№ 5 | май 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 5
май
2022

КРЫЛАТЫЕ КВАДРАТЫ

СПЕКТРОСКОПИЯ СОЛНЦА НА CD

СКАЛЯТСЯ ЛИ СКАЛЫ?

Enter

Уже идёт ПОДПИСКА на журнал «КВАНТИК» на 2-е полугодие 2022 года

В РОССИИ

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ:

• **Почты России**

podpiska.pochta.ru/ПМ068

по этой ссылке вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

• **Агентства АРЗИ**

akc.ru/itm/kvantik

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ:

• **Почта России**

«Электронная версия Каталога Почты России»

индекс **ПМ068**

• **Почта Крыма**

«Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя»,

индекс **22923**

В СТРАНАХ СНГ

БЕЛАРУСЬ

• БЕЛПОЧТА:
Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Украина. Казахстан»,
индекс **14109**
Онлайн-подписка на сайте **belpost.by**

• ООО «АГЕНТСТВО ВЛАДИМИРА ГРЕВЦОВА» (подписное агентство)
г. Минск, ул. Нарочанская, д. 11, оф. 21а
тел. **+375 29 683 83 56**,
+375 17 209 69 01, доп. 2025
e-mail: **o.polkovenko@agvg.by**
www.smi.by

КАЗАХСТАН

• Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС» (ТОО «Express Press Astana»)
г. Нур-Султан, ул.Б.Майлина, д. 4/1,
под. 2, оф. 114
тел. **+7 747-266-05-77,**
7172-25-24-35,
7172-49-39-29
e-mail: **express-press-astana@mail.ru**

• Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
тел. **+7 727 382-25-11**;
факс: **+7 727 382-34-87**
e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

Подробнее обо всех способах подписки смотрите на **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 5, май 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 14.04.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

Рождественская теорема Ферма и крылатые квадраты Спивака

Задача о суммах двух квадратов

Какие целые числа могут быть представлены в виде суммы двух квадратов? С этого вопроса началась классическая теория чисел, а ответ на него нашёл Пьер Ферма ещё в XVII веке (мы дадим этот ответ в конце статьи).

Начнём с того, что квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1 при делении на 4. Поэтому сумма двух квадратов даёт при делении на 4 остаток 0, 1 или 2. То есть никакое число вида $4k+3$ в виде суммы двух квадратов не представимо. А вот среди чисел вида $4k+1$ есть как представимые (например $5=2^2+1^2$, $9=3^2+0^2$), так и нет (например 21 или 33).

Замечательная **Рождественская теорема Ферма** гласит: *любое простое число вида* $4k+1$ *представимо в виде суммы двух квадратов.*

С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему – поэтому её и называют Рождественской) был найден не один десяток разных доказательств. Мы обсудим замечательное элементарное доказательство с «крылатыми квадратами», найденное А. В. Спиваком уже в XXI веке (см. kvan.tk/spivak-sq).

Крылатые квадраты

Пусть p – простое число вида $4k+1$. Рассмотрим все такие тройки целых неотрицательных чисел (x, y, z), что $p=4xy+z^2$. Наша цель – доказать, что среди них есть хотя бы одна тройка, для которой $x=y$: тогда $p=(2x)^2+z^2$ – сумма двух квадратов.

Все тройки, для которых $x \neq y$, разбиваются на пары $(x, y, z) \leftrightarrow (y, x, z)$. Поэтому достаточно доказать, что количество наших троек нечётно (тогда все они разбиться на пары не могут).

Пришло время добавить к разговорам картинки. По каждой тройке (x, y, z) мы нарисуем клетчатую фигуру («крылатый квадрат»): начнём с квадрата $z \times z$ и приставим к нему (начиная с пра-

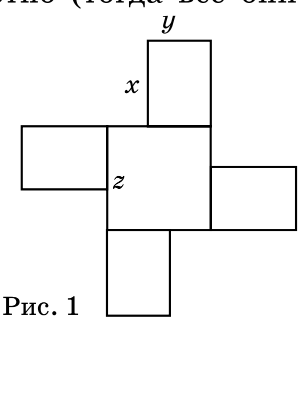


Рис. 1

вого верхнего угла)[1] 4 равных прямоугольника $x \times y$ (рис. 1). Если $p = 4xy + z^2$, мы получим крылатый квадрат площади p.

Но если число p простое, то почти каждый крылатый квадрат площади p можно получить ровно из двух троек! Действительно, как восстановить тройку, имея в распоряжении крылатый квадрат? Надо разрезать его на обычный квадрат и четыре одинаковых прямоугольника: взять один из «вогнутых» углов и начать от него отрезать либо по горизонтали, либо по вертикали (рис. 2).

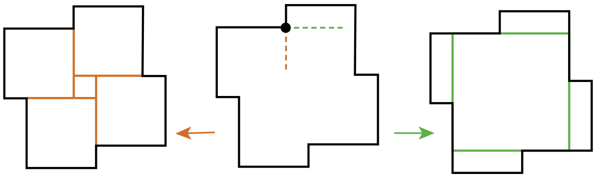


Рис. 2

Единственное исключение (единственное, если p простое[2]) – крест, соответствующий тройке $(1, k, 1)$, где $p = 4k + 1$ (рис. 3). А все остальные тройки мы разбили на пары. Значит, общее количество троек нечётно, что и требовалось.

От простых чисел к составным

Мы начинали с вопроса о представимости произвольных целых чисел в виде суммы двух квадратов, но дальше занимались только представимостью *простых* чисел.

Дело в том, что наша задача, как говорят, *мультипликативна*: если числа M и N представимы в виде суммы двух квадратов, то в таком виде представимо и число MN (действительно, если $M = a^2 + b^2$ и $N = c^2 + d^2$, то $MN = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$); и наоборот, если число MN представимо в виде суммы двух квадратов, а числа M и N взаимно просты (не имеют общих делителей), то и M, и N тоже представимы в виде суммы двух квадратов (это непростой факт).

Пользуясь этим, уже не очень сложно вывести из Рождественской теоремы и общее утверждение: *число N представимо в виде суммы двух квадратов тогда*

[1] Или начиная с левого верхнего. Мы не различаем равные фигуры (в том числе получающиеся друг из друга зеркальным отражением).

[2] Подумайте, почему важна простота числа p. Чтобы разобраться, какие иначе могут возникнуть неприятности, полезно порисовать крылатые квадраты площади 21 и площади 16.

и только тогда, когда каждое простое число вида $4k + 3$, входящее в разложение числа N на простые сомножители, входит в него в чётной степени.

Например, число $21 = 3 \cdot 7$ не представимо в виде суммы двух квадратов, а число $2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 = 6370$ представимо (действительно, $6370 = 21^2 + 77^2$).

На рисунке 3 изображён случай $p = 37$. В каждой строке – по одному крылатому квадрату площади p (в данном случае их 4) и соответствующие ему тройки (x, y, z) (для всех, кроме первого креста, их две). Стрелки соединяют тройки (x, y, z) и (y, x, z). Единственная тройка, остающаяся без пары, – (3, 3, 1) – и соответствует представлению числа 37 в виде суммы двух квадратов: $37 = 6^2 + 1^2$.

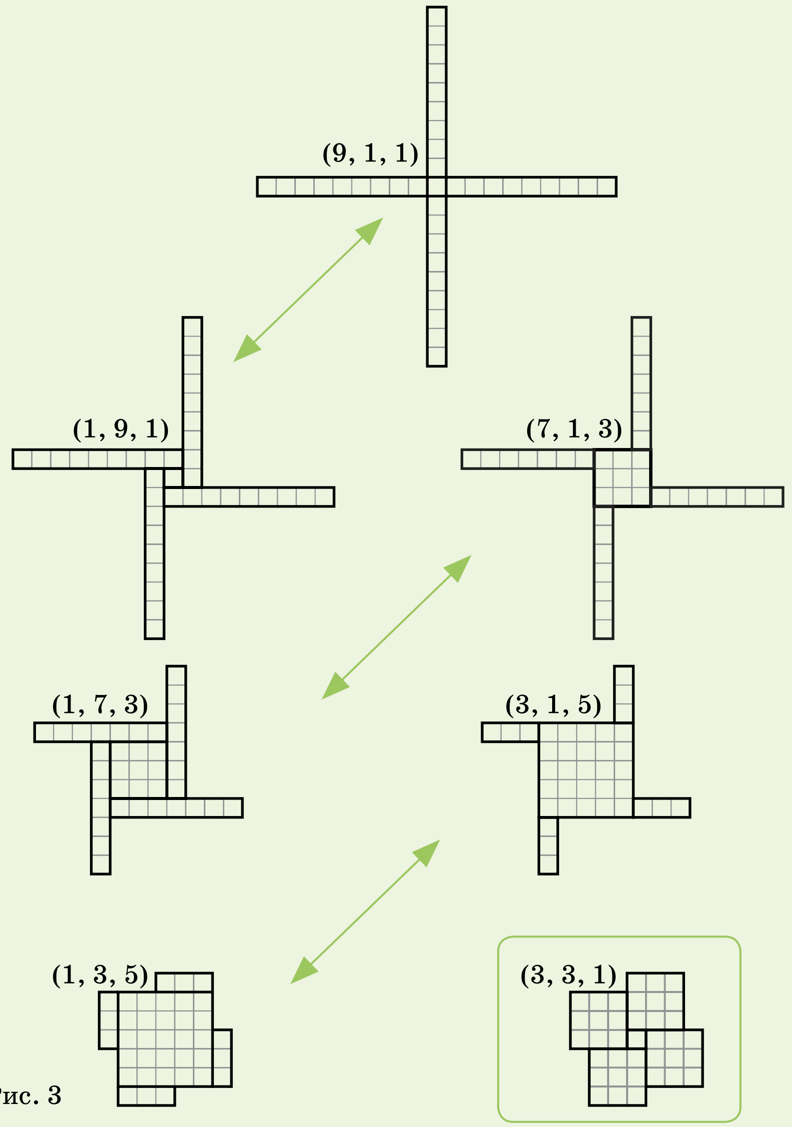


Рис. 3

ИГЛЫ ИЗ ПУЗЫРЬКОВ

Когда вода замерзает, растворённый в ней воздух остаётся пузырьками во льду. Местами они выглядят как параллельные иглы, см. фото. Как они принимают такую форму?

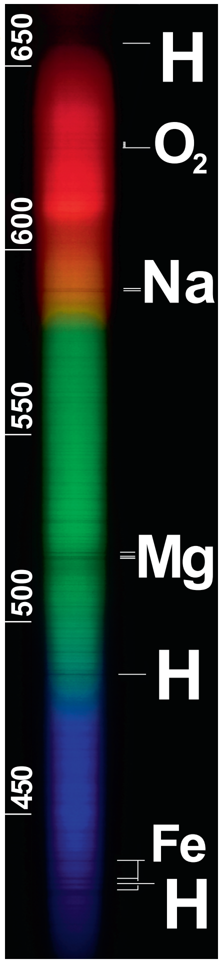
Автор Александр Бердников

Фото автора • Художник Евгений Паненко

Александр Бердников

Спектроскопия СОЛНЦА на CD

Вы могли слышать, что в белом солнечном свете содержится вся радуга цветов – это видно в белом луче, расщепляемом на спектр призмой (да и капельками в самой радуге). Вся, да не совсем: при детальном рассмотрении видно, что из палитры солнечного света будто вычеркнуты там и тут мизерные кусочки (см. фото справа). Их свет поглотился разными составляющими в атмосферах Солнца и Земли. Например, ионы натрия – это будто камертоны, точно настроенные на пару близких частот, соответствующих жёлтому свету. Соль (натрий + хлор) даёт жёлтые вспышки, если её поместить в пламя – это возбуждённый натрий «звенит» жёлтым светом. А его успокоенные ионы в солнечной атмосфере, наоборот, «выедают» этот жёлтый оттенок из спектра.



