям. Им нужно давать четырёхугольники!

– О, вот этот опять делит стороны пополам. Получается четырёхугольник, совсем не похожий на исходный (рис. 4). А какая у него площадь?

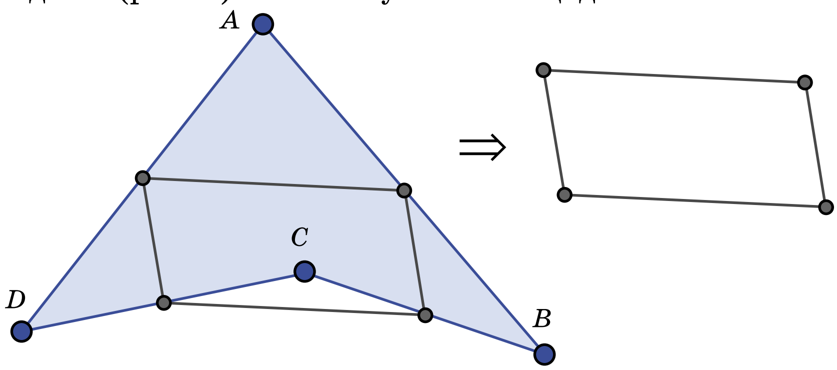
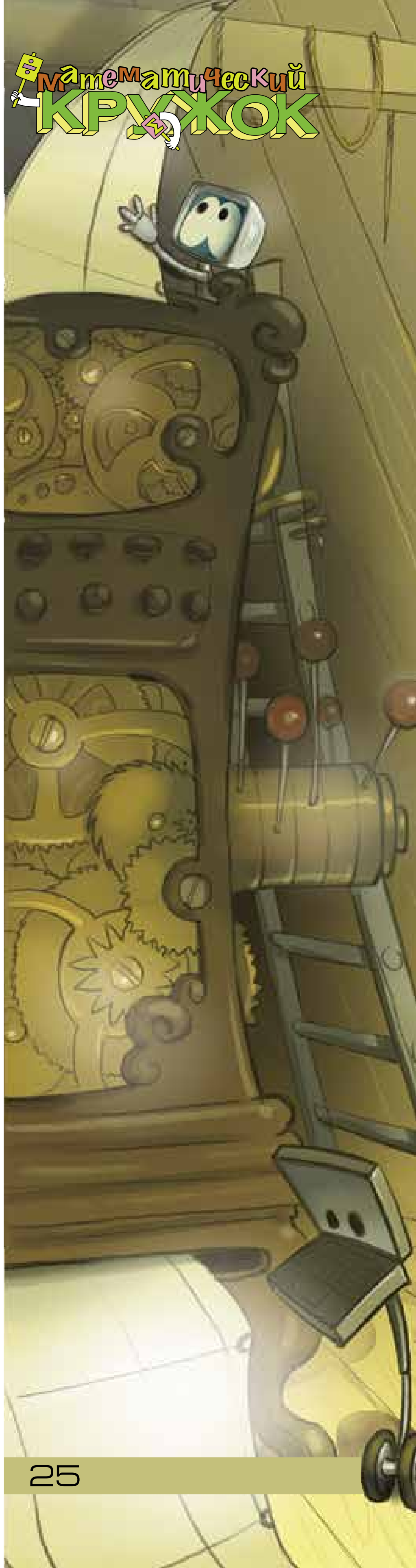


Рис. 4

– Используем такой трюк: *если в исходном четырёхугольнике ABCD сдвинуть одну диагональ (AC) вдоль самой себя, а другую (BD) оставить на месте, получится четырёхугольник $A'BC'D$ той же площади* (рис. 5). Как бы это тебе попроще объяснить...[1]

– Ну уж нет, ещё час я слушать не намерен! – возмутился Ноутик.

[1] См. статью Г. Мерзона «Площади и перекашивания» в «Квантике» №2 за 2020 год.



