ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 8 УМ БЕЗ МОЗГА

август
2021

ЗАДАЧИ ПРО МАГНИТЫ

ИХ СИЯТЕЛЬСТВО ГРАФ

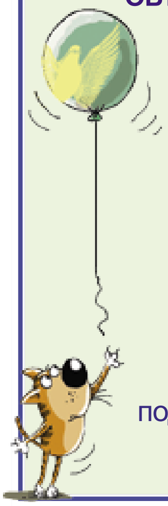
Enter

№ 8 | август 2021
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА на II полугодие 2021 года!

Подписаться на журнал можно в отделениях Почты России и через интернет

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»



подписной индекс **11346**

akc.ru/itm/kvantik

На «Квантик» теперь можно подписаться в КАЗАХСТАНЕ и УКРАИНЕ!

УКРАИНА

Подписное агентство «ПРЕСЦЕНТР КИЕВ» **www.prescentr.kiev.ua**

Чтобы подписаться, нужно позвонить по тел.: **044-451-51-61**
или написать на e-mail: **podpiska1@prescentr.kiev.ua**

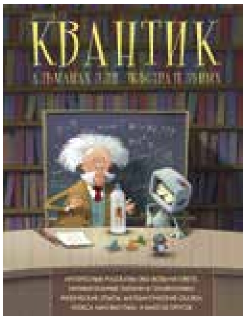
КАЗАХСТАН

1) Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС» (ТОО «Express Press Astana»)
телефоны: **+7 7172-25-24-35**
+7 747-266-05-77
+7 7172-49-39-29
e-mail: **express-press-astana@mail.ru**

2) Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
телефон: **(727) 382-25-11**; факс: **(727) 382-34-87**
e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

3) КАЗПОЧТА
Узнавайте о возможностях подписки на «Квантик» на **Казпочте**

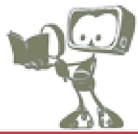
НАШИ НОВИНКИ



АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 17

В него вошли материалы журнала **«КВАНТИК»** за первое полугодие 2020 года

Купить этот и предыдущие альманахи можно в магазине «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА» (адрес: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11), в интернет-магазинах **biblio.mccme.ru** и **kvantik.ru** и других (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)



---

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 8, август 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Фил Дунский

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- бумажный каталог – Объединённый каталог «Пресса России» (индекс **11346**)
- электронная версия Каталога Почты России (индекс **ПМ068**)

Онлайн-подписка на сайте:
- агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
- Почты России **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 15.07.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота

ЗАДАЧИ ПРО МАГНИТЫ

Магнитное поле создаётся движением заряженных частиц – электрическим током в проводе или микроскопическими токами внутри магнита. И само оно, в свою очередь, может действовать на движущиеся заряженные частицы, заставляя их менять направление своего движения.

1. Все, наверно, видели, что случается с кучкой железных опилок, насыпанной на лист бумаги, если снизу поднести к этому листу магнит: опилки выстраиваются вдоль линий магнитного поля. Они намагничиваются – попав в магнитное поле, и сами превращаются в магнитики. Но линии магнитного поля есть везде, они проходят через каждую точку. Почему же, намагнитившись, опилки не остаются каждая на своей магнитной линии, а «переползают» по бумаге на соседние места и строятся в цепочки?

2. Почему компас не работает под проводами ЛЭП?

3. Земля – тоже большой магнит. Где северный полюс у этого магнита?

4. Майкл Фарадей знал, что электрический ток создаёт магнитное поле, и догадался, что изменение магнитного поля может создавать ток – без всякой батарейки.

Он сделал большой электромагнит, вокруг него намотал провод и подключил к нему амперметр для измерения тока.

Легенда гласит, что магнит занял всю комнату, и амперметр пришлось поставить в соседней. Много раз Фарадей включал и выключал электромагнит, магнитное поле менялось – но ток никак не удавалось обнаружить.

И только когда Фарадей нанял помощника, он обнаружил появление тока в проволоке! Почему же ему не удавалось открыть это явление раньше? Чем помог ассистент?