Так разные компоненты атмосферы оставляют на радуге-спектре свои следы – уникальные «штрих-коды» из тёмных полосок – там, на какие частоты они «настроены». По этому коду их легко узнать даже издалека: и на Солнце, и на других звёздах, и где только не... Один газ даже был открыт на Солнце: сначала люди познакомились со «штрих-кодом», который он оставил в спектре солнечного света ещё у Солнца, а уже потом отыскали на земле само вещество, оставляющее такие «отпечатки». И назвали его в честь Солнца: гелий.

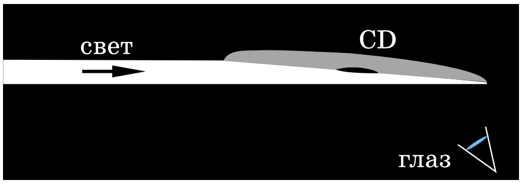
Попробуйте сами разглядеть «темновой ансамбль» солнечной атмосферы в спектре Солнца. Вам потребуются чистый (не исцарапанный) CD и ясное Солнце.

Цель: расположить CD так, чтобы Солнце на нём создавало радужный блик, как на фото справа;

разглядывая вблизи этот блик, полюбоваться гребёнкой линий поглощения.

Проблемы и решения

1) Где мой блик? Расположить всё нужно примерно так, как на рисунке ниже – смотрим на **освещённую вскользь** оборотную поверхность диска, качаем диск туда-сюда, ловя эту радугу.



2) Слишком яркий блик! Поворачиваем потихоньку диск так, чтобы солнце падало всё более вскользь на него, яркость будет уменьшаться. Или потихоньку заходим в (полу)тень, чтобы светила только часть солнца. (Первый способ – это, можно сказать, заведение диска в полутень от самого себя.)

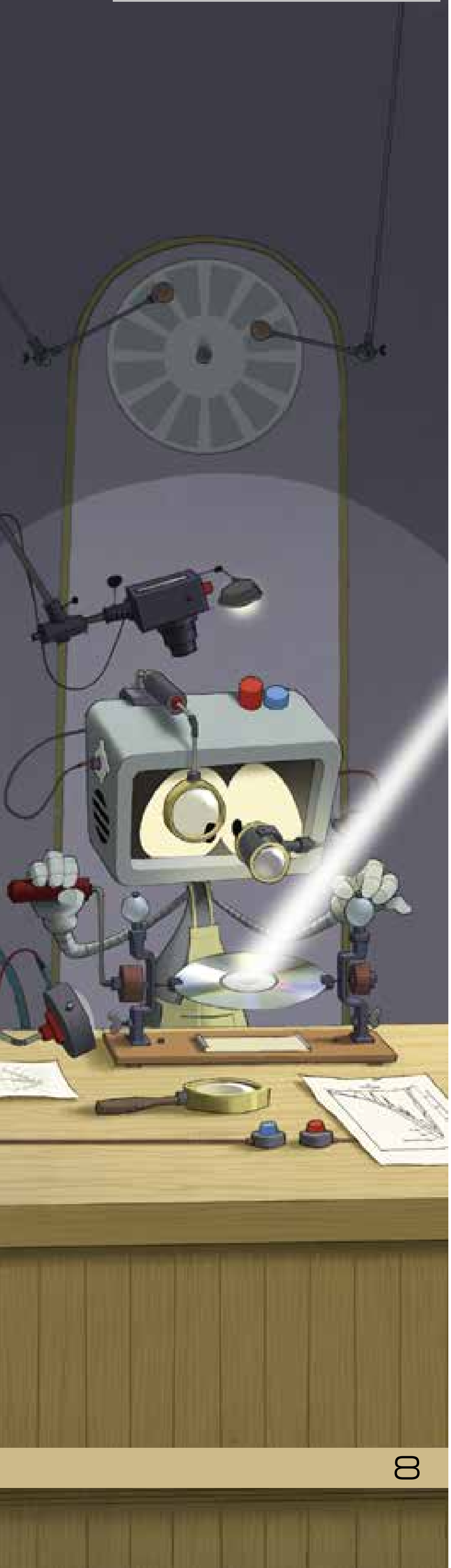
Оба рецепта помогают и с пунктом 4).

3) Блик блеклый на фоне светлого диска. Нужно сделать так, чтобы ничего солнцу конкуренцию не составляло, то есть чтобы вокруг была относительная тень, а светлое небо было чем-нибудь загорожено. **Не светите на диск отражением Солнца от своего лица** (лицо должно быть в тени). В идеале: сидим где-то, куда освещение попадает только от Солнца через, скажем, щель приоткрытой двери или маленькое оконце, диск располагаем в луче, сами туда не лезем. Помним, что факторы из пункта 2) на яркость влияют (если радуга вдруг «растворилась» – это диск в тень попал).

4) Яркость нормальная, но полоски размытые. Если они есть – это уже победа, дальше только оттачивание качества. Этот процесс может быть более утомительным, но тем, кто хочет добиться большей красоты, вот несколько подсказок.

Причин размытия может быть несколько.

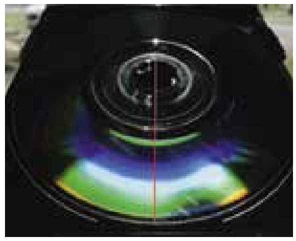
а) Чем больше источник света, тем шире размываются полоски. Поэтому активно используйте методы из пункта 2, чтобы освещало не всё Солнце (уж точно не его ореол, если небо не самое чистое), а его узкая часть. Для этого либо расположите диск почти параллельно лучам Солнца (так что для муравья на диске



солнце большей частью село за «горизонт диска»), либо окажитесь в полутени (то есть вдали что-то загораживает; в этом случае постарайтесь , чтобы это что-то было диску параллельно, как в первом случае).

Примечание: длинный и узкий источник размоет картину **в направлении своей длины**. Если направление такое же, как у полосок, то на их **ширине** размытие не сильно скажется.

б) Похожее происходит, если радуга на диске кривая, как на верхнем фото; тогда надо покачать диск, чтобы она прямо посередине проходила. Ситуация как на нижнем фото нормальна, но и в ней чётче всего полосы будут видны около середины.



в) Полосы могут быть не в фокусе. Если пункты а) и б) уже реализованы, сфокусироваться должно быть инстинктивно несложно, нужно только «поймать» чёткость. Имейте в виду, что глаз фокусирует разные цвета немного по-разному, так что, переводя по спектру взгляд, нужно подстраиваться «на новую волну» (красные цвета чуть «ближе», синие – «дальше»).

5) Что ещё смотреть? Во-первых, интересно следить, как меняется само Солнце в зависимости от его высоты в небе. По мере приближения к горизонту на его спектр налагается ещё поглощение в земной атмосфере (например, около двух полосок Na добавляется пучок полос), получается, что спектр теперь не в тонких царапинах, а весь исчерчен зазубринами.

Во-вторых, разные лампы светят разным спектром. У ламп накаливания он гладкий, без щелей. У натриевых ламп (высокого давления) жирная чёрная щель в том месте, где у Солнца две натриевые полоски. У люминесцентных ламп около четырёх основных полос излучения и т.д.

В-третьих, можно совсем скрупулёзно подойти и рассматривать спектр разных веществ в пламени. Например, соль даёт всё тот же натриевый жёлтый пик.

Удачи!

Фото автора

Художник Алексей Вайнер

ТЕСНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО РАКОВ-ОТШЕЛЬНИКОВ

Для чего эти раки-отшельники выстроились в цепочку по росту? Зачем им большая пустая раковина и что они собираются делать дальше?

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

Скалятся ли скалы?

Поэтические натуры уверяют: природа говорит с нами на особом языке. В книжках встречается столько пейзажей (которые учитель литературы почему-то не разрешает пропускать), в стихах бывает так много олицетворений! Значит, есть люди, для которых едва ли не каждая частица мира имеет своё лицо, свой характер.

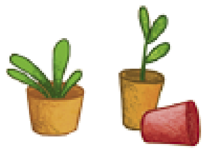
А что с точки зрения лингвистики? Действительно ли крутая *скала скалится*, а тенистый *сад досадует*? Давайте проверим родство таких слов.

Связаны ли морские *волны* с *волнением* перед экзаменом? Конечно! Словом волна раньше обозначали восстания и смуту так же часто, как водяные валы. А мятежника могли называть *волновальщиком* или *волнованцем.* Болезненное состояние беспокойства объясняли волнением крови, неких таинственных «соков» в человеческом теле. В XVIII веке, когда появился большой интерес к описанию чувств, возникло то самое *волнение души*, которое мы ощущаем и сегодня. А вот *море* не связано с *уморой* родством, хотя в Средневековье очень опасались морских путешествий, которые могут *уморить*.

Грозит ли *гроза*? Вне всяких сомнений. Прежде всего *грозой* называли страх, гнев, отсюда же слово *угроза*. Неудивительно, что одно из самых пугающих природных явлений получило то же название. Есть ли *оскал* у *скал*? Вполне можно разглядеть, ведь *скала* связана со словом *осколок*, а изначально скалить – это покрываться трещинами. Про улыбающегося иногда говорят, что он *оскалил* или даже *ощелил*[1] зубы, показал отверстия между ними.

Описания многих своих состояний мы позаимствовали в природе: так по-

[1]Это диалектное слово.



явились *бурные* эмоции, способность *расцветать* от удовольствия, принимать *пасмурный*, *смурной* вид и многое другое.

Но бывает и наоборот: мы переносим свои чувства на окружающие предметы, в том числе на городской пейзаж. Как вы думаете, в каком случае оценочное слово (эпитет) будет действительно родственным?

плохая площадь
скверный сквер
досадный сад
дорогая дорога

Исконно *дорога* – это не просто приятное для прогулок место, а продранное в лесу пространство. То есть слово связано с глаголом *дёргать*, и ни *дороговизна*, ни сердечная склонность тут ни при чём. *Сквер* – слово заимствованное, это квадратная площадь (по-английски *square* – *квадрат*). *Площадь* – довольно старое слово, скорее всего оно связанно с понятием плоскости, а не «плохости». Во всяком случае, площадь ничем не плоше сквера. Интереснее всего обстоят дела с *садом*, который, понятное дело, связан со словом *сажать*. Сесть можно не только на скамеечку в парке, но и кому-нибудь *на шею*, *на голову* и даже *на хвост*. *Досадный* – это именно тот, кто причиняет нам неудовольствие своей неотвязностью, приставаниями, так что *рассада* и *досада* действительно довольно близки.