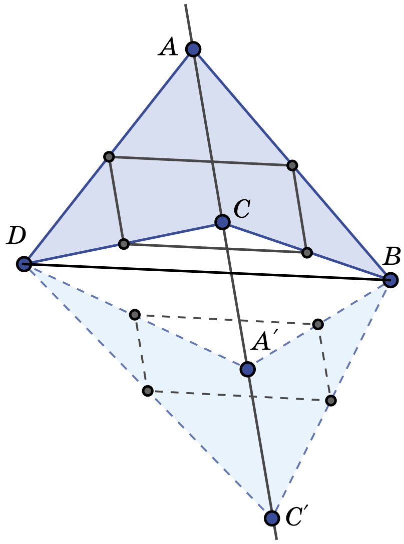


Рис. 5

– Это очень красиво! – запротестовал Квантик, но, смирившись, решил объяснить в следующий раз и продолжил: – Сдвигая диагонали таким образом, мы можем превратить $ABCD$ в параллелограмм.

– Надо же! А преобразованный четырёхугольник при этом вообще не меняется – только двигается.

– Ну естественно! Его стороны, как средние линии, параллельны диагоналям и вдвое меньше по длине, – пояснил Квантик (рис. 6).

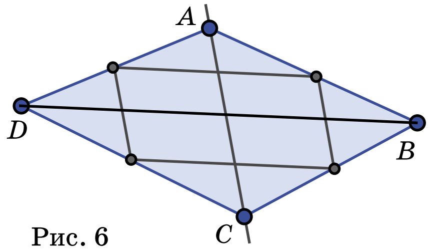


Рис. 6

– А значит, его площадь вдвое меньше параллелограмма $ABCD$, ура! – возликовал Ноутик. – Ух ты, а это что за экземпляр?

– Он тоже преобразует четырёхугольники, но стороны AB и CD он делит в отношении 1:2, а стороны BC и DA – в отношении 2:1.

– Какой странный преобразователь! Во сколько же раз будет меньше полученный четырёхугольник? И обязательно ли он будет меньше?

Правильно ответив на последний вопрос Ноутика, вы решите задачу 40 «Нашего конкурса» на с. 32, а также догадаетесь, почему на чердаке не было преобразователя, делящего стороны четырёхугольника в одном и том же отношении 1:2.

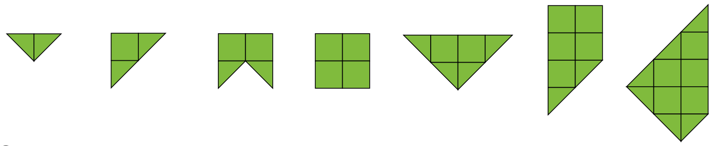
Художник Екатерина Соловей

Владимир Красноухов

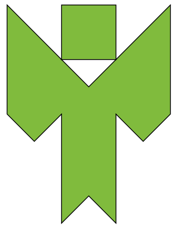
ОТ ИКАРА ДО АЭРОПЛАНА

КРАТКИЙ ПЕРВОАПРЕЛЬСКИЙ ОБЗОР ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ АВИАЦИИ

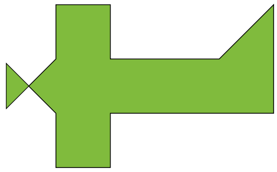
В известной игре-головоломке «Слагалица» (автор В. Красноухов) используются 7 игровых элементов:

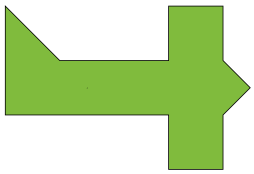


Среди множества геометрических и жанровых картинок, которые из них строятся, есть и изображение Икара. Герой древнегреческой легенды Икар смастерил крылья и поднялся в воздух. Но, нарушив инструкцию по технике безопасности, которую дал ему его отец архитектор Дедал, Икар слишком близко подлетел к Солнцу, и его полёт закончился катастрофой. Так начиналась история авиации.

