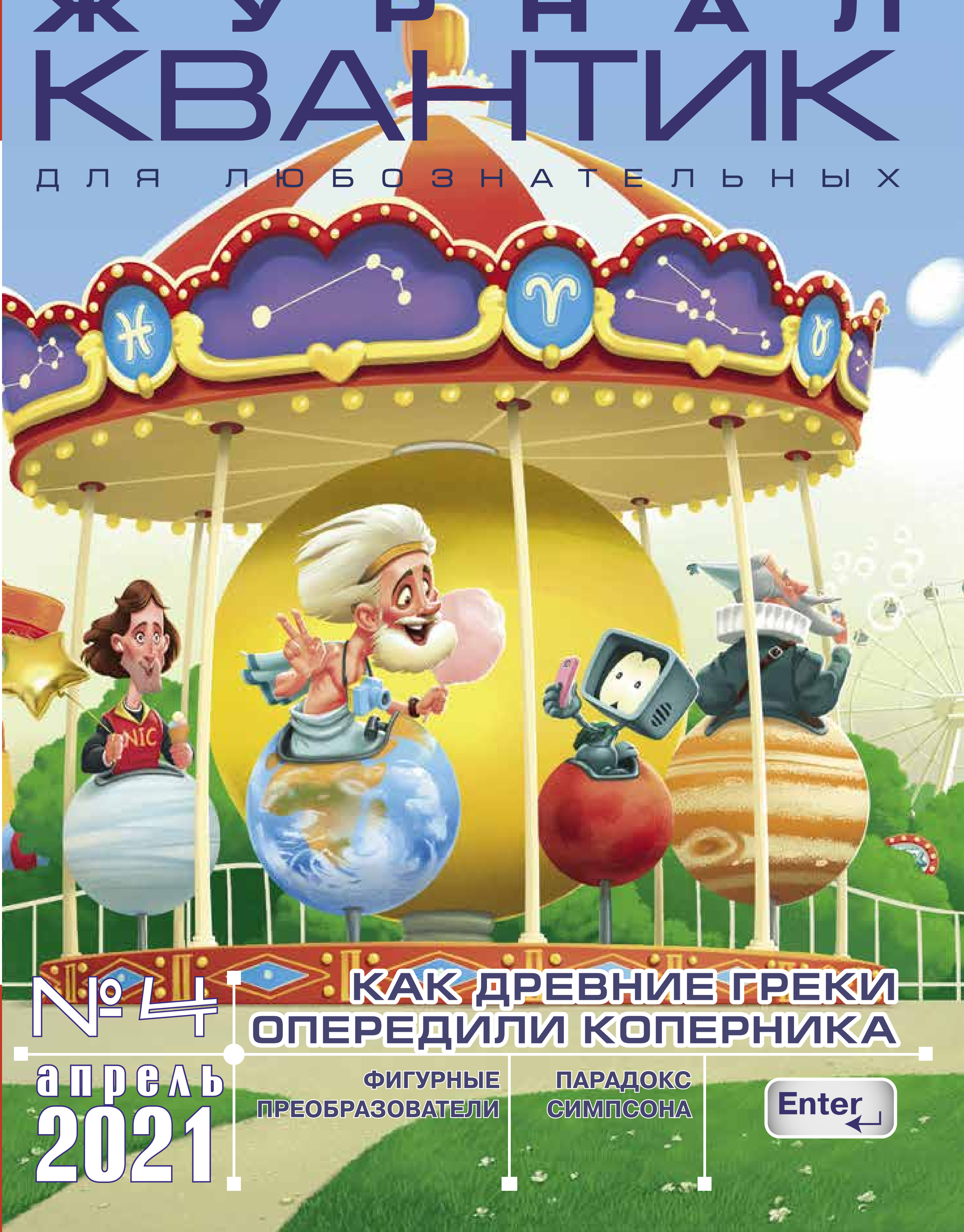
№ 4 | апрель 2021

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



№ 4
апрель
2021

КАК ДРЕВНИЕ ГРЕКИ ОПЕРЕДИЛИ КОПЕРНИКА

ФИГУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

ПАРАДОКС СИМПСОНА

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 4, апрель 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Е.А. Котко, Р.В. Крутовский, Г.А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М.В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: kvantik@mccme.ru
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 18.03.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Сергей Табачников