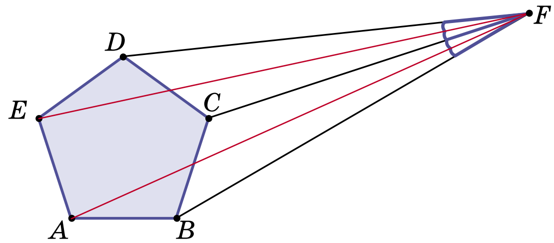
Сходство слов позволяет играть с языком, придумывать каламбуры, а иногда «человеческие» характеристики для явлений природы прямо-таки напрашиваются и часто употребляются – так создаётся устойчивый образ. Поэт скажет, что *речка* мудрые *речи* говорит, *болото болтает* пустяки, а *озеро* молчаливо *озирается* – но каждую из этих пар сумеет разбить лингвист: эти слова не родственные.

Художник Елизавета Сухно

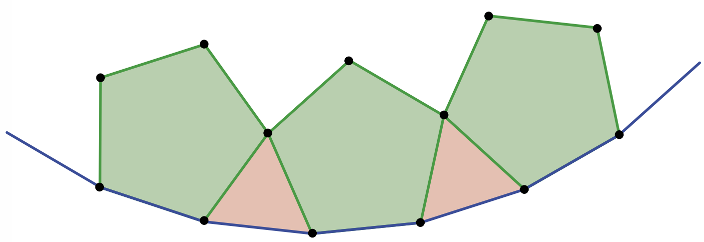
НЕОЖИДАННЫЙ 30-УГОЛЬНИК

В пятом туре нашего конкурса (в «Квантике» № 1, 2022) была задача:

25. *Точка F снаружи правильного пятиугольника $ABCDE$ такова, что отрезки ED, EC, AC и AB видны из F под одним и тем же углом* (*см. рисунок*). *Под каким?* (*Говорят, что отрезок MN виден из точки X под углом α, если угол MXN равен α*).

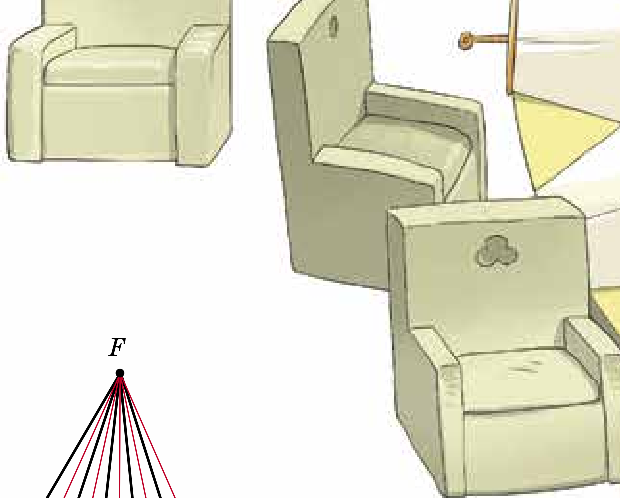


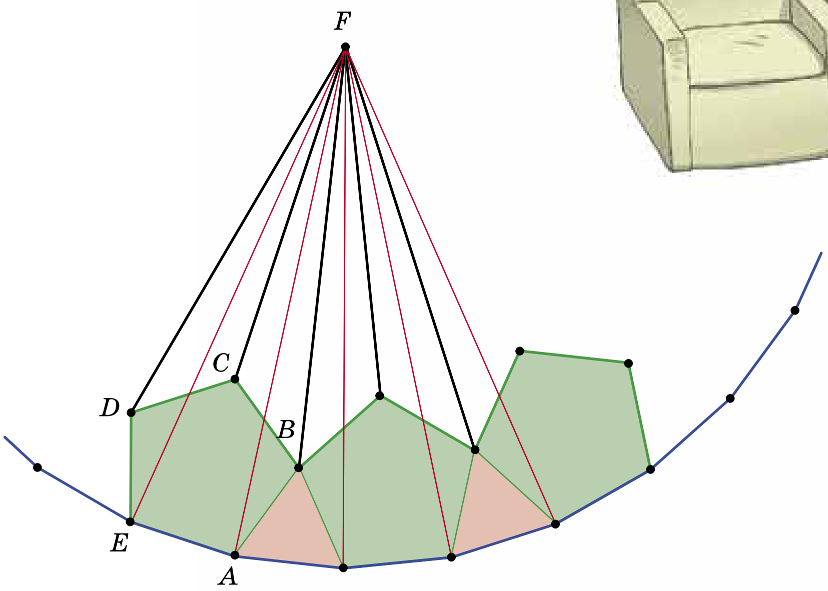
Неожиданное решение нам прислал шестиклассник из Магнитогорска Лев Салдаев. К пятиугольнику он приставил стороной равносторонний треугольник, к нему такой же пятиугольник, потом опять треугольник и так далее, получилась ломаная, как на рисунке.



Он заметил, что эта ломаная – правильный 30-угольник. Действительно, все её звенья равны, а все углы между соседними звеньями составляют $108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$, в точности как в правильном 30-угольнике (см. примечание). А в качестве точки F можно взять центр этого правильного 30-угольника.

Тогда искомый угол – это половина угла, под которым видна сторона правильного 30-угольника из его центра, то есть он равен $(360^\circ/30)/2 = 6^\circ$.

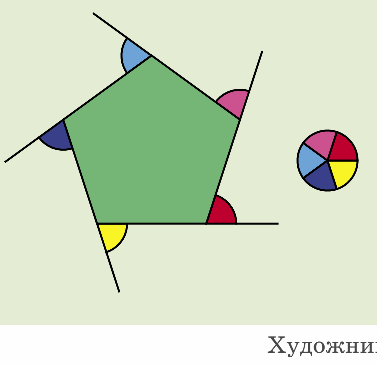




Конечно, остаётся вопрос, а нет ли второй такой точки F, которая подходит под условие. Но как минимум один из ответов найден, причём очень красиво!

Примечание. Как найти угол правильного многоугольника? Сумма внешних углов любого многоугольника равна 360° – это видно из рисунка на примере правильного пятиугольника. Поэтому внешний угол найти легко – делим 360° на число сторон. А сам угол многоугольника находим, вычитая внешний угол из 180°.

Сделайте это для 30-угольника!



Художник Мария Усеинова

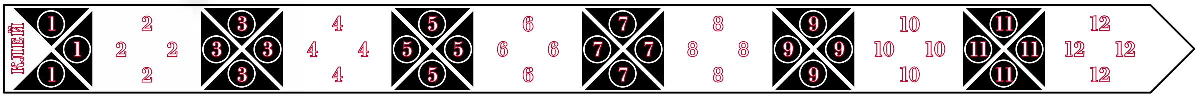
Игры и Головоломки

Сергей Полозков

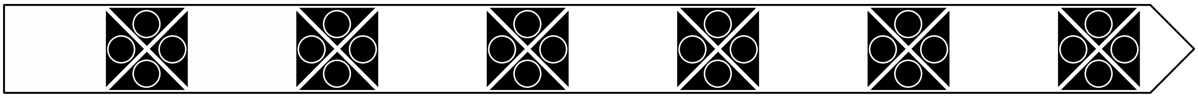
ФЛЕКСОТРИМИНО

Домино – это два соединённых квадрата, а тримино – три. По-английски *to flex* – сгибаться, складываться. Нетрудно догадаться, что головоломку флексотримино можно сгибать и складывать, а получить нужно тримино. А ещё её можно вывернуть наизнанку. Но сначала опишем, как её изготовить.

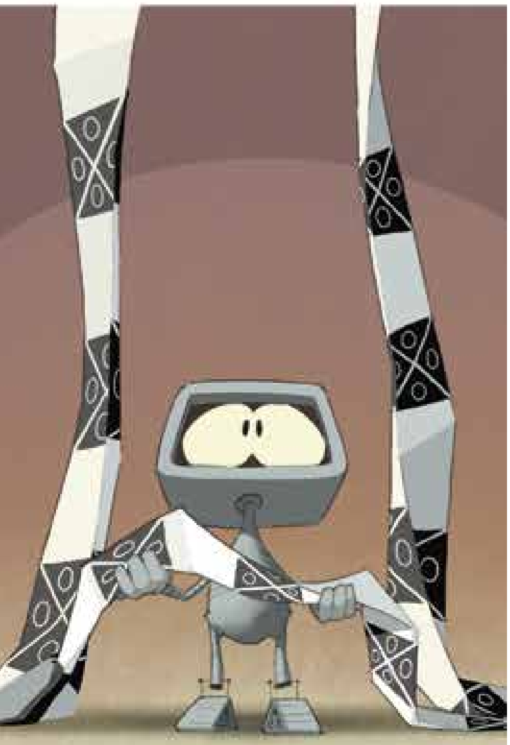
Вырежьте из журнальной страницы большой прямоугольный контур[1]. Сделайте все сгибы, кроме двойных линий. Вырежьте три заготовки[2] с язычками, срезая кромку вдоль полоски с обеих сторон. Склейте три заготовки по порядку. Получится полоска из 12 квадратов, как на схеме.



Полоска из 12 квадратов: лицевая сторона



Полоска из 12 квадратов: обратная сторона



Все сгибы будем делать кругами наружу. Согните квадраты №7, №8 и №9 – схема А. На месте перехлёста квадрат №6 должен быть снизу, а №10 – сверху. Для удобства фиксации можно использовать скрепки.

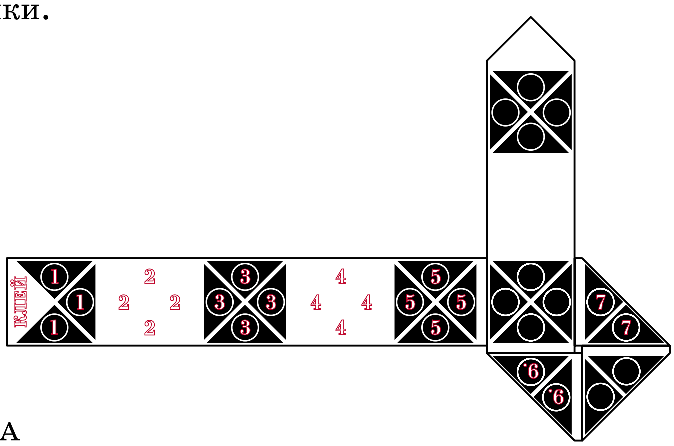


Схема А

[1] По ссылке kvan.tk/trimino-a4 можно скачать заготовку для распечатки.

[2] Из такой же заготовки можно сделать другую головоломку – «флексотрубку», см. «Квантик» №7 за 2018 год.

Загибаем квадрат №5 – схема Б, затем квадрат №4 – схема В. Квадрат №11 должен быть снизу, квадрат №3 – сверху. Далее загибаем квадраты №2 и №1, результат на схеме Г. Осталось лишь загнуть квадрат №12 и приклеить его к началу, где написано «КЛЕЙ». Результат на схеме Д.