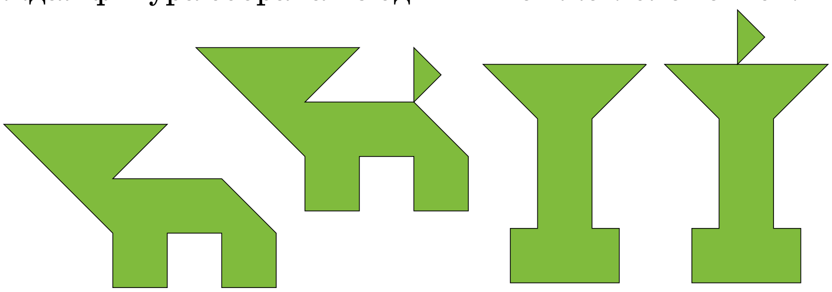


А вот силуэты двух старинных самолётов. Соберите отдельно каждый силуэт, используя весь набор «Слагалицы». Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.





Если спуститься на землю, то и здесь можно найти такие же парадоксальные пары фигур. Например, собачка с хвостиком и без него, на свечке загорелось пламя... Повторяем: каждая фигура собрана из одних и тех же 7 элементов!



Если вам удастся придумать свои варианты парадоксальных пар – обязательно присылайте нам. Желаем успехов!

Художник Алексей Вайнер

КОНКУРС
ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ II ТУР

Решения II тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 1 июня. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы. Предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров.

Предлагайте задачи своего сочинения – лучшие мы опубликуем! Так, автор задачи 8 – пятиклассница Зоя Лапшова. Желаем успеха!

6. Вот отрывок из рассказа, который написал Ян:

Ночь. Тишь. Мрак. Ян шёл сквозь лес. Ян был храбр, смел, Ян знал: там ждёт Джейн. Её смех звал, он влёк вдаль...

Какое слово попало в текст рассказа по ошибке? В чём состоит ошибка?

И. Б. Иткин

7. Эти два выражения, отличающиеся только приставками, имеют противоположный смысл. Первое из них говорит о непрерывных усилиях, второе, намного более редкое, – об отсутствии каких бы то ни было усилий. Напишите эти два выражения в правильном порядке.

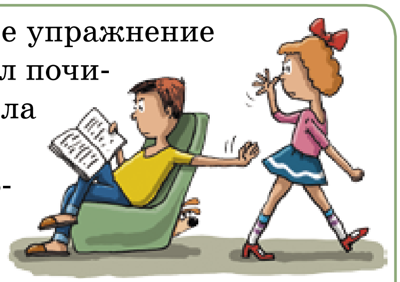
Л. З. Иткина

8. Вовочка доделал скучное упражнение на подбор синонимов и решил почитать журнал. Сестра попросила у него этот журнал.

– Это журнал не для девочек, – буркнул Вовочка. – Тебе подошёл бы журнал... м-м-м... «Молодая уборщица».

Какой журнал читал Вовочка? Кратко поясните свой ответ.

З. С. Лапшова



9. Называя один из знаков препинания, маленький Лёва путает в нём первый звук. Надо сказать, что для некоторых предложений такое название выглядит не менее логичным, чем правильное. Напишите название этого знака препинания так, как его произносит Лёва.

С. И. Переверзева

10. У одной из форм этого существительного окончание содержит в три раза больше букв, чем основа. Напишите это существительное и эту форму.

С. С. Сай

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I тур
(«Квантик» № 1, 2021)

1. *Пете попалось на глаза некое слово (существительное, нарицательное, в словарной форме).*

– Ну и словечко! – воскликнул Петя. – Сначала написано число, а потом – название этого числа.

Какое слово увидел Петя?

Петя увидел слово **ОЗЕРО**: буква О выглядит так же, как число «ноль», а «зеро» – одно из названий нуля (так называется 0 на поле для игры в рулетку).

2. *Маленькую Иру папа называет «пигалица» – за то, что Ира очень любит ДЕЛАТЬ ЭТО и с удовольствием всем об этом рассказывает. Какой глагол мы заменили на ДЕЛАТЬ ЭТО?*

Ира любит **прыгать** и с удовольствием всем об этом рассказывает. А поскольку Ира, как многие маленькие дети, пока не выговаривает букву *р*, вместо «Я прыгаю!» у неё получается «Я пигаю!». Вот папа и прозвал её «пигалицей».