С 1981 по 1984 год на Всесоюзном радио ежемесячно работал математический радиокружок «Сигма». Аудиозаписи нескольких занятий можно найти в Интернете (kvan.tk/sigma). Однажды профессор Сигма и его постоянные помощники мальчик Альфа и девочка Бета пришли в гости в журнал «Квант». Мы перепечатываем рассказ об этой встрече.

У НАС В ГОСТЯХ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАДИОКРУЖОК

Сигма. Мы начнём с задачи из «Кванта» для младших школьников» (№ 1 за 1981 г.): «В Советском Союзе население составляет 260 млн человек. Казалось бы, на карте СССР с масштабом 1:1 000 000 (в одном сантиметре 10 километров) может поместиться в миллион раз меньше людей, чем на всей территории страны, то есть может поместиться 260 человек. Однако из опыта известно, что и пяти десяткам человек это будет нелегко сделать. Почему?»

Альфа. Да я эту задачу сразу решил! Ведь люди живут в многоэтажных домах, значит, на единицу земной поверхности приходится не один, а несколько человек.

Бета. А по-моему, Альфа, ты не прав. Возьмём, например, такое густонаселённое здание, как здание школы. Первого сентября все, кто находятся в этом здании, выходят во двор на линейку, посвящённую началу учебного года. Также и жители других домов могут разместиться во дворах и на улицах – им даже не будет тесно. А ещё остаются степи, пустыни, тундра!

Сигма. Бета права. Тебе, Альфа, придётся поискать другое объяснение. А пока попробуй сравнить площади квадратов со сторонами 2 и 1.

Альфа. Ну как же – площадь первого будет в четыре раза больше, чем площадь второго. И вообще, при уменьшении размеров любой фигуры в N раз её площадь уменьшается в N^2 раз. Не зря площадь измеряется в квадратных единицах!

Бета. Теперь всё ясно! Человек занимает на Земле определённую часть площади. При изображении на карте с масштабом $1:1\,000\,000$ площади всех фигур уменьшаются в $1\,000\,000^2$ раз, то есть в 10^{12} раз. Именно на это число, а не на миллион и нужно разделить население страны. При этом получится около одной четырёхтысячной части человека, и никакой парадокс не возникает.

Сигма. Очень хорошо, ребята, вы во всём разобрались. Мне остаётся лишь добавить, что при решении задачи вы воспользовались так называемыми соображениями подобия. Тема нашего занятия как раз – соображения подобия.

А теперь решим ещё одну задачу. В два одинаковых заполненных водой ведра засыпают дробь: в первое ведро крупную, а во второе – мелкую. В каждое ведро насыпают столько дроби, сколько помещается. Из какого ведра выльется больше воды?

Альфа. Ну конечно, из второго, в него насыпают мелкую дробь!

Бета. Ну и что?

Альфа. Раз дробь мелкая, то и промежутки между отдельными дробинками будут маленькими. Поэтому мелкая дробь уляжется плотнее.

Бета. Хотя промежутки между крупными дробинками и большие, зато самих промежутков будет меньше. Так что ещё неизвестно, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная.

Сигма. Действительно, надо выяснить, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная. Давайте для простоты предположим, что отношение диаметров дробинок равно двум. Теперь посмотрим на ведро с мелкой дробью в бинокль с двукратным увеличением. Что мы увидим?

Альфа. Мы увидим ведро, заполненное крупной дробью. При двукратном увеличении и объём ведра, и объём каждой дробинки увеличится в 8 раз ($8 = 2^3$), а их отношение останется неизменным. Значит, плотность мелкой и крупной дроби будет одинаковой.

Бета. Получается, что из вёдер вытечет одинаковое количество воды. Вот никогда бы не подумала!