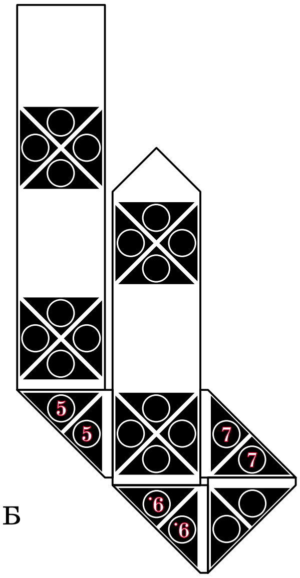


Схема Б

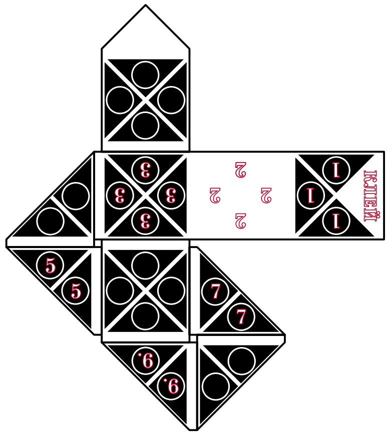


Схема В

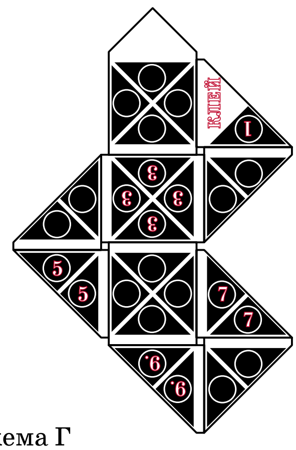


Схема Г

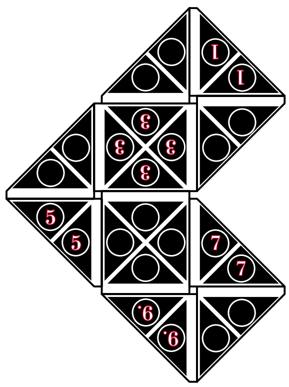
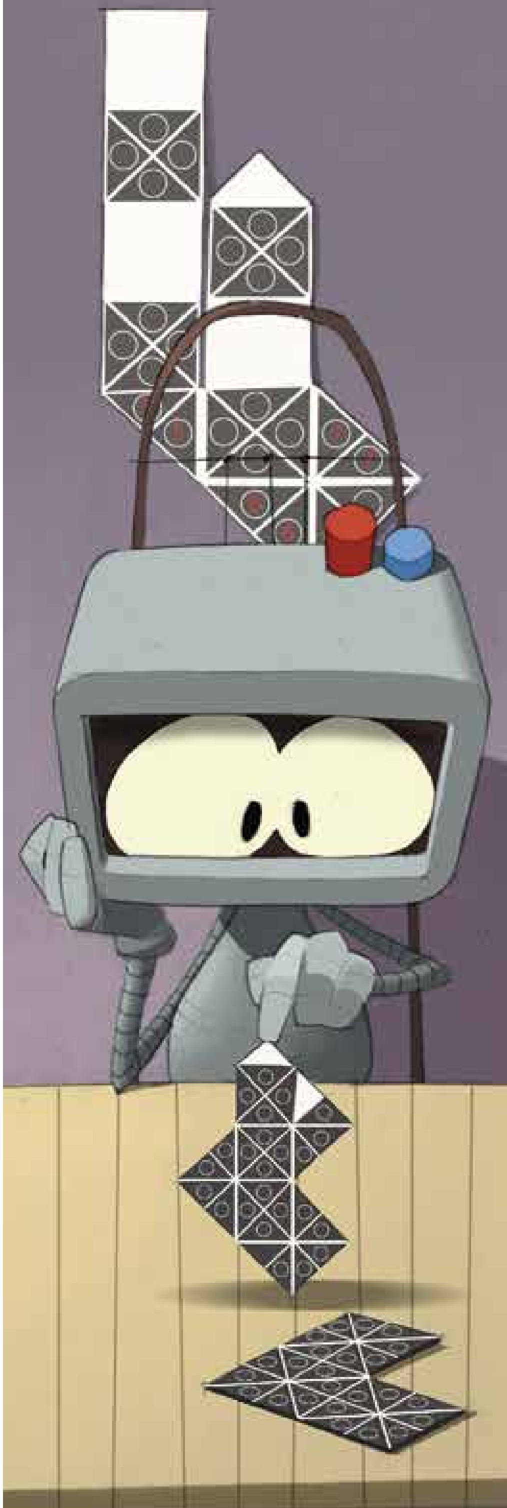
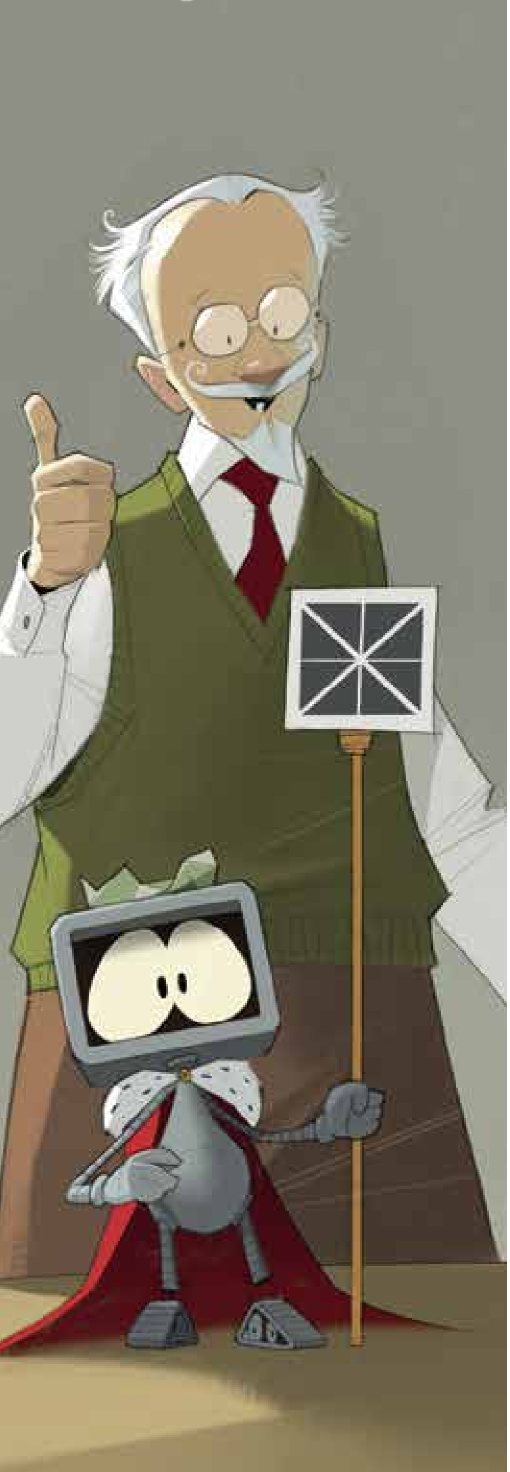


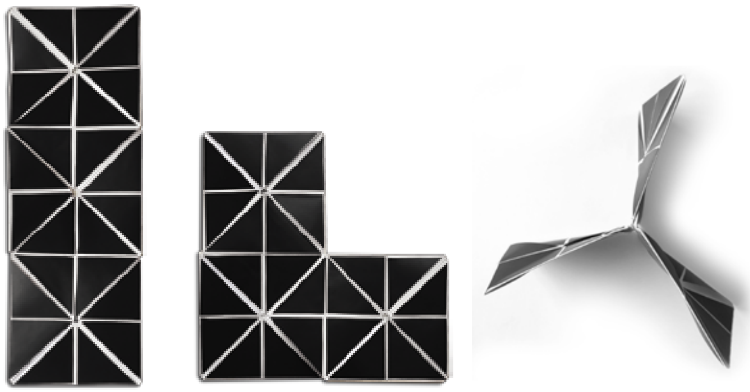
Схема Д

Получилась «ступенька», которая составлена из трёх квадратов. Три квадрата можно соединить сторонами ещё двумя способами: «палочкой» – это прямоугольник 3×1, и «пропеллером» – три квадрата с одной общей стороной. Соберите палочку и пропеллер. Решать будет проще, если круги будут всегда снаружи.





А ещё выверните головоломку наизнанку: соберите любую из трёх тримино кругами внутрь.



Есть секрет, как всего за пару секунд делается переход между палочкой и ступенькой, а также между ступенькой и пропеллером. На видео по ссылке kvan.tk/trimino-video есть авторские решения.

Если флексотримино запуталось клубком, то его можно распутать, делая большое кольцо:

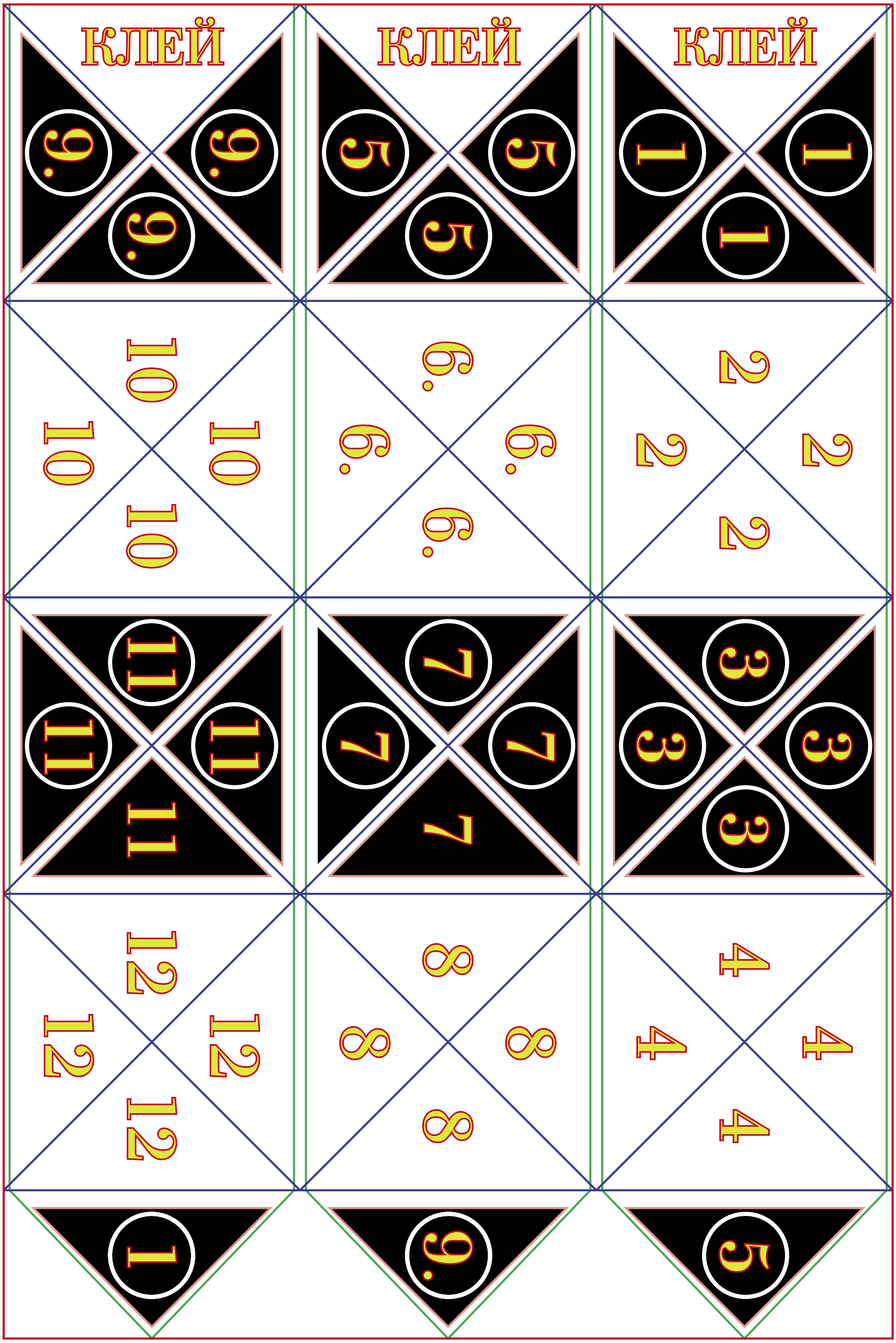
Если нет принтера, головоломку можно изготовить из листа А4. Начертите 12 квадратных клеток со стороной 7 сантиметров в виде таблицы 3×4 с диагоналями и язычками. Сначала сгибайте по линиям, потом вырезайте. На место кружочков можно наклеить по треугольнику из самоклеящейся бумаги. Гипотенуза должна быть чуть меньшего размера, чем сторона квадратного элемента заготовки. Оптимально: сторона квадрата – 7 сантиметров, а гипотенуза треугольника – 6 сантиметров.