3. *Какая последняя по порядку буква русского алфавита обозначает согласный, парный и по твёрдости-мягкости, и по звонкости-глухости?*

Буква **Ф**. После неё в алфавите ещё есть согласные буквы Х, Ц, Ч, Ш и Щ, но все они, кроме Ш, глухие непарные, а Ш – всегда твёрдый.

4. *Бюрократ бывает туповатый и дубоватый. А песок?*

Слово *дубоватый* получается из слова *туповатый* заменой глухих согласных на первом и третьем местах на парные им звонкие. Песок тоже можно охарактеризовать парой прилагательных, устроенной таким же образом: он бывает ***сыпучий*** и ***зыбучий***.

5. *Найдите русское слово, состоящее не менее чем из четырёх морфем, таких что каждая из них состоит ровно из одной буквы. (Морфема – любая значимая часть слова.)*

В качестве ответа подходят глагольные формы ***ушла***, ***ушло***, ***ушли***, ***уела***, ***уело***, ***уели***, ***усну*** (возможно, список не исчерпывающий). Каждая из них состоит из четырёх однобуквенных морфем: приставки, корня, суффикса и окончания.

НАШ КОНКУРС, VI тур («Квантик» № 2, 2021)

26. *Рома и Саша налили себе доверху одинаковые чашки чая. Рома сначала выпил полчашки, потом отпил глоток, а затем выпил треть оставшегося. А Саша сначала выпил треть чашки, потом отпил такой же глоток, как Рома, а затем выпил половину оставшегося. Кто выпил больше чая?*

Ответ: больше выпил Рома. Если выпить $1/2$ чего-то, останется исходный объём, умноженный на $1/2$. Если выпить $1/3$ чего-то, останется исходный объём, умноженный на $2/3$. Если бы Рома и Саша не отпивали по глотку, оба оставили бы $1/2 \cdot 2/3 = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ чашки.

При этом Рома выпил бы лишь треть своего несделанного глотка, а Саша – половину.

Но на самом деле ребята сделали по целому глотку, то есть Рома выпил на $2/3$ глотка больше, чем $1/3$ чашки, а Саша – на $1/2$ глотка больше. Значит, Рома выпил больше, чем Саша (на $2/3 - 1/2 = 1/6$ глотка).

27. *Решите ребус:* СОЯ + СОЯ + СОЯ = МЯСО. *(Найдите все решения и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: 793 + 793 + 793 = 2379. Переберём все значения Я от 0 до 9. Записав ребус в столбик и продвигаясь по разрядам справа налево, для каждого значения Я найдём сначала О, потом С, потом проверим Я и найдём М. Заполним табличку, отбрасывая случаи, когда получается, что две разные буквы означают одну и ту же цифру или буква Я означает разные цифры. Противоречия не возникает лишь при Я = 3.

Я	О	С	Я	М
0	0			
1	3	9	7	
2	6	8	5	
3	9	7	3	2
4	2	7	1	
5	5			
6	8	5	7	
7	1	5	5	
8	4	4		
9	7	3	1	

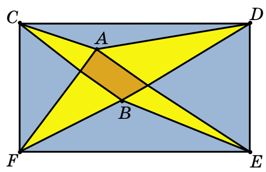
28. *Головоломка «Ёлки-палки» состоит из 100 палочек, длина каждой из которых либо 1 см, либо 3 см. Требуется из всех этих палочек (не ломая) составить правильный многоугольник. Вовочка попытался выложить прямоугольник, но доказал, что этого сделать нельзя, и считает, что головоломка бракованная. Прав ли он?*

Ответ: да. Если в наборе чётное число коротких (по 1 см) палочек, то длинных тоже будет чётное количество, и прямоугольник выложить можно: пустим две одинаковые палочки на две противоположные стороны прямоугольника, а остальные палочки разделим на два одинаковых набора для оставшейся пары сторон.

Если в наборе нечётное число коротких палочек и их хотя бы 3, мы можем сложить из трёх коротких палочек одну длинную. Тогда количество обоих видов палочек станет чётным, и можно будет выложить прямоугольник как в первом случае.