Сигма. Тем не менее, это правильный ответ. И получить его нам помогли соображения подобия. Хочу только внести небольшое уточнение: наш ответ верен, если размеры дробинок намного меньше размеров ведра. Если же дробинки крупные (или ведро совсем маленькое), то наши рассуждения теряют силу. Причина в том, что мы пренебрегли нарушением правильного расположения дробинок вблизи стенок ведра. А если дробинки большие, то влиянием стенок ведра пренебречь уже нельзя.

Бета. Профессор Сигма, а какие ещё задачи можно решать с помощью соображений подобия?

Сигма. Соображения подобия оказались очень полезными в биологии. А впервые их применил к изучению строения животных великий итальян-

ский учёный XVI века Галилео Галилей. Его занимал вопрос, как могло бы выглядеть очень крупное сухопутное животное, например гигантская собака. В одной из книг Галилея можно даже найти рисунки костей такой воображаемой собаки.

Альфа. А о чём здесь думать? Увеличить скелет обычной собаки раз в десять – и всё!

Сигма. Нет, всё не так просто. Прочность костей пропорциональна площади их поперечного сечения. При увеличении размеров в 10 раз эта площадь увеличится в 100 ($=10^2$) раз. Значит, кости гигантской собаки смогут выдержать стократную нагрузку. Но в том-то и дело, что нагрузка возрастёт не в 100, а в тысячу раз. Ведь нагрузка пропорциональна массе животного, то есть его объёму. Объём же увеличится в 1000 ($=10^3$) раз. Вот и получается, что гигантская собака не сможет выдержать собственный вес.

Бета. Но ведь живут же на Земле очень крупные животные: слоны, носороги...

Сигма. Да, но ноги у них относительно толще, чем у мелких животных. А вот киты и вовсе не смогли бы жить на суше[1].

Альфа. Я читаю сейчас «Путешествие Гулливера». Гулливер попадает в страну лилипутов, которые в 12 раз меньше него, и в страну великанов, которые больше него тоже в 12 раз. Что же, Джонатан Свифт не учёл того, что было известно уже Галилею?

Сигма. Автор «Путешествия Гулливера» старался пользоваться соображениями подобия. Например, описывая обед Гулливера или пошив его костюма. В других местах, однако, Свифт не обошёлся без ошибок – как в истории с яблоком, попавшим в Гулливера в стране великанов.

Бета. А я это всё знаю – прочитала в «Кванте» в статье «Из книг Я. И. Перельмана»[2].

Альфа. Профессор Сигма, а почему муравьи могут переносить тяжести во много раз больше собственного веса, а человек не может?

Сигма. Известно, что сила мышц определяется только площадью их поперечного сечения и не зави-

---

[1] См. статью Н. Родиной «Архимедова сила и киты», «Квант», 1982, № 8.
[2] «Квант», 1982, № 11.

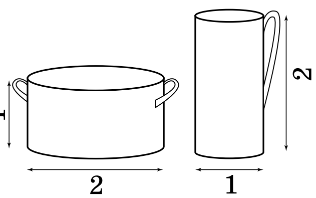
сит от их длины. Площадь же пропорциональна квадрату линейных размеров, а вес – кубу. Значит, на единицу веса у муравья приходится бóльшая сила, чем у человека и тем более чем у слона. Этим же соотношением между площадью и объёмом объясняется то, что муравьи не могли бы быть теплокровными.

Бета. Почему?

Сигма. Количество тепла, вырабатываемого в организме, пропорционально объёму тела. А вот количество тепла, излучаемого в окружающее пространство, пропорционально площади поверхности – ведь теплообмен происходит через кожу. Как мы видели, на единицу объёма у маленьких животных приходится бóльшая площадь поверхности, чем у крупных. Поэтому маленьким животным труднее бороться с холодом[3].

Бета. Теперь понятно, почему у маленьких синиц перья длиннее ширины тела, а у больших ворон – короче. Синицам нужна шуба теплее – ведь они намного меньше.

Сигма. А теперь задачи для самостоятельного решения.



1. В какую кастрюлю можно налить больше воды?