Художник Мария Усеинова

Игорь Акулич

Георг Пик

1859 • 1942

Треугольная формула Пика

Знаменитая формула Пика получила своё название по имени автора – австрийского учёного Георга Александра Пика, опубликовавшего её на рубеже XIX и XX веков. Формула Пика удивительно красива, и потому является любимой темой популярных публикаций (можно порекомендовать статью Г.Мерзона «Площадь многоугольников и тающий лед» из 9-го номера «Квантика» за 2018 год либо более раннюю статью Н. Васильева «Вокруг формулы Пика» из 12-го номера «Кванта» за 1974 год – в этих статьях приводится и её доказательство).

Поскольку, возможно, не все читатели в курсе дела, вкратце изложим суть. Пусть бесконечная плоскость разбита вертикальными и горизонтальными прямыми на одинаковые квадраты, площадь каждого из которых равна s_0 (обычно для простоты принимают $s_0 = 1$, но нам здесь удобнее именно так – в общем виде). Назовём *узлами* точки, являющиеся вершинами квадратов, и нарисуем произвольный многоугольник, все вершины которого лежат в узлах. При этом стороны многоугольника не обязаны быть вертикальными или горизонтальными (хотя это и не возбраняется). Например, у пятиугольника на рисунке 1 только одна сторона горизонтальна, а остальные – наклонны.

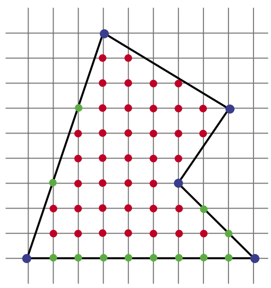
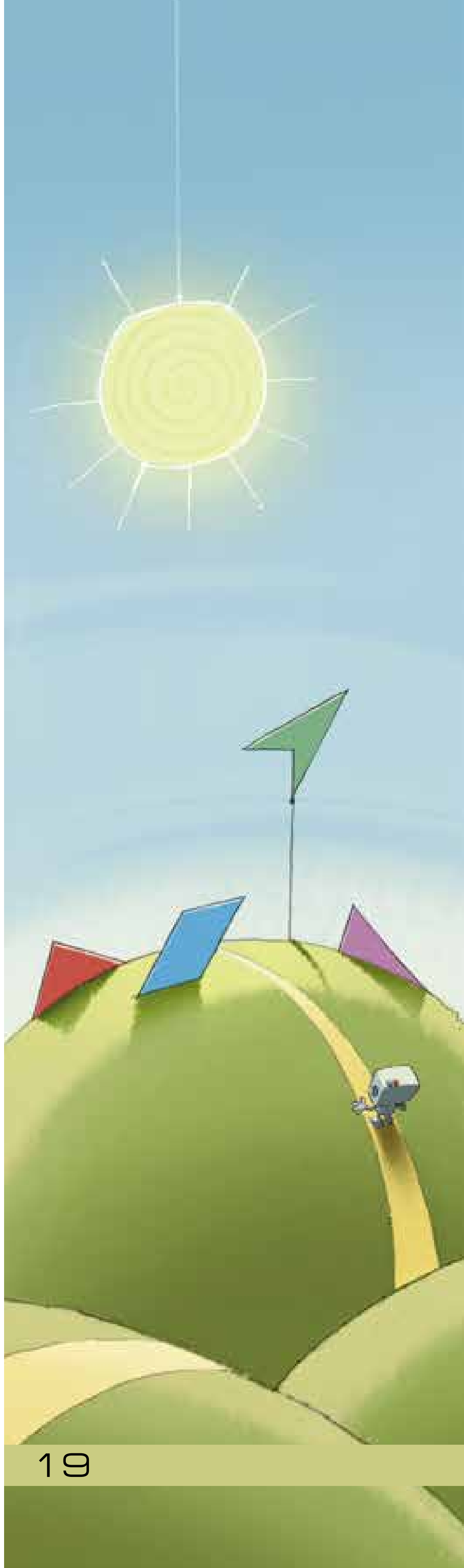


Рис. 1

Подсчитаем количество узлов, попавших *строго внутрь* многоугольника (на рисунке 1 они выделены красным цветом), а также количество узлов, оказавшихся *на границе* многоугольника. Заметим, что на границе находятся, во-первых, все вершины многоугольника (синие), а также те узлы, что волею случая оказались на сторонах (зелёные). В частности, у нашего пятиугольника имеется 39 красных узлов, а синих, разумеется, 5 (в каждой вершине), и плюс ещё 12 зелёных на сторонах. Итого на границе $5 + 12 = 17$ узлов.