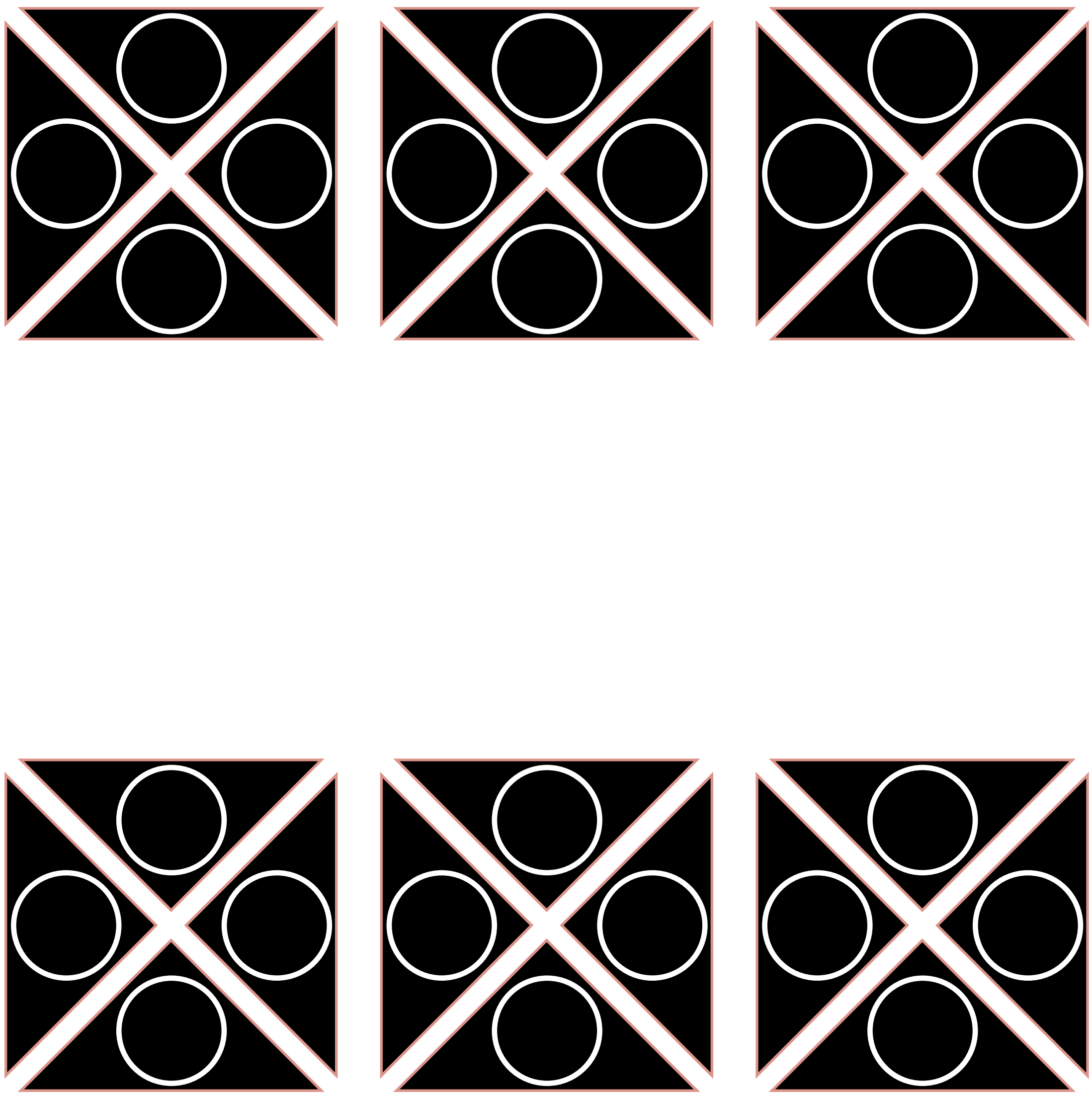
Экспериментируйте: сделайте аналогичную полоску с другим количеством звеньев или изготовьте головоломку из нескольких гексафлексагонов (о них читайте в «Квантике» № 4 за 2012 год).

Свои модели, видео и идеи присылайте на e-mail журнала «Квантик»: kvantik@mccme.ru

Фото автора и Валентины Асташкиной

Художник Алексей Вайнер


КЛЕЙ
КЛЕЙ
КЛЕЙ
9.
5
1
10
6.
2
11
7
3
12
8
4
1
9.
5



Игорь Акулич

ЕГО ПРОЩАЛЬНЫЙ ПОКЛОН: ОТВЕТЫ

1. *Из одинаковых квадратов составлен прямоугольник. Каждый квадрат произвольным образом разрезали на два равных прямоугольника. Можно ли раскрасить полученную карту, используя только красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы любые два прямоугольника с общим участком границы были разного цвета?*

Вот решение, которое предложил Максим Прасолов. Ответ: раскраска всегда возможна. Опишем, как это сделать. Цвета будем называть сокращённо, по их первым буквам – К, Ж и З соответственно.

Введём понятие «квадрат КЖ». Это означает, что если единичный квадрат разбит на два горизонтальных прямоугольника, то верхний из них – красный, а нижний – жёлтый. Если же он разрезан на два вертикальных прямоугольника, то левый – красный, а правый – жёлтый. Аналогично будем понимать выражения «квадрат ЖЗ» и «квадрат ЗК».

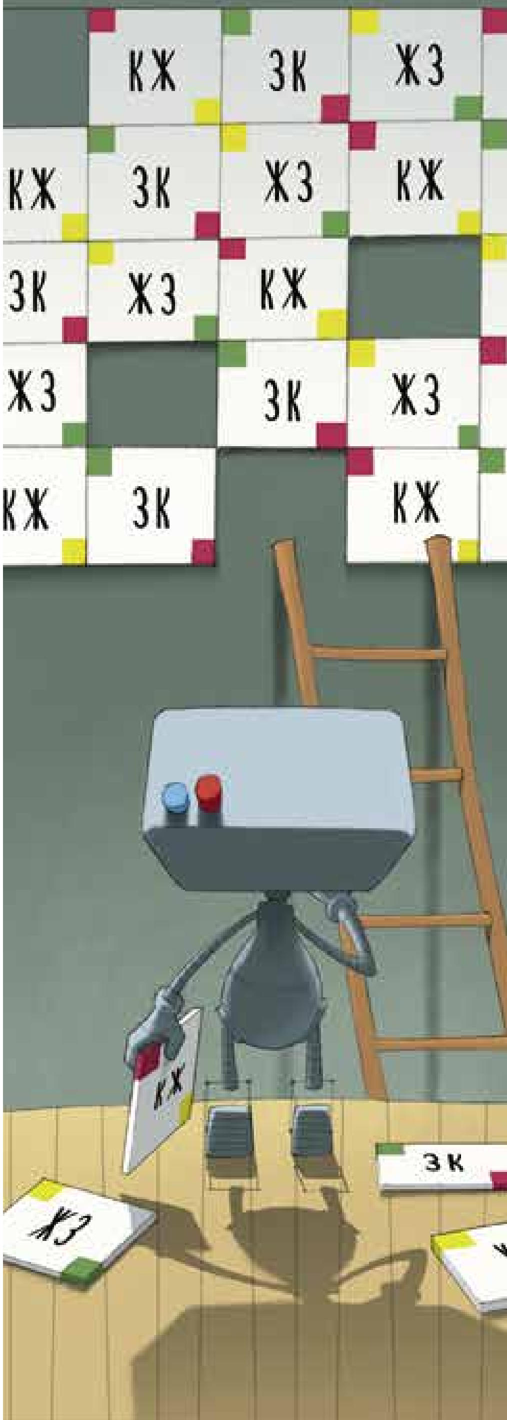
Возьмём теперь произвольный прямоугольник, разбитый на единичные квадраты, и в каждом квадрате укажем схему его окраски (пока не разбивая никакой квадрат на прямоугольники). Эта схема такова (она приведена для прямоугольника 5×8, но может быть естественным образом «растянута» на любой прямоугольник иных размеров):

КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК
ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ
ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ
КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК
ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ

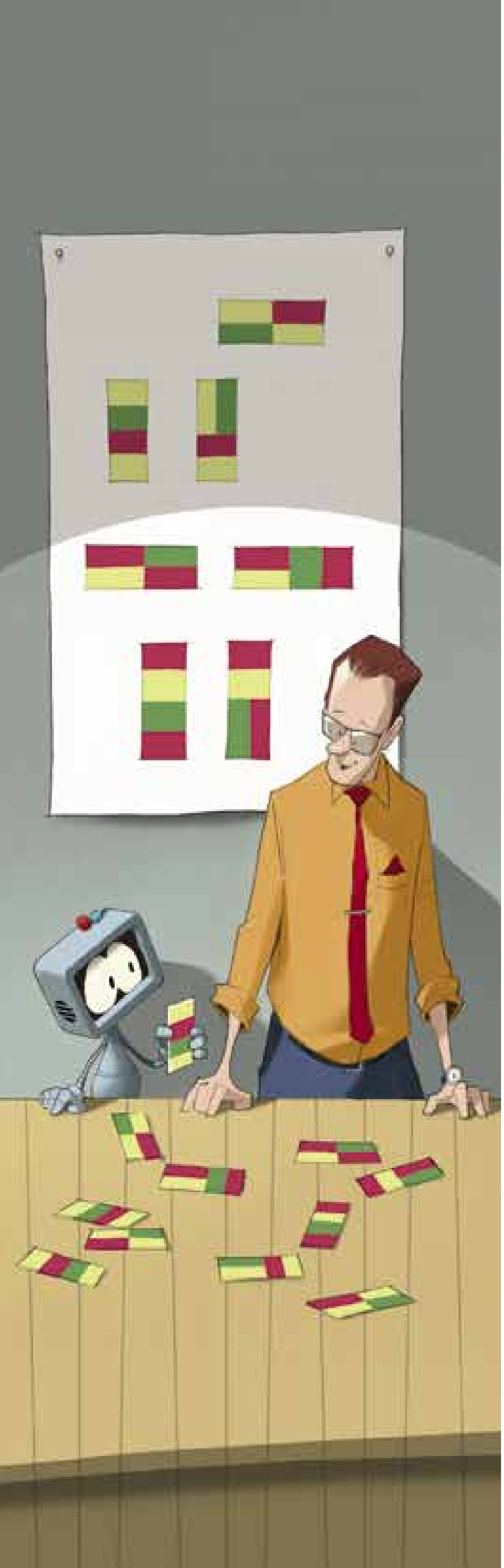
В каждой строке последовательно повторяются тройки квадратов КЖ, ЗК, ЖЗ, после чего снова КЖ и т.д. В столбцах (сверху вниз) – то же самое.