2. После семи стирок кусок мыла уменьшился вдвое, то есть вдвое уменьшились его длина, ширина и высота. На сколько ещё стирок его хватит?

3. Килограмм какой картошки быстрее чистить и почему: мелкой или крупной?

4. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?

5. По одной гипотезе, гигантские динозавры предпочитали проводить время, стоя в неглубоких водоёмах. Почему?

6. Животным пустыни приходится иногда долго не пить. Какое животное может не пить дольше – крупное или мелкое?

7. Почему человек ест три раза в день, а, например, хомячки жуют почти постоянно?

И, наконец, два вопроса посложнее:

8. Как зависит от размеров животного высота его прыжка?

(Ответ: зависит не очень сильно.)

9. Объясните, почему для мелких дробинок нарушение их правильного расположения вдоль стенок мало влияет на отношение объёмов дробинок и ведра.

Художник Алексей Вайнер

[3] Соответствующий расчёт можно посмотреть в «Кванте», 1981, № 4, с.11.

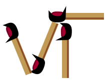
Игорь Акулич

СНОВА СПИЧКИ

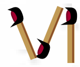
Человечество создало огромное количество задач со спичками. В последние годы их поток ослаб, ведь спички в быту всё чаще вытесняются более удобными средствами (газовыми зажигалками и пр.). Но сей предмет рано списывать со счетов, тем более что многие известные спичечные головоломки допускают возможность «расширения» – дополнительные решения, «шевеление» условия и т.д. Убедимся в этом.

1. Вот задача из книги Ф. Ф. Нагибина «Математическая шкатулка»[1]:

Из четырёх спичек сложено число 7. Переложите одну спичку, чтобы получилось число 1.

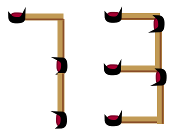


Автор поступил весьма остроумно: переложил самую правую спичку горизонтально над предыдущей, чтобы образовался знак квадратного корня. Так как $\sqrt{1} = 1$, то всё в порядке.



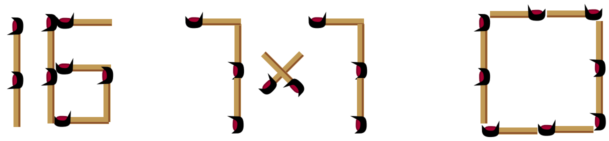
Теперь попробуйте решить ту же задачу, если исходное число «укоротить» на одну спичку.

2. А это задача С.В.Костина – из раздела «КМШ» журнала «Квант»[2]:



Из спичек сложено число 73. Переложите две спички так, чтобы получился квадрат.

Автор приводит аж три решения:



В первых двух термин «квадрат» интерпретируется как квадрат целого числа ($16 = 4^2$; $7 \times 7 = 7^2$), а в третьем – как геометрическая фигура.

Найдите ещё одно решение, чтобы суммарное количество переложенных спичек равнялось двум.

[1] Москва, Учпедгиз, 1958, задача № 109.

[2] № 12 за 2017 г., с.22.

Художник Елена Цветаева

Валерия Сирота

«Классики»

Сейчас в «классики» прыгают не так уж часто. И в основном малыши, которым бабушки заботливо расчерчивают мелком клетки. А раньше прыгали все, и асфальт во дворах был разрисован прямоугольниками. Прыгали просто так и с «битком» – баночкой из-под гуталина, – или хотя бы с камушком. «Классы» были разные – был вариант 2×4 клетки, куда вписывались подряд цифры от 1 до 4 в одну сторону, от 5 до 8 – в обратную. Трудность тогда была в том, что на втором кону надо было начинать сразу с двойки, минуя единицу; на третьем – с тройки и т.д. А были «классики» $3 \times 3 + 1$, где в квадрат 3×3 вписывались цифры от 1 до 9 в каком-то сложном порядке, так что с единицы на двойку, например, надо было прыгать назад, с двойки на тройку – очень далеко... Число 10 писали в отдельную клетку, за квадратом.

Но я уже не помню, в каком порядке вписывались цифры. К тому же не было в этой системе последовательного усложнения – короткие и длинные прыжки чередовались. Так что давайте лучше придумаем свои «классики».