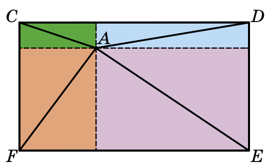
Значит, в наборе Вовочки было 99 длинных палочек (по 3 см) и 1 короткая (1 см). Если из всех этих палочек выложить многоугольник, то длины его сторон, составленных только из длинных палочек, будут делиться на три, а длина стороны, содержащей короткую палочку, – нет. Значит, в таком многоугольнике обязательно найдутся неравные стороны и он не может быть правильным.

29. *Две точки A и B внутри прямоугольника соединили с его вершинами, как показано на рисунке. Докажите, что суммарная площадь двух жёлтых треугольников, примыкающих к точке A, равна суммарной площади двух жёлтых треугольников, примыкающих к точке B.*

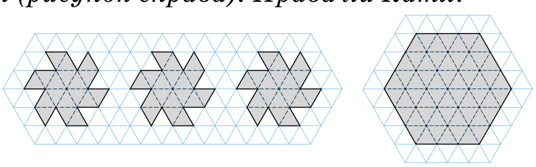


Добавим к каждой из суммарных площадей левый и правый голубые треугольники. Получим с одной стороны суммарную площадь треугольников CAF и DAE, а с другой – треугольников CBF и DBE. Но каждая из этих площадей составляет половину площади всего прямоугольника!

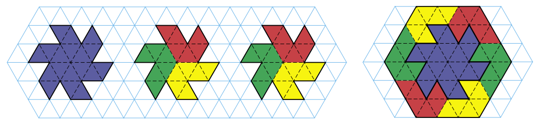
Докажем это, например, для первой пары треугольников. Проведём через точку A две линии, параллельные сторонам прямоугольника. Они разделят $CDEF$ на четыре меньших прямоугольника, которые делятся своими диагоналями AF, AC, AD и AE пополам. В итоге половина общей площади $ABCD$ попадает внутрь треугольников CAF и DAE и половина – наружу.



30. *Андрей вырезал из бумаги «в треугольную клеточку» три одинаковые снежинки для украшения новогодней ёлки (рисунок слева). Катя считает, что их можно разрезать так, чтобы получилось всего семь частей, из которых можно сложить правильный шестиугольник (рисунок справа). Права ли Катя?*



Ответ: Катя права, см. рисунок.



■ **ЛИНЗА ИЗ ЛУНЫ** (**«Квантик» № 3, 2021**)

Развёрнутый ответ мы дадим позже, а пока подумайте над такими подсказками. 1) Как зависит видимая яркость поверхности от увеличения, с которым мы её рассматриваем через лупу? Проведите эксперимент. 2) Представим, что Луну заменили на такой же шар вещества с яркостью солнечной поверхности. Глядя на такой воображаемый небосвод, сравните освещение от преображённой Луны и Солнца.

■ **У НАС В ГОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАДИОКРУЖОК**

1. В левую. При уменьшении высоты объём уменьшается в два раза, а при увеличении диаметра – увеличивается в $2^2 = 4$ раза.

2. На одну. Из 8 маленьких кусочков мыла можно сложить исходный кусок.

3. Крупной. У неё меньше кожуры, потому что если разрезать одну картофелину на несколько мелких, их суммарная площадь поверхности будет больше, чем у исходной картофелины (на удвоенную площадь разрезов).

4. Лилипут. Сила мышц зависит от площади их поперечного сечения, что пропорционально квадрату линейных размеров, а вес – кубу.

5. Например, чтобы спастись от перегрева. В организме постоянно образуется тепло. При большом размере площадь поверхности может быть недостаточной для того, чтобы избавиться от лишнего тепла. Вода же хорошо его отводит. Ещё в воде вес тела меньше и уменьшается нагрузка на кости и мышцы.

6. Крупное, потому что объём запасаемой воды пропорционален кубу линейного размера, а испарение пропорционально площади поверхности. Впрочем, бывают специальные механизмы сохранения воды – например, у тихоходки.

7. Хомячкам, как и человеку, нужно поддерживать высокую температуру тела, но, несмотря на шерсть, тепло они теряют быстро, потому что площадь их поверхности бóльшая по сравнению с их объёмом.