Георг Пик доказал, что площадь S любого такого многоугольника зависит только от количества вершин каждого типа, то есть S есть функция от числа вершин $В$, лежащих внутри многоугольника, и от числа вершин $Г$, попавших на границу, и эту функцию можно записать в виде формулы (её-то и называют формулой Пика):

$$S\,(В,\,Г) = (В + 0{,}5Г - 1)\cdot s_0.$$

Вернувшись к тому же пятиугольнику на рисунке 1, мы без труда найдём его площадь. Здесь $В = 39$, $Г = 17$, и потому площадь равна $S\,(39,\,17) = (39 + 0{,}5 \cdot 17 - 1)\cdot s_0 = 46{,}5 \cdot s_0$. А попробуйте-ка подсчитать «вручную»![1]

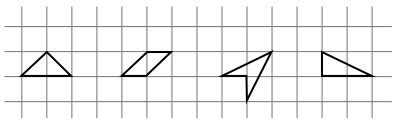


Рис. 2

Сила формулы Пика ещё и в том, что форма многоугольника, оказывается, в каком-то смысле «вторична», главное – количество тех или иных узлов. Например, на рисунке 2 изображены несколько разных многоугольников, но у них всех $В = 0$ и $Г = 4$, потому площади их одинаковы (кстати, чему они равны?).

Формула Пика столь изящна, что не хочется верить, будто она работает только для квадратной решётки. И действительно, формула Пика применима для *любой* бесконечной сетки, состоящей из *равных параллелограммов*, и внешне выглядит точно так же (если площадь «элементарного» параллелограмма равна s_0). То есть все «растяжки» и «перекосы», превращающие квадрат в параллелограмм, ничуть не сказываются на её справедливости.

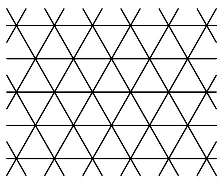


Рис. 3

Но и это далеко не всё. С не меньшим успехом можно разбить плоскость прямыми *трёх направлений* (под углами 60° друг к другу) на одинаковые *треугольники* (рис. 3). Представим себе многоугольник, вершины которого лежат в узлах этой треугольной решётки, и зададимся вопросом: не будет ли площадь S

[1] Конечно, тоже не ахти какая сложность – надо лишь разбить многоугольник на прямоугольники и прямоугольные треугольники, но повозиться придётся всё-таки дольше.

этакого многоугольника тоже зависеть только от количества узлов, попавших внутрь ($В$) и на границу ($Г$) многоугольника, и если да – то какова эта зависимость S ($В$, $Г$) ? Площадь каждого из «элементарных» треугольников, на которые разбита плоскость, мы считаем равной s_0. Иными словами, существует ли для такой сетки аналог формулы Пика (которую уместно назвать *треугольной* формулой Пика)?

Оказывается, да! Чтобы в этом убедиться, сначала у сетки, изображённой на рисунке 3, удалим все прямые одного из трёх направлений (например, идущие с «северо-запада» на «юго-восток»). Получится «ромбическая» сетка, где каждый ромб образован объединением двух треугольников (рис. 4), и потому площадь такого «элементарного» ромба равна $2s_0$. Вместе с тем, после удаления всех прямых одного направления *ни один узел не пропал* – просто теперь в каждом узле пересекаются не три, а две прямые. И если на сетке был нарисован многоугольник с вершинами в узлах, то его граница будет проходить через столько же узлов, сколько и ранее, да и количество узлов внутри многоугольника не изменится.

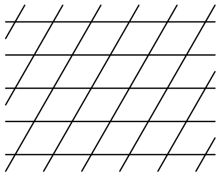


Рис. 4

А поскольку ромб – частный случай параллелограмма, для указанной сетки можно применить формулу Пика (помня, что площадь элементарного ромба равна не s_0, а $2s_0$). Разумеется, она же окажется верной и для исходной треугольной сетки. Итак, для треугольной сетки площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки находится по формуле:

$$S_{треуг.}(В,\, Г) = (В + 0{,}5Г - 1) \cdot 2s_0 = (2В + Г - 2) \cdot s_0.$$

Можно двинуться и дальше. Рассмотрим сетку, напоминающую кирпичную кладку (рис. 5), на которой одинаковые «прямоугольники-кирпичи» образуют полосы, сдвинутые на «полкирпича» относительно соседней полосы. Не поискать ли для неё аналог формулы Пика? Здесь, разумеется, узлами считаем все

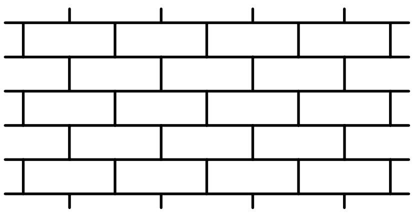


Рис. 5

точки, являющиеся вершинами какого-либо элементарного прямоугольника, площадь которого, по традиции, примем равной s_0.

