№ 9 | сентябрь 2022

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9
сентябрь
2022

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА И ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

БЕЗЗАКОНИЕ НА ЦВЕТКАХ

ЦИКЛОНЫ И АНТИЦИКЛОНЫ

Enter

Открылась ПОДПИСКА НА 2023 ГОД

продолжается подписка на оставшиеся месяцы 2-го полугодия 2022 года

подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в почтовых отделениях и через интернет

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ

Почта России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

Агентство АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

БЕЛПОЧТА:
kvan.tk/belpost

по этим ссылкам вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ

Почта России:

Каталог Почты России
индекс **ПМ989** – годовая
индекс **ПМ068** –
по месяцам полугодия

Почта Крыма:

Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя
индекс **22923**

БЕЛПОЧТА:

Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан»
индекс **14109** – для физических лиц
индекс **141092** – для юридических лиц

Подробно обо всех способах подписки, в том числе о подписке в некоторых странах СНГ и других странах, читайте на нашем сайте **kvantik.com/podpiska**

НАШИ НОВИНКИ

Уже поступил в продажу
Календарь загадок
от журнала «Квантик» на 2023 год

Ищите календарь в интернет-магазинах:
biblio.mccme.ru, kvantik.ru, my-shop.ru, ozon.ru, WILDBERRIES, Яндекс.маркет
и других (полный список магазинов на **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

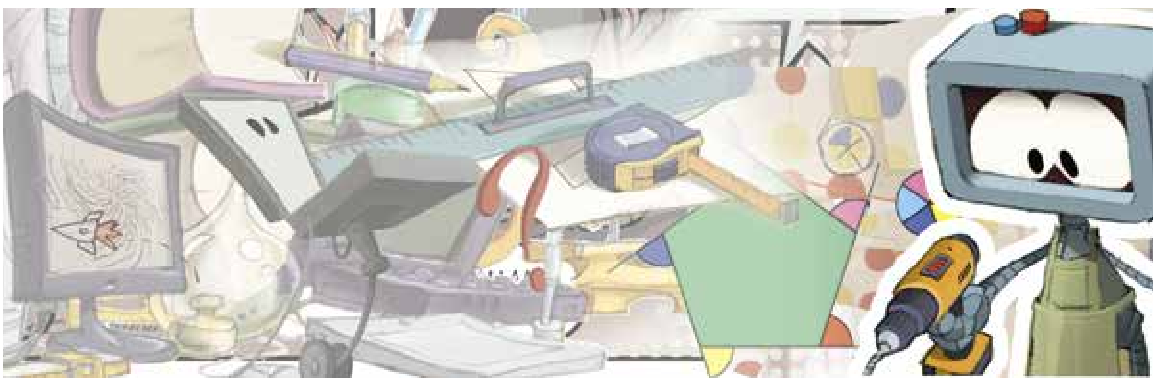
Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 29.07.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



Григорий Мерзон

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА и ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

Таблица математической черепахи

В нижней левой клетке доски сидит математическая черепаха. Каждым ходом она умеет сдвигаться на клетку вправо или на клетку вверх (рис. 1). Запишем в каждой клетке таблицы, сколькими способами до неё может добраться черепаха.

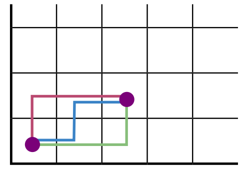


Рис. 1. Все пути черепахи в третью клетку второй строки

1	3	?	?	?
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Рис. 2. Начинаем заполнять «таблицу математической черепахи»

Ясно, что в любой клетке первой строки стоит число 1 (в неё можно попасть, только двигаясь всё время вправо). Догадались, какие числа стоят во второй строке? Правильно – последовательные натуральные: 1, 2, 3, ... (рис. 2).

Удобно заполнять клетки числами одну за другой: в каждую клетку черепаха может прийти либо слева, либо снизу – поэтому число в каждой клетке равно сумме чисел в её «соседях» слева и снизу (рис. 3).

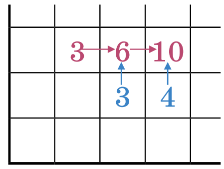
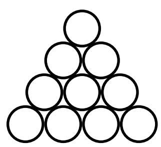
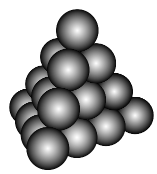


Рис. 3. Число 6 получается как сумма чисел под ним и слева от него; далее аналогично получается число 10...

Например, в третьей строке стоят числа 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, ... – их ещё называют *треугольными* (рис. 4, *а*). А в четвёртой строке стоят суммы последовательных треугольных чисел – это количества шариков в пирамидках (рис. 4, *б*).



а) 4-е треугольное число $1+2+3+4=10$



б) 4-е «тетраэдральное число» $1+3+6+10=20$

Рис. 4.

Задача 1. Найдите формулу для N-го треугольного числа.

Задача 2. Докажите, что в черепашьей таблице все числа на диагонали (кроме левого нижнего) – чётные.

Кодируем пути

Каждый путь черепахи можно закодировать «программой» (последовательностью) из букв П («вправо») и В («вверх»). Если конец пути расположен на X клеток правее и на Y клеток выше начала, то в программе будет X букв «П» и Y букв «В», всего $X+Y$ (рис. 5).