Оказывается, независимо от того, как разрезан каждый квадрат, – по вертикали или горизонтали – итоговая раскраска в три цвета будет «правильной».

Чтобы в этом убедиться, возьмём для начала лю-

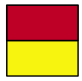


Решения задач из статьи «Его прощальный поклон» в «Квантике» №4 за 2022 год.

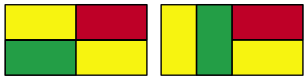


бой квадрат КЖ. Слева и сверху от него расположены квадраты ЖЗ, а справа и снизу – ЗК (если квадрат КЖ примыкает к границе, то соседей у него будет меньше четырёх, но от этого хуже не станет). Проверим, что при любых возможных разрезаниях соседей квадрата КЖ все прямоугольники, имеющие общий отрезок границы, будут окрашены в разные цвета.

Для определённости пусть в квадрате КЖ разрез выполнен по горизонтали, вот так:

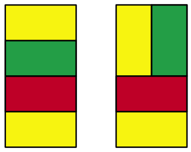


Рассмотрим соседствующий с ним слева квадрат ЖЗ. Проверим на корректность два варианта его разрезания: по горизонтали и по вертикали. Вот как он «стыкуется» с нашим центральным квадратом (слева – одна возможность, справа – вторая):

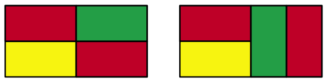


Таким же образом проверяем соседей квадрата КЖ сверху, справа и снизу. Вот что у нас получается.

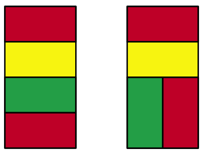
Сосед (ЖЗ) находится сверху:



Сосед (ЗК) находится справа:



Сосед (ЗК) находится снизу:



Как видим, всё в порядке. Но это, правда, только если центральный квадрат КЖ разрезан по горизонтали. А если по вертикали – тоже надо проверять?

Не надо! Ведь строки и столбцы прямоугольника, разбитого на единичные квадратики, совершенно равноправны. Картинка получится точь-в-точь такая же, но отражённая относительно диагонали.

Ладно, с квадратом КЖ разобрались – его соседи ведут себя вполне прилично (с точки зрения соседства по цветам). А квадраты ЖЗ и ЗК? Их тоже нет необходимости проверять, поскольку при «циклической смене цветов» (К на Ж, Ж на З, З на К или наоборот) получатся только что рассмотренные варианты, ибо и цвета тоже равноправны (если сомневаетесь – проверьте).

Итак, тремя цветами всегда можно обойтись.

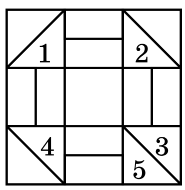
P.S. А что, если каждый квадратик разбивается вертикальными или горизонтальными отрезками не на два, а **на n равных прямоугольников, где n – натуральное число. При каких n получившуюся карту всегда можно «правильно» раскрасить в три цвета?**

Случай $n=2$ уже рассмотрен. Для $n=1$ задача тривиальна – получается обычная клетчатая доска, её можно раскрасить даже в два цвета. А что при $n>2$?

Нетрудно сообразить (и потом проверить), что для чётных n такая раскраска возможна, причём для неё можно применить всё тот же алгоритм (только здесь, например, квадрат КЖ означает раскраску нарезанных из него прямоугольников попеременно в красный и жёлтый цвета – слева направо или сверху вниз). Для нечётных же n вопрос остаётся открытым.

2. *Из одинаковых квадратов составлен прямоугольник. Каждый квадрат произвольным образом разрезали на две части – либо равные прямоугольники, либо равные треугольники. Можно ли раскрасить полученную карту, используя только красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы любые две части с общим участком границы были разного цвета?*

Вот решение, которое предложил Александр Перепечко. Здесь ответ прямо противоположный: не каждую такую карту удастся правильно раскрасить. Чтобы в этом убедиться, предположим противное и рассмотрим схему разрезания прямоугольника 3×3 на рисунке справа (при этом не имеет значения, как разрезан его центральный квадратик, так что мы это и не указываем).



Некоторым из треугольников присвоим номера от 1 до 5, как на рисунке. Пусть треугольник 1 окрашен в какой-то цвет, для определённости – в красный. Тогда примыкающие к нему справа два прямоугольника должны быть жёлтым и зелёным, и потому треугольник 2 – тоже красный. Аналогично, треугольники 3, 4 и 5 – опять-таки красные. Но треугольники 3 и 5 граничат между собой – противоречие.

Художник Алексей Вайнер

Марина Анатоль

ВИКИНЫ ЗАКАВЫКИ

Алфавит замуровали

– Знаешь, бабушка, я теперь выучила весь алфавит! – заявила Вика, запрыгивая в кроватку. – Там тридцать три буквы, и мы их все с мамой замуровали. А волшебный ключик от нашей тайны есть только у нас.

– Зачем же вы так поступили с буквами, как ты будешь теперь ими пользоваться?

– Очень даже просто, – сказала Вика. – У каждой буквы есть свой номерочек, ведь я уже все цифры знаю. А открываем мы волшебным ключиком. Ещё мама сделала такую формочку из пяти клеточек, и я могу туда класть буквы, получаются слова.

Вот так получилось мамино имя

С	В	Е	Т	А

– А, ну это другое дело. Так ты скоро научишься читать.

– А ещё мама сделала формочку из десяти клеток, чтобы я туда могла класть цифры, их десять разных цифр:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

А каждой буквы и каждой цифры у нас много-много.

Вот что у меня получилось:

1	4	0	0	2	6	1	2	0	1

– Ты наугад ставила цифры?

– Ну да, – кивнула головой Вика, – а мама посмотрела, засмеялась и сказала, что мы можем сделать интересную загадку. Вот такую:

Если вместо 0 0 поставить две другие цифры, то получится маленький пищащий зверик, а если же вместо 0 0 поставить какую-то другую цифру и 0, то получится большой рычащий зверь.

Какие это зверик и зверь?

– Я думала-думала и отгадала, – сказала Вика, – а потом, когда стала менять эти два нуля, ошиблась и поставила случайно один и шесть туда, где было два нуля, а хотела поставить другие цифры.

Мама сказала, что это тоже здорово, потому что можно добавить ещё один вопрос в нашу задачку:

Какое крохотное существо получилось при таком наборе цифр?

1	4	1	6	2	6	1	2	0	1

– Вот, бабушка, целых три трудных вопроса тебе! Сможешь правильно ответить?

– Наверное, не смогу, у меня ведь нет волшебного ключика.

А вы, ребята, сможете?

Ответ в следующем номере

Художник Ольга Демидова

XXXIII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

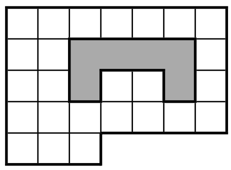
ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Очередной Математический праздник для 6 и 7 классов прошёл 27 февраля 2022 года. В двух его версиях («классической» и «вертикальной») приняли участие более 18 000 московских школьников. Приводим избранные задачи (в скобках после номера задачи указаны классы, в которых она предлагалась). Подробности – на сайте mccme.ru/matprazdnik/

1 (6). Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть.

Т. В. Казицына

2 (6). Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рисунок). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

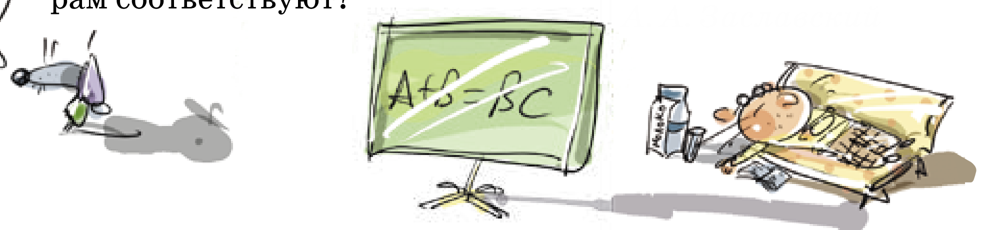


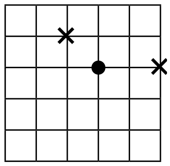
М. А. Евдокимов

3 (6). Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки.

А. В. Шаповалов

4 (6, 7). Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «$A + B = ?$», то в случае, когда $A = 9$, $B = 1$, $C = 0$, ответом будет «$A + B = BC$». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?





5 (6, 7). Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте. Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше. (Доказательство не требуется.)

Т. В. Казицына

6 (6). Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася – пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася?

А. А. Заславский

7 (7). В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70^\circ$ и $\angle B = 100^\circ$. Чему могут быть равны углы C и D?

М. А. Волчкевич

8 (6, 7). Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные – направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге?

А. В. Шаповалов

Художник Сергей Чуб

LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил
Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Второй (городской) тур очередной олимпиады для 6–8 классов прошёл 13 февраля 2022 года, на него приглашались победители районного тура.

Художник Сергей Чуб

Избранные задачи II тура

1 (6 класс). Существует ли 100-значное число без нулей в записи, которое кратно всевозможным суммам своих цифр (в частности, всем своим цифрам)?

Виктор Мигрин

2 (6 – 8 классы). 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек – 4 балла; если решили 2 человека – 2 балла; если 3 или 4 человека – 1 балл; если больше четырёх – 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

Ольга Иванова

3 (7 класс). Очутившись на необитаемом острове, в первый же день Робинзон Крузо встретил туземца Пятницу. Робинзон знает, что Пятница по пятницам говорит только правду, а в другие дни лжёт. Каждый день Робинзон Крузо задаёт Пятнице один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такой-то день недели?». Может ли Робинзон за 4 дня гарантированно узнать, в какой день недели он очутился на необитаемом острове?

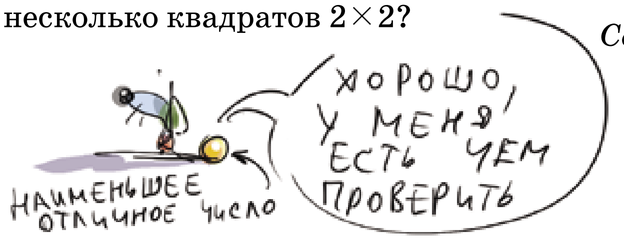
Дмитрий Ширяев, Ольга Бадажкова

4 (7 класс). Натуральное число n называется *отличным*, если оно имеет хотя бы один нечётный простой делитель и сумма любых двух его простых делителей (в том числе одинаковых) является делителем числа n. Докажите, что любое отличное число делится на наименьшее отличное число.

Андрей Солынин

5 (6 класс). Можно ли составить какой-нибудь прямоугольник, взяв по одному квадрату 1×1, 3×3, 5×5, ..., 85×85 и 2021×2021 и добавив к ним несколько квадратов 2×2?

Сергей Рукшин



КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения III тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 июня**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Так, автор задачи 11 – пятиклассник Владимир Афанасьев. Желаем успеха!

III ТУР

11. АЛЬФУ иногда бывает нужно сократить. ГРОМКАЯ АЛЬФА иногда здорово мешает спать. Какие слова мы заменили на ГРОМКАЯ АЛЬФА?