К счастью, и здесь успех гарантирован. Надо всего лишь каждый прямоугольник разбить по вертикали на два «полукирпича». В результате получится «типовая» сетка из прямоугольников, образуемых двумя семействами прямых, для которой формула Пика очень даже применима. Надо лишь учесть, что здесь (в противоположность рассмотренной выше треугольной сетке) элементарный прямоугольник будет вдвое меньше исходного, и потому его площадь равна $0{,}5s_0$. Поэтому для «кирпичной» сетки формула Пика такова:

$$S_{кирп.}(В, Г) = (В + 0{,}5Г - 1) \cdot 0{,}5\, s_0 = (0{,}5В + 0{,}25Г - 0{,}5) \cdot s_0.$$

А сейчас предлагаем читателю самостоятельно найти аналог формулы Пика для сетки, состоящей из равных прямоугольных треугольников. Она получается из обычной квадратной сетки, если каждый её квадрат обеими диагоналями разрезать на четыре равные части (рис. 6). Разумеется, здесь s_0 – площадь каждого прямоугольного треугольника, на которые разделена плоскость. А потом сверьтесь с ответом на с. 31.

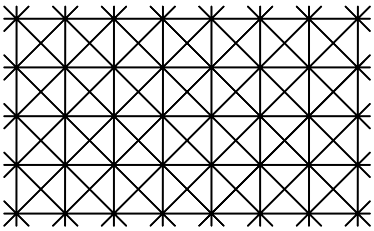


Рис. 6

В заключение вспомним, что плоскость можно разделить не только на равные квадраты и треугольники, но и на шестиугольники – наподобие пчелиных сот (рис.7). Может, и для такой сетки существует аналог формулы Пика? Попробуйте это выяснить.

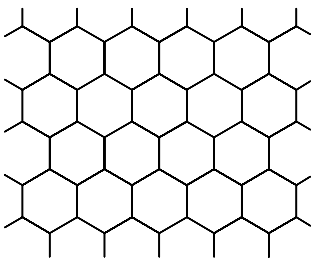
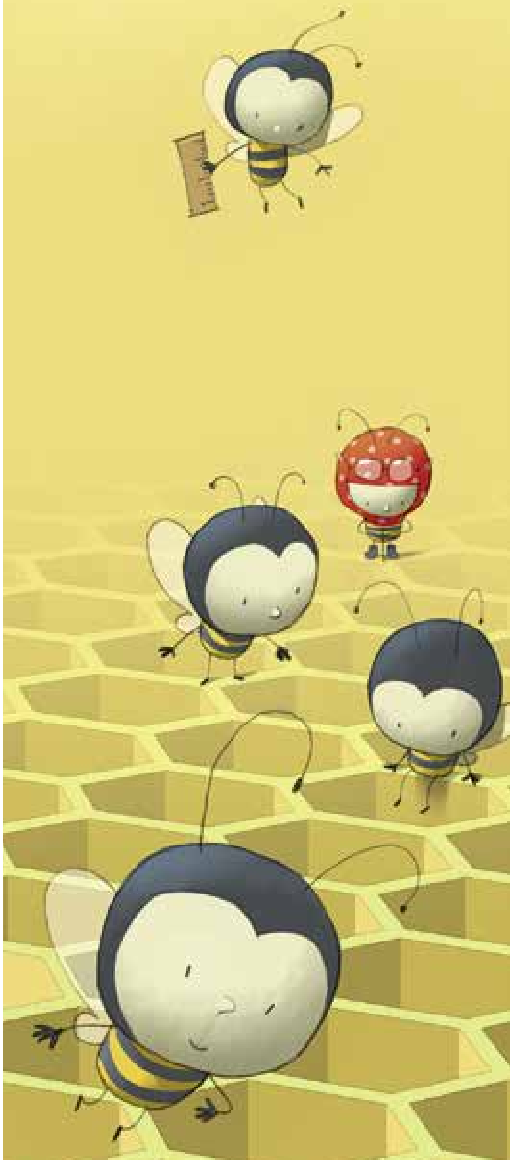


Рис. 7

Существуют, кстати, обобщения формулы Пика для определения объёмов тел в трёхмерном пространстве (и даже в пространствах более высоких размерностей) – так называемый *многочлен Эрхарта*. Но это очень сложная тема, уводящая слишком далеко. Поэтому углубляться не будем.