8. Дадим упрощённый ответ (настоящая биомеханика намного сложнее). Мысленно увеличим животное во все стороны в k раз. Как изменится высота его прыжка, когда он прыгает вертикально вверх? Сила мышц пропорциональна площади их поперечного сечения, поэтому она увеличится в k^2 раз. Масса увеличится в k^3 раз. Значит, ускорение уменьшится в k раз. Казалось бы, высота прыжка уменьшится? Нет, ведь ещё важно, как долго прикладывается это ускорение, то есть пока животное распрямляет ноги и корпус. От этого зависит скорость в момент отрыва, а значит, и высота прыжка. Поскольку животное стало «медлительнее» в k раз, время возрастёт в k раз. И стартовая скорость останется прежней.

Тем самым размер животного лишь косвенно влияет на высоту прыжка. Например, кузнечику сложно преодолевать сопротивление воздуха, и у увеличенной копии есть все шансы прыгнуть выше. У дельфинов высота прыжка определяется предельной скоростью в воде, и про эту скорость сложно сказать, как она зависит от размера: с одной стороны, влияние сопротивления воды уменьшается, а с другой – животное становится менее подвижным.

Не путайте высоту прыжка животного с высотой, на которую оно запрыгивает. Во втором случае животное может помочь себе передними лапами в конце прыжка, и такая высота сильно зависит от размера животного.

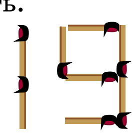
9. Будем оптимально заполнять дробинками ведро, пока не дойдём до стенок. У стенок образуется пустота толщиной не больше диаметра дробинки. Объём пустоты очень мал по сравнению с объёмом ведра, если дробинки мелкие.

СНОВА СПИЧКИ

1. «Укороченная» задача решается ничуть не сложнее. Самую левую спичку расположим вертикально и чуть отнесём её влево. Образуется дробь 1/1, равная 1. На возражение, что древние римляне не знали знака деления в виде наклонной черты, можно ответить, что знака квадратного корня они тоже не знали!

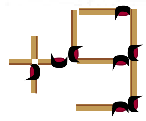
2. Подсказкой для решения могут служить слова «чтобы суммарное количество переложенных спичек равнялось двум». Почему бы просто не написать: «переложить две спички»? А потому, что при такой формулировке легче догадаться, что спички можно ломать.

Нагляднее будет решать задачу в два приёма. Сначала горизонтальную спичку из цифры 7 перенесём в цифру 3, превратив её в девятку.



Теперь займёмся единицей. Отломим от каждой из двух спичек, из которых она состоит, по половинке – и сложим знак «плюс» (см. рисунок).

Вряд ли кто станет возражать, что +9 – это квадрат (равный 3^2). А переложены суммарно ровно две спички (одна целая и две половинки).

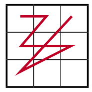


«КЛАССИКИ»

Здесь два секрета. Первый – перед тем как рисовать, поймите, какие прыжки возможны, и упорядочите их по длине – тут поможет теорема Пифагора, а тем, кто её не знает, придётся просто аккуратно нарисовать все эти отрезки на крупных клетках и сравнить их длины с помощью линейки. Второй – рисовать лучше «задом наперёд», начиная с самого длинного прыжка.

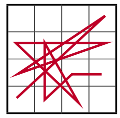
1. 5 прыжков:

1	2	6
3		4
5		

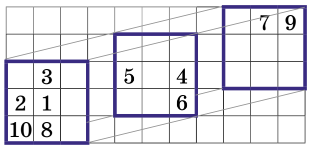


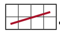
2. 9 прыжков:

			9
6	4		7
8		2	1
10	3	5	



3. 9 прыжков:



В задачах 1–3 удалось сделать все прыжки разной длины, какие только помещаются в заданное поле. Будем записывать прыжок двумя числами – смещением по горизонтали и по вертикали. Например, (3,1) – это . Тогда все возможные прыжки, скажем, в квадрате 3×3, запишутся так: (1,0), (0,1), (1,1), (2,0), ... , (2,2). Поскольку длины прыжков (1,0) и (0,1) равны, число возможных прыжков разной длины – это количество упорядоченных пар чисел, в которых второе число не больше первого, а первое не больше 2. Пару (0,0) не считаем. В кубе – то же, но подсчитываем упорядоченные тройки чисел.