В. Ю. Афанасьев

12. Одна не слишком грамотная деревенская старушка записывала название учреждения, где работала её дочь, заменяя две буквы на конце буквой *Ч*. Напишите это название правильно.

С. В. Дьяченко

14. В древнерусском языке некий глагол имел два противоположных значения. В современном языке сохранилось только одно из них – «забыть». Какое прилагательное доказывает, что раньше у этого глагола было и противоположное значение?

С. И. Переверзева

13. Если человеку не *X*, можно точно сказать, что ему ничего не *Y*.

X и *Y* – возвратные глаголы в форме настоящего времени, различающиеся одной буквой. Найдите *X* и *Y*.

И. Б. Иткин

15. На юмористической картинке, опубликованной в сообществе начинающих поэтов, молодой человек поглощает содержимое подушки. Какими двумя словами подписана эта картинка?

Е. Г. Туманова

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, II тур («Квантик» № 3, 2022)

6. *Прочитайте стихотворение Владимира Маяковского «Рассказ литейщика Ивана Козырева о вселении в новую квартиру». По наблюдению одного преподавателя, это стихотворение доказывает, что гласная в корне одного русского слова, которая обычно считается непроверяемой, на самом деле является проверяемой. Напишите это слово.*

В стихотворении Маяковского есть такие строки: *На кране / одном / написано: «Хол.», // на кране другом – / «Гор.»*. Надпись «Гор.» вполне может служить проверочной для корневой гласной в прилагательном ***горячий***. Конечно, сокращение «Гор.» – это не совсем «слово», но безударные гласные можно проверять буквально чем угодно – лишь бы получалось правильно.

7. *Удивительным образом, это отглагольное существительное имеет значение «конец», а образованное от него прилагательное, наоборот, значение «начальный». Напишите эти существительное и прилагательное.*

На самом деле, факт, на котором основана задача, не столь удивителен, как кажется на первый взгляд. Что считать «началом», а что «концом» того или иного предмета (и даже отрезка времени), в известном смысле зависит от точки зрения. Наверняка многие из вас слышали, что с исторической точки зрения сами слова *начало* и *конец* происходят от одного корня. И даже если не обращаться к истории, корень *-кон-* можно найти не только в слове *конец*, но и в слове *исконный*, то есть «изначальный». Ну, а в задаче речь идёт о словах ***исход*** и ***исходный***: мы можем сказать, например, *на исходе* (= в конце) *зимы* и *исходная* (= начальная) *позиция*.

8. *Отгадайте загадку маленького Лёвы:*

Перецветает раз миллион –
Это, конечно, _______.

Лёва пока не знает, что в русском языке нет глагола *перецветать*, но смысл этого глагола вполне понятен. Найти ответ помогают также размер и рифма. Тот, кто меняет цвет бесчисленное множество раз, – это, конечно, **хамелеон**.

9. *Хорошо известно, что в русском языке время может представляться как жидкость. Об этом свидетельствует, например, выражение* время течёт. *А какое выражение позволяет сделать вывод, что время в русском языке может представляться как ткань?*

Речь идёт о выражении ***выкроить время***, то есть с трудом найти время для чего-то в плотном графике. В прямом значении глагол *выкроить* употребляется только по отношению к материалу для шитья, а это чаще всего ткань.

10. *Найдите самое короткое слово (любой части речи, необязательно в словарной форме), в котором есть три буквы «я».*

Это слово – ***являя*** (деепричастие от глагола *являть*).

НАШ КОНКУРС, VII тур («Квантик» № 3, 2022)

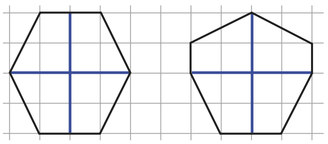
31. *В этом году в феврале встретилась дата-палиндром: 22.02.2022 (цифры слева направо идут в том же порядке, что и справа налево). Найдите следующую ближайшую дату-палиндром (и докажите, что она действительно ближайшая).*

Ответ: 03.02.2030. В этом году другой даты-палиндрома уже не будет (ведь 4 цифры года определяют всю дату), и в годы с 2023 по 2029 тоже: при чтении в обратном порядке они дадут числа, которые больше количества дней в месяцах (32, 42, ..., 92). А в 2030 году будет 03.02.2030.

32. *а) Нарисуйте на клетчатой бумаге выпуклый шестиугольник, вершины которого лежат в вершинах клеток, а стороны идут не обязательно по сторонам клеток, который можно двумя прямыми разрезать на четыре равные части. (Не забудьте указать разрезы.)*

б) Решите ту же задачу для выпуклого семиугольника.

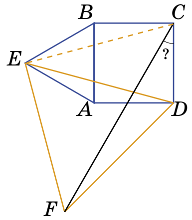
Ответ: см. рисунки.



33. *В турнире по теннису участвовало N теннисистов, каждый сыграл с каждым один матч. В итоге оказалось, что все выиграли поровну матчей (ничьих в теннисе не бывает). В следующем году теннисистов стало на одного больше, и снова каждый сыграл с каждым один матч. Могло ли и теперь оказаться, что все выиграли поровну матчей?*

В первый год было сыграно $N(N-1)/2$ матчей, а значит, и побед было столько же, поэтому каждый выиграл по $(N-1)/2$ раз. Так как это целое число, N нечётно. Аналогично, в следующем году было сыграно матчей и одержано побед $(N+1)N/2$, а значит, каждый выиграл $N/2$ раз, то есть N чётно – противоречие.

34. *Квадрат и два равносторонних треугольника расположены так, как на рисунке. Найдите угол, отмеченный знаком вопроса.*



Ответ: 30°. Проведём отрезок CE. Треугольники BCE и ADE равны, так как в каждом есть по две равные синие стороны с углом $90^\circ+60^\circ=150^\circ$ между ними. Тогда $CE=ED=EF$. При этом $\angle BEC=\angle AED=(180^\circ-150^\circ)/2=15^\circ$, значит, $\angle CED=60^\circ-15^\circ-15^\circ=30^\circ$, и $\angle CEF=30^\circ+60^\circ=90^\circ$. Итак, CEF – прямоугольный равнобедренный треугольник, откуда $\angle ECF=45^\circ$ и $\angle DCF=90^\circ-\angle BCE-\angle ECF=90^\circ-15^\circ-45^\circ=30^\circ$.

35. *У Квантика есть белая клетчатая полоска размером 1×33 клеток. Квантик окунул полоску левым концом в чёрную краску, и несколько первых клеток (не менее одной, но и не все 33) стали чёрными, а остальные остались белыми. Ноутик не видит полоску, но может за один вопрос узнать цвет любой клетки (назвав, какая она по счёту слева). Как ему за 5 вопросов узнать номер самой правой чёрной клетки?*

Назовём *хорошей* часть полоски между самой правой из известных нам чёрных клеток и самой левой из известных нам белых (так, вначале мы знаем, что самая левая клетка – чёрная, а самая правая – белая; 31 клетка между ними образует хорошую часть). Каждым вопросом будем узнавать цвет центральной клетки хорошей части: если он чёрный, то самая правая чёрная клетка лежит правее неё, а если белый – то левее. После первого такого вопроса хорошая часть сузится до $(31-1):2=15$ клеток, после второго – до $(15-1):2=7$ клеток, после третьего – до 3, после четвёртого – до 1 клетки; узнав её цвет пятым вопросом, вычислим и самую правую чёрную клетку.

ГЕОГРАФИЯ ПО-КИТАЙСКИ («Квантик» №4, 2022)

Сравнивая названия на китайском и русском языках, приходим к выводу, что обычно иероглиф соответствует одному слогу названия: восемь китайских названий состоят из двух иероглифов и соответственно восемь русских переводов – из двух слогов; три китайских названия состоят из трёх иероглифов – среди русских переводов находим два трёхсложных названия и одно, состоящее из трёх слов (Северный Ледовитый океан). Видимо, в последнем случае русское название соответствует не звучанию иероглифов, а их значению.

Только один иероглиф повторяется в китайских названиях трижды – 山 . Видимо, ему соответствует трижды повторяющийся в русских переводах слог «шань». В русских словах он дважды стоит на первом месте (Шаньси, Шаньдун), один раз – на втором (Тянь-Шань). Такой же порядок в китайских названиях, из чего делаем вывод, что направление записи иероглифических слов в строке – слева направо. Итак, 天山 – Тянь-Шань. Тогда 天津 – Тяньцзинь. Ещё 山 встречается в словах 山西 и 山东. Иероглиф 东 больше не повторяется, а 西 встречается в слове 墨西哥. Видимо, 山西 – Шаньси, а 墨西哥 – Мексика (а для 山东 остаётся Шаньдун).

Сравнивая вторые элементы оставшихся слов, видим, что названиям 北京 и 南京 соответствуют Пекин и Нанкин. Но кто их них кто? Иероглиф 北 встречается ещё в слове 北冰洋. Оно трёхчастно, так что это либо Северный Ледовитый океан, либо Парагвай. Посмотрим на оставшееся слово из трёх иероглифов: 巴拉圭. Такое же начало имеет и название из двух иероглифов: 巴黎. Видимо, это Парагвай и Париж. Тогда 北冰洋 – Северный Ледовитый океан. Вряд ли в названия городов Пекин или Нанкин входят элементы «ледовитый» или «океан», так что видимо 北 – «северный». Пекин расположен севернее Нанкина, поэтому 北京 – это Пекин, а 南京 – Нанкин (и действительно, в буквальном переводе это «Северная столица» и «Южная столица»).

Ответ: 山西 – Шаньси, 上海 – Шанхай, 北京 – Пекин, 天山 – Тянь-Шань, 巴黎 – Париж, 墨西哥 – Мексика, 天津 – Тяньцзинь, 北冰洋 – Северный Ледовитый Океан, 南京 – Нанкин, 巴拉圭 – Парагвай, 山东 – Шаньдун. Иероглиф 北 означает «север», «северный».

КУДА ПРОПАЛА ТЕНЬ («Квантик» №4, 2022)

То, что тень есть, когда палка над водой или под водой, не удивительно. Надо понять, что происходит с тенью, когда палка лежит на поверхности воды (рис. 1): почему касание палки с поверхностью воды приводит к освещению пространства за тенью. Дело в том, что вода работает рассеивающей линзой, так как её по-

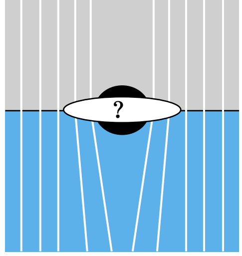


Рис. 1

верхность искривлена около смоченной водой палки (рис. 2).

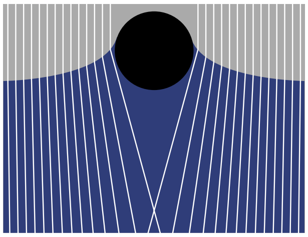
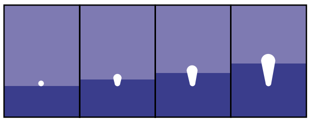


Рис. 2

ИГЛЫ ИЗ ПУЗЫРЬКОВ

Вымораживаемому воздуху проще улетучиваться в уже существующие пузырьки, чем создавать новые (иначе пузырьки вряд ли достигли бы заметных размеров, если вообще появлялись бы). Пузырёк получается постоянно обмороженным со всех сторон, кроме одной (где ещё вода), которую лёд всё никак не закроет, потому что пузырь постоянно подрастает (см. рисунок, сравните с фото льда, пытавшегося, но не успевшего сомкнуться над растущими воздушными пузырьками-иглами).