1. Дано клетчатое поле 3×3. Впишите в клетки числа для «классиков» так, чтобы каждый следующий прыжок был длиннее предыдущего. (Некоторые клетки могут остаться пустыми.) Постарайтесь сделать как можно больше прыжков, то есть «занять» максимально возможное число клеток. Начинаем с клетки 1. Сколько прыжков получилось? Можете ли вы доказать, что это – максимум?

2. То же самое – в поле 4×4.

3. И то же самое – в кубе $3 \times 3 \times 3$.

4. А сколько прыжков можно сделать в прямоугольнике 5×2? Не забудьте доказать, что больше нельзя!

Художник Ольга Демидова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VIII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 мая в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VIII ТУР

36. Можно ли построить замкнутый шестиугольный забор так, чтобы овцы, обозначенные ноликами, оказались внутри забора, а волки, обозначенные крестиками, – снаружи?

o	×	o	×
×	o	×	o
o	×	o	×
×	o	×	o

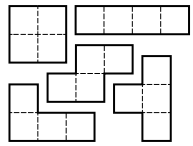
37. а) У Тани есть 3 гири весом 1001, 1002 и 1003 г (неизвестно, где какая), а у весовщика Степана Ильича – двухчашечные весы. Таня отдаёт гири весовщику и заказывает ему два взвешивания (заказ делается сразу, менять его после первого взвешивания нельзя). Может ли она гарантированно установить, какая гиря сколько весит?

б) Тот же вопрос, если у весов Степана Ильича левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равновесие, если вес на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Авторы: Георгий Караваев (36, 39), Алексей Толпыго (37), Борис Френкин (38), Сергей Дворянинов (40)

38. В каждой клетке квадратной таблицы стоит 1 или –1. Сумма всех чисел в таблице равна 1. Можно ли определить, чему равно их произведение?

39. У Ани и Тани было пять деталей, изображённых на рисунке. Аня взяла одну из деталей и вырезала ещё три таких же, а Таня забрала себе оставшиеся четыре. После этого Аня сложила фигуру из своих четырёх деталей, а Таня – из своих. Выяснилось, что фигуры у Ани и Тани вышли одинаковые. Для каждой детали определите, могла ли она достаться Ане.



40. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Каждая точка делит соответствующую сторону в отношении $1:2$ (для стороны AB либо $AK:KB=1:2$, либо $BK:KA=1:2$, и т.д.).

Могло ли оказаться, что площадь четырёхугольника $KLMN$ больше площади четырёхугольника $ABCD$?

Художник Николай Крутиков

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ПЕРВОГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