4. Начинаем опять с конца. Казалось бы, можно сделать $4 \cdot 2 = 8$ прыжков: первое число в каждой паре от 1 до 4, второе – 0 или 1. Но не тут-то было: если начинать с длинных прыжков, на четвёртом ходу окажется, что прыгнуть (3,0) некуда: подходящая клетка уже занята. Пропускаем этот прыжок, прыгаем дальше – проблем уже не возникает. Можно было пропустить не (3,0), а (3,1). Но все 8 прыжков (точнее, 4 самых длинных из них) сделать, как мы видели, нельзя. Поэтому ответ – не 8, а 7 прыжков (рис. справа).

8	1	2	5	
6	4		3	7

В квадратах, начиная с размера 7×7, тоже нельзя сделать по разу все возможные прыжки.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VIII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 мая в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VIII ТУР

36. Можно ли построить замкнутый шестиугольный забор так, чтобы овцы, обозначенные ноликами, оказались внутри забора, а волки, обозначенные крестиками, – снаружи?

o	×	o	×
×	o	×	o
o	×	o	×
×	o	×	o

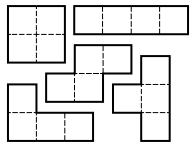
37. а) У Тани есть 3 гири весом 1001, 1002 и 1003 г (неизвестно, где какая), а у весовщика Степана Ильича – двухчашечные весы. Таня отдаёт гири весовщику и заказывает ему два взвешивания (заказ делается сразу, менять его после первого взвешивания нельзя). Может ли она гарантированно установить, какая гиря сколько весит?

б) Тот же вопрос, если у весов Степана Ильича левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равновесие, если вес на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Авторы: Георгий Караваев (36, 39), Алексей Толпыго (37), Борис Френкин (38), Сергей Дворянинов (40)

38. В каждой клетке квадратной таблицы стоит 1 или –1. Сумма всех чисел в таблице равна 1. Можно ли определить, чему равно их произведение?

39. У Ани и Тани было пять деталей, изображённых на рисунке. Аня взяла одну из деталей и вырезала ещё три таких же, а Таня забрала себе оставшиеся четыре. После этого Аня сложила фигуру из своих четырёх деталей, а Таня – из своих. Выяснилось, что фигуры у Ани и Тани вышли одинаковые. Для каждой детали определите, могла ли она достаться Ане.



40. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Каждая точка делит соответствующую сторону в отношении $1:2$ (для стороны AB либо $AK:KB=1:2$, либо $BK:KA=1:2$, и т.д.).

Могло ли оказаться, что площадь четырёхугольника $KLMN$ больше площади четырёхугольника $ABCD$?

Художник Николай Крутиков

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ПЕРВОГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