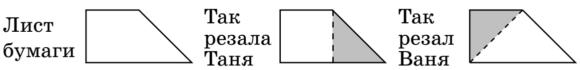
ТЕСНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО РАКОВ-ОТШЕЛЬНИКОВ

Раки-отшельники пользуются чужими раковинами и по мере своего роста меняют их на более просторные. Если рак нашёл слишком большую раковину на смену, он может подождать сородича, которому она подойдёт, а сам забрать его раковину. Цепочка таких обменов может быть длинной, на захватывающем видео по ссылке kvan.tk/crabs – один из примеров.

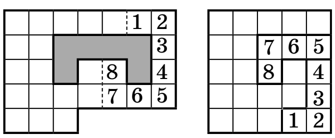
XXXIII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК.

Избранные задачи

1. Вот один из возможных примеров:



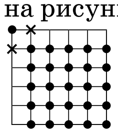
2. См. рисунки.



3. Ответ: 30 см. Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одном отрезке прямой, причём первая (А) посередине. После прыжка (Б) отрезок уменьшится в два раза. Лягушки (Б) и (В) обе прыгнут из конца отрезка, но, когда будет прыгать (В), отрезок будет в два раза меньше, значит, и прыжок – в два раза короче.

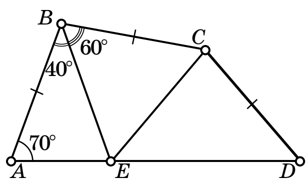
4. Сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому, назвав все десять букв, мы узнаем, какими буквами зашифрованы цифры 4 и 5. Исключив эти буквы и спросив про сумму остальных восьми, мы узнаем, как зашифрованы цифры 3 и 6. И так далее: в каждом вопросе будем спрашивать про сумму ещё не расшифрованных букв.

5. Ответ: 26, как на рисунке.



6. Ответ: тоже в одиннадцатый. В первый день прошло 10 встреч, и, стало быть, было выдано 10 маек. Одиннадцатая майка была выдана лишь в одиннадцатый день турнира, то есть у Пети и ещё 9 участников в первые 10 дней турнира не было ни одной победы. Это возможно только в том случае, когда эти участники (назовём их невезучими) в эти дни не играли друг с другом, то есть каждый из них сыграл с 10 остальными участниками (теми, кому в первый день досталась майка) и всем им проиграл. Но тогда в оставшиеся дни невезучие будут играть между собой. В частности, в одиннадцатый день они разобьются на 5 пар, и победители этих пар получат майки с номерами с 11 по 15.

7. Ответ: 60° и 130° или 140° и 50°. Отметим на AD точку E так, что угол ABE равен 40°. Тогда $\angle AEB = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$, следовательно, треугольник ABE равнобедренный, $AB = BE$. В треугольнике BCE стороны BC и BE равны, $\angle CBE = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$, значит, треугольник равносторонний, и $CE = BC = AB$. Значит, либо $E = D$, и в этом случае $\angle C = 60^\circ$, а оставшийся угол равен $\angle AEB + \angle BEC = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$, либо CED – равнобедренный треугольник с углом при основании $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. В этом случае $\angle D = 50^\circ$, а оставшийся угол равен $\angle BCE + \angle DCE = 60^\circ + (180^\circ - 50^\circ - 50^\circ) = 140^\circ$.



8. Ответ: 98. Будем считать, что сержант построил шеренгу между двумя столбами. После первой команды каждый новобранец смотрит либо в затылок соседу, либо в лицо, кроме двух солдат с краю, которые могут смотреть на столбы.

Если солдат смотрит в затылок соседу, то после разворота этот сосед будет смотреть в затылок ему. Поэтому число смотрящих в затылок не поменяется. Крайний солдат, смотревший на столб, после разворота не будет этого делать; напротив, если он не смотрел на столб, то после разворота будет. Таким образом, количество смотрящих на столб либо не изменится (был 1 и останется 1), либо увеличится на 2 (было 0, станет 2), либо уменьшится на 2 (было 2, станет 0). Так как общее число солдат постоянно, число смотрящих в лицо также либо не изменится, либо увеличится или уменьшится на 2.

По условию, число солдат, смотрящих в лицо, сначала составляло шестую часть числа смотрящих в затылок, а потом седьмую часть. Значит, их количество уменьшилось (и, стало быть, уменьшилось на 2). С другой стороны, оно изменилось на $1/6-1/7=1/42$ от неизменного числа смотревших в затылок. То есть смотревших в затылок было $2\cdot 42=84$ человека, а смотревших в лицо друг другу до разворота было $84:6=14$. Смотрящих на столбы при этом не было. Таким образом, общее число новобранцев $84+14=98$.

LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи II тура

1. Ответ: нет. Какая-то из цифр присутствует не меньше 10 раз, поэтому число делится на 10, то есть содержит в записи 0.

2. Каждая задача даёт участникам в сумме не более 4 баллов. Значит, суммарный результат всех участников – не более 44 баллов. Но если бы все результаты были различны, то их сумма оказалась бы не меньше $0+1+2+\ldots+9=45$.

3. Ответ: да, может узнать. Что ответит Пятница, если мы спросим: «Верно ли, что сегодня понедельник?» Возможны два ответа: если сегодня действительно понедельник, то мы услышим ответ «нет», если сегодня пятница – тоже «нет»; а в остальные дни Пятница скажет «да».

Пусть тогда Робинзон каждый раз спрашивает про понедельник (но не более трёх дней подряд). Как только он услышит ответ «нет», это значит, что сейчас понедельник или пятница, завтра наступит вторник или суббота, и Робинзон сможет отличить эти дни, например спросив про вторник. Если же Робинзон три раза подряд услышал ответ «Да», то три раза подряд были не понедельник и не пятница. А это возможно, лишь если это были вторник, среда и четверг.

4. Пусть N – любое отличное число. Докажем, что N делится на $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7$. Пусть p – минимальный нечётный простой делитель числа N.

1) N делится на $p+p=2p$ и поэтому чётно;

2) N делится на $p+2$, причём $p+2$ – простой делитель числа N (если бы это было не так, число p не было бы минимальным простым делителем: потому что любой делитель числа $p+2$ не превосходил бы $(p+2)/2$, а это число меньше p).

3) N делится на $(p+2)+p=2p+2$, а значит, и на $p+1$. Тогда число $p+1$ – это степень 2 (иначе у него есть нечётный делитель, меньший p).

Итак, среди чисел p, $p+1$, $p+2$ два крайних – простые, а среднее – степень двойки. Поскольку одно из трёх последовательных чисел обязательно делится на 3, единственный возможный случай – это числа 3, 4, 5.

Таким образом, число N кратно 2, 3, 5, и тогда оно делится ещё и на $5+2=7$, $3+5=8$ и $2+7=9$. Значит, N делится на $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7$.

Осталось заметить, что число $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7$ – само отличное (проверяется перебором пар его простых делителей, да мы его почти уже сделали). И раз остальные отличные на него делятся, оно является наименьшим отличным числом.

5. Ответ: нет. Пусть удалось составить прямоугольник. Заметим, что всего в условии дано чётное количество квадратов с нечётной стороной (44), поэтому площадь прямоугольника, составленного из них и квадратов 2×2, должна быть чётной. Как нетрудно проверить,

$$1+3+5+\ldots+85<2021. \qquad (*)$$

По неравенству (*), горизонтальная проекция большого нечётного квадрата не может быть полностью покрыта горизонтальными проекциями маленьких нечётных квадратов. Поэтому есть вертикальный ряд клеток, пересекающий большой квадрат и не пересекающий маленьких. Тогда в этом ряду нечётное число клеток. Аналогично можно отыскать горизонталь, состоящую из нечётного числа клеток. Значит, прямоугольник имеет нечётные стороны, но тогда его площадь нечётна.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач IX тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июня в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

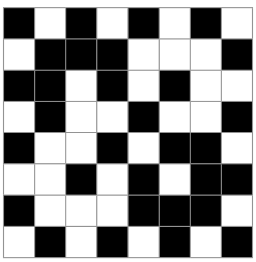
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

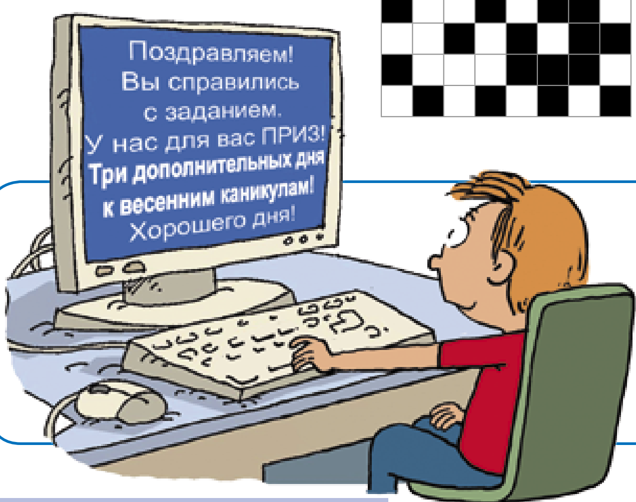
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IX ТУР

41. Есть бракованная шахматная доска 8×8 с неправильной раскраской (см. рисунок). Можно ли разрезать её на две части и склеить из них доску с правильной шахматной раскраской (соседние по стороне клетки должны быть окрашены в разный цвет)?





42. На экране компьютера горит число 2022. Существует ли такое натуральное число N, что сколько бы раз ни вставить его в середину между цифрами 0 и 2, число на экране компьютера всегда будет делиться на 2022?

Авторы: Михаил Евдокимов (41, 42, 45), Александр Грибалко (43), Борис Френкин (44)

43. а) В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета. Некоторые монеты фальшивые (весят одинаково, но легче настоящих), остальные – настоящие (тоже весят одинаково). Известно, что фальшивые монеты занимают целиком либо строку, либо столбец, либо диагональ. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти хоть одну фальшивую монету?

б) Решите ту же задачу для квадрата 9×9, если разрешено сделать два взвешивания.

44. Десять раков-отшельников живут в раковинах. Все раки разного размера, и чем больше рак – тем больше его раковина. Раки растут с одинаковой скоростью и хотят менять раковины на более просторные. Если они нашли пустую раковину, её забирает самый большой рак из тех, у кого раковина меньше этой (если такой рак найдётся). В его прежнюю раковину селится следующий (меньший) по размеру, в раковину этого рака – следующий по размеру и т.д. Оставшаяся раковина выбрасывается.

Через некоторое время не осталось ни одной раковины из первоначальных. Обязательно ли каждая имеющаяся раковина больше каждой из первоначальных?

45. В выпуклом восьмиугольнике $ABCDEFGH$ все углы равны. Внутри него выбрали произвольную точку O. Докажите, что сумма расстояний от точки O до прямых, содержащих стороны восьмиугольника, не зависит от выбора точки O.

Художник Николай Крутиков

КТО ВЗЯЛ ЛОДКУ?

Несколько друзей-рыбаков заперли лодку на такой замок.

ЗАЧЕМ?

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 22005
9 772227 798220