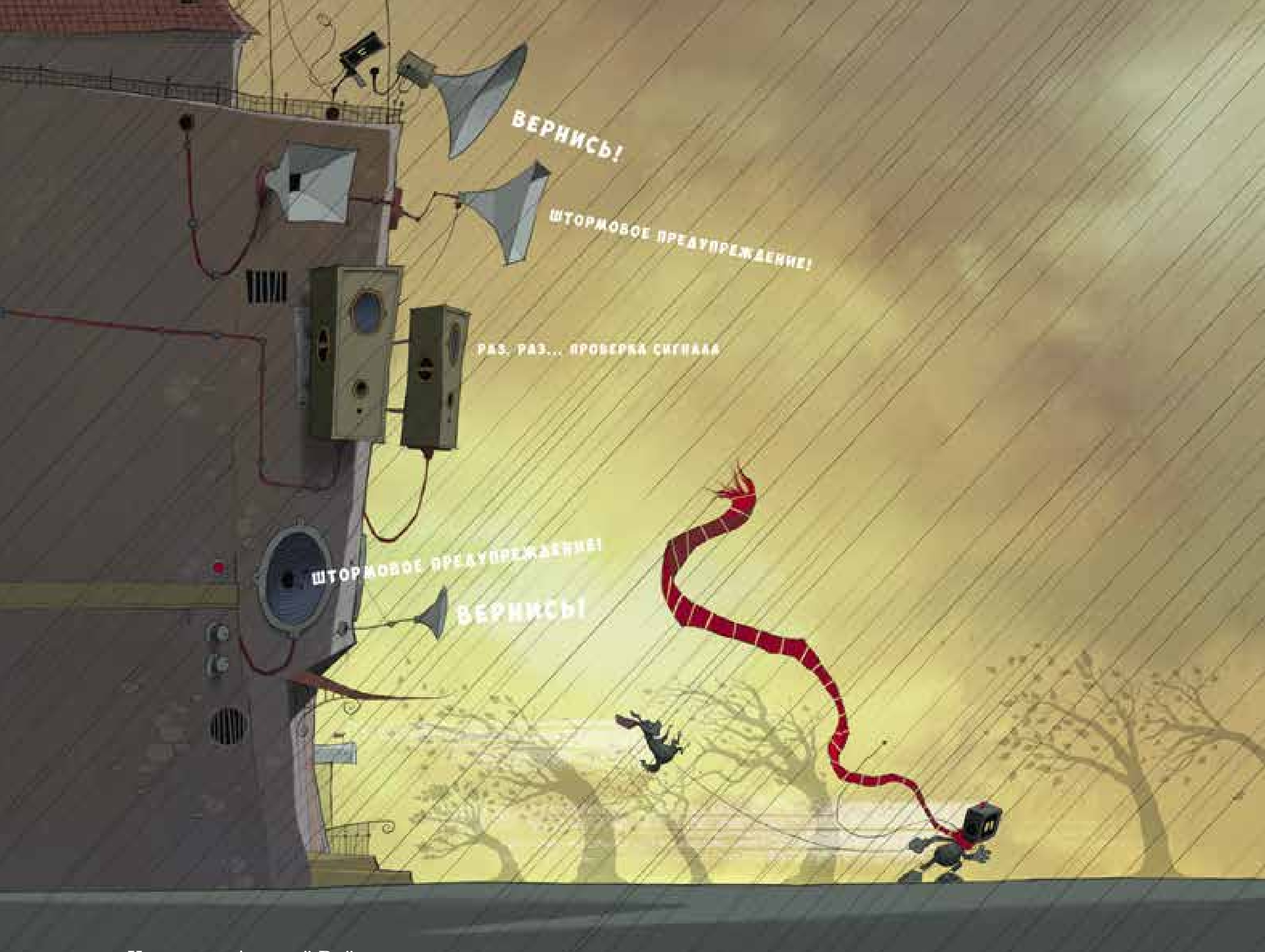
Победители: Ульяна Ануфриева, Артём Барков, Алексей Бирюлин, Владислав Костиков, Елена Куцук, Павло Назаренко, Александра Нестеренко, София Окунева, Павел Прохоров, Михаил Савин, Лев Салдаев, Севастьян Ушаков, Иван Часовских, Александр Шкурдей, Михаил Яриков, уже награждавшиеся ранее, а также Мария Зеленова, Игорь Ковалев, Leonie Krvavych, Ольга Метляхина, Даниил Рассадин, награждённые впервые.

Призёры: Екатерина Абрамочкина, Евгений Башкиров, Александр Беляков, Элина Бугаева, Андрей Вараксин, Анна Джаошвили, Арсений Ермолаев, Наталия Ленская, Иван Подгорнов, Тамара Приходько, Кирилл Ровинский, Ирина Тимонина, Зарина Шарипова, Диана Шувалова, уже награждавшиеся ранее, а также Владимир Афанасьев, Залина Гильманова, Ольга Лыкова, Алёна Соколова, награждённые впервые.

УДАЧИ ВСЕМ В СЛЕДУЮЩИХ ЭТАПАХ И В ОБЩЕМ ГОДОВОМ ЗАЧЁТЕ!

ЗВУК И ВЕТЕР

Почему против ветра звук распространяется сравнительно недалеко? Неужели ветер «уносит звук назад» вместе с воздухом? Ведь скорость звука в воздухе 330 м/с, а скорость ветра даже в сильный шторм – около 30 м/с.



Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 21004