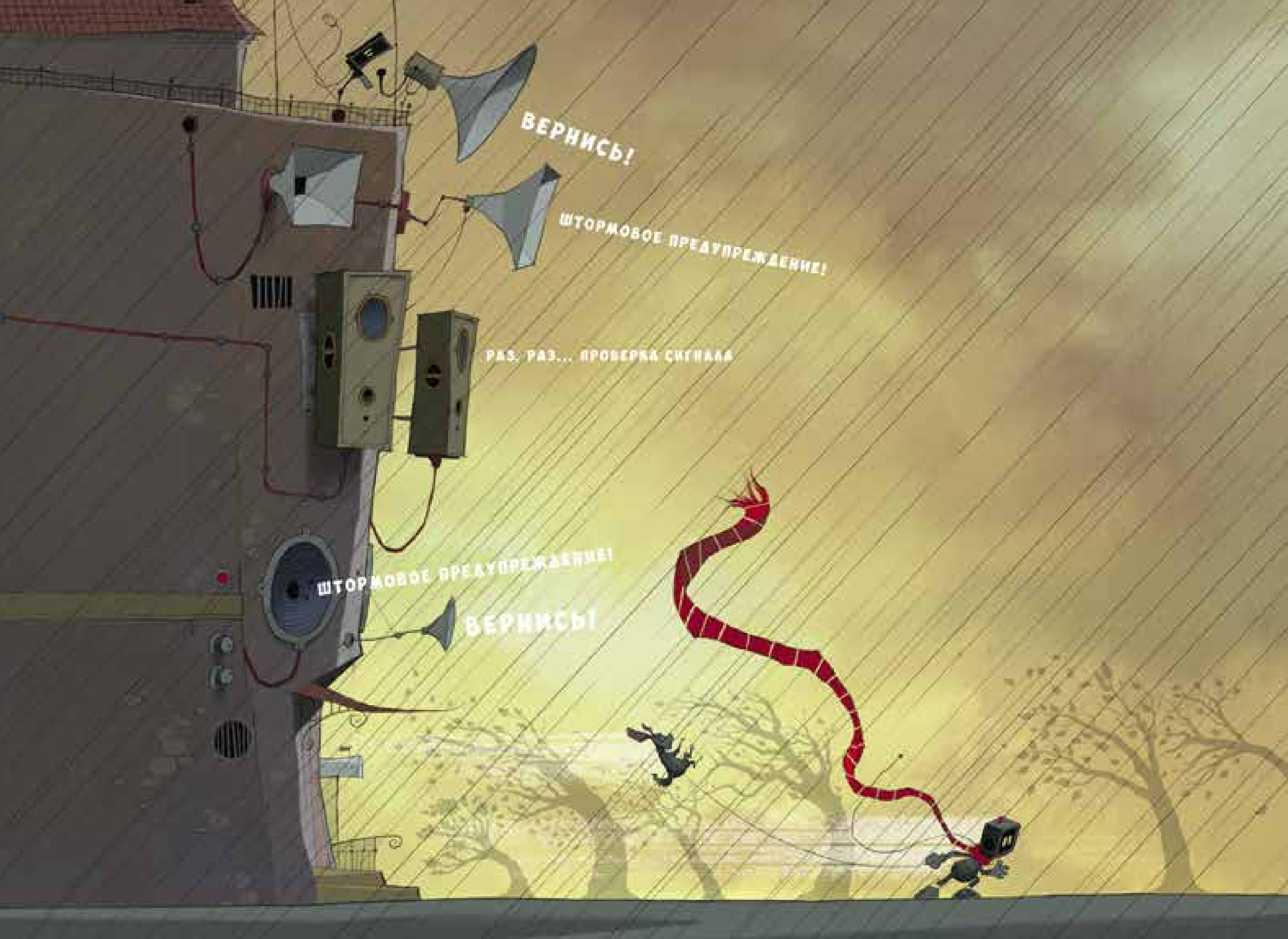
Победители: Ульяна Ануфриева, Артём Барков, Алексей Бирюлин, Владислав Костиков, Елена Куцук, Павло Назаренко, Александра Нестеренко, София Окунева, Павел Прохоров, Михаил Савин, Лев Салдаев, Севастьян Ушаков, Иван Часовских, Александр Шкурдей, Михаил Яриков, уже награждавшиеся ранее, а также Мария Зеленова, Игорь Ковалев, Leonie Krvavych, Ольга Метляхина, Даниил Рассадин, награждённые впервые.

Призёры: Екатерина Абрамочкина, Евгений Башкиров, Александр Беляков, Элина Бугаева, Андрей Вараксин, Анна Джаошвили, Арсений Ермолаев, Наталия Ленская, Иван Подгорнов, Тамара Приходько, Кирилл Ровинский, Ирина Тимонина, Зарина Шарипова, Диана Шувалова, уже награждавшиеся ранее, а также Владимир Афанасьев, Залина Гильманова, Ольга Лыкова, Алёна Соколова, награждённые впервые.

УДАЧИ ВСЕМ В СЛЕДУЮЩИХ ЭТАПАХ И В ОБЩЕМ ГОДОВОМ ЗАЧЁТЕ!

ЗВУК И ВЕТЕР

Почему против ветра звук распространяется сравнительно недалеко? Неужели ветер «уносит звук назад» вместе с воздухом? Ведь скорость звука в воздухе 330 м/с, а скорость ветра даже в сильный шторм – около 30 м/с.



Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 21004