Художник Алексей Вайнер



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 сентября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XII ТУР

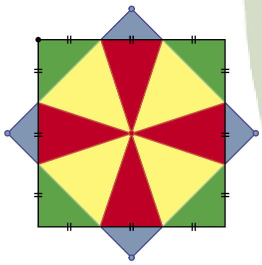
56. Каждый из 10 школьников должен был купить в поход по 2 кг крупы. Но крупа продавалась в пачках, весивших меньше килограмма, и часть школьников взяли по три пачки (с запасом), а часть – по две (с недостачей). В итоге всё равно получилось ровно 20 кг крупы. Сколько весила одна пачка, если её масса в граммах целая?

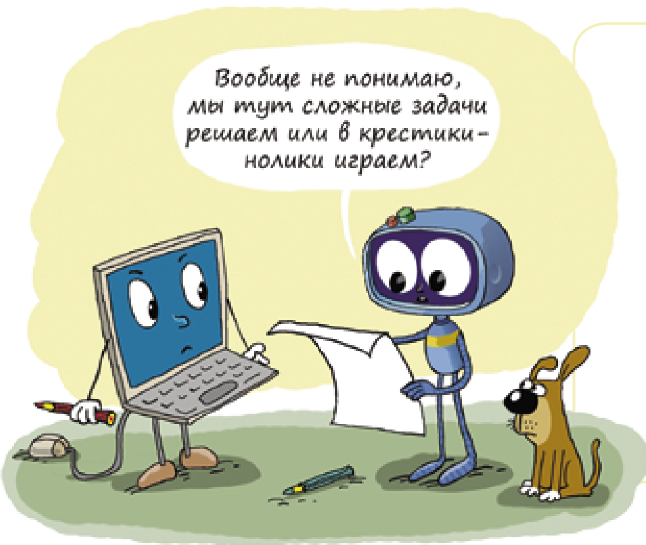
57. На шахматной доске 8×8 надо отметить несколько клеток так, чтобы не нашлось ни одного равнобедренного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. Легко отметить 8 клеток – например, все клетки любой вертикали: их центры лежат на одной прямой и не образуется вообще ни одного треугольника, в том числе и равнобедренного. А можно ли отметить больше 8 клеток? (Возможно, в решении вам пригодится теорема Пифагора.)

Авторы: Сергей Дориченко, Сергей Шашков (56), Игорь Акулич (57), Михаил Евдокимов (58), Татьяна Корчемкина (59), Борис Френкин (60)

58. За круглым столом сидят 40 человек, каждый из которых либо правдолюб (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт), либо хитрец (если он произносит два утверждения, то обязательно какое-то из них будет правдивым, а другое ложным). Каждый из сидящих заявил: «Рядом со мной сидит лжец» и «Рядом со мной сидит хитрец». Какое наименьшее число хитрецов может быть за столом?

59. Два квадрата с общим центром расположены так, что стороны одного в точках пересечения делят стороны другого на три равные части. Синяя площадь равна 1. Найдите зелёную, красную и жёлтую площади.





60. Имеется клетчатое кольцо шириной в 1 клетку. Квантик и Ноутик делают ходы по очереди, начинает Квантик. В свой ход Квантик ставит крестик в свободную клетку (где ещё нет никакого значка). Ноутик в свой ход ставит в свободную клетку нолик. Крестик и нолик не могут стоять в соседних клетках. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть гарантированный способ выиграть, если всего клеток в кольце а) 2020; б) 2021?

Художник Николай Крутиков

ХИТРЫЙ МОСТ

Если хочется идти прямо вдоль берега этой реки, рядом с водой, придётся с одного берега перейти по мосту на другой. Но зачем мост сделан так сложно? Какую проблему в старину решала эта конструкция?

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 21008
9 772227 798213