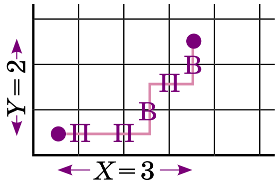


Рис. 5. Путь черепахи в 4-ю клетку 3-й строки («в клетку (3,2)»), соответствующий «программе» ППВПВ

Так значит, каждой клетке можно дать своё имя! Оно состоит из двух чисел: первое – сколько на пути черепахи в эту клетку будет ходов вправо, а второе – сколько ходов будет вверх. Числа будем записывать в скобках через запятую. Например, (0, 0) – это левый угол (никуда идти не надо).

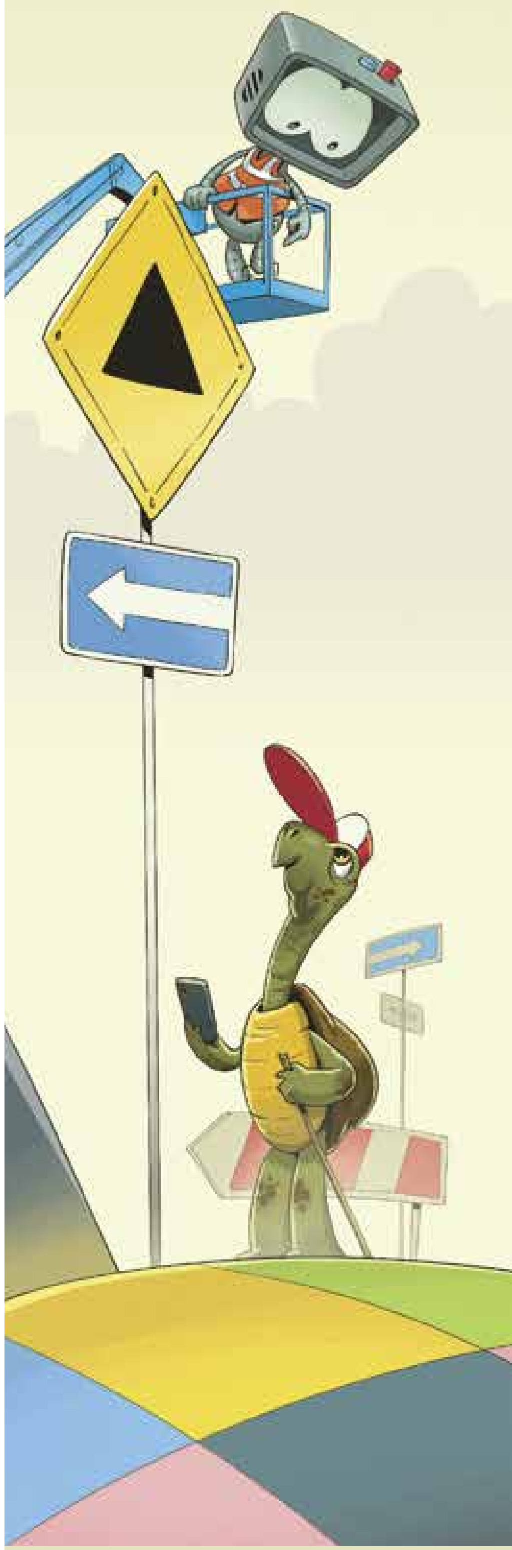
Итак, в клетке (X, Y) черепашьей таблицы стоит количество программ из X букв «П» и Y букв «В». Чтобы задать такую программу, нужно выбрать, на каких позициях будет стоять буква «В». У нас Y букв «В», а мест для них имеется $X+Y$. Значит, программ столько же, сколько есть способов выбрать Y предметов из $X+Y$.

Например, в N-й клетке второй строки («клетке $(N-1,\ 1)$») стоит число N: выбрать, какой из N ходов будет ходом вверх, можно как раз N способами.

Задача 3. Заменим в программе, ведущей в клетку (X, Y), все «П» на «В», а все «В» на «П». В какую клетку приведёт новая программа?

Треугольник Паскаля

Количество способов выбрать k предметов из n обозначают $\binom{n}{k}$ или C_n^k (в двух обозначениях k и n действительно в разных местах, это не опечатка). А «таблицу математической черепахи» обычно поворачивают и рисуют в виде треугольника из чисел, который называют *треугольником Паскаля* (рис. 6). Будем нумеровать и его строки, и числа в строках, причём счёт начинаем с нуля. Например, самое верхнее число треугольника – это нулевое число нулевой строки (а, скажем, 2-е число 5-й строки равно 10). Тогда k-е число в n-й строке треугольника Паскаля – это как раз число $\binom{n}{k}$.



Мы уже умеем вычислять эти числа последовательно, строка за строкой: на левой и правой сторонах треугольника Паскаля стоят единицы, а каждое число внутри – сумма двух чисел над ним. Другими словами, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (на рисунке 6 эти числа соединены стрелочками для $n=4$, $k=2$).

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

$\longrightarrow$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рис. 6. Таблица математической черепахи и треугольник Паскаля

Задача 4. Как связаны числа $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$? Как эту связь объяснить?

Задача 5. Найдите суммы чисел в первых нескольких строках треугольника Паскаля. Что получается? Почему?

Задача 6. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля и обведите в них все нечётные числа. Разберитесь, в каких строках будут обведены все числа.

Если внимательно посмотреть на треугольник Паскаля, можно обнаружить ещё массу замечательных закономерностей (попробуйте!).

Строки треугольника Паскаля

Решим такую задачу: сколькими способами можно выбрать в классе из n человек команду из k обычных игроков и одного капитана?

Можно сначала выбрать обычных игроков – одним из $\binom{n}{k}$ способов, а потом назначить одного из оставшихся $n-k$ людей капитаном. Получаем ответ $\binom{n}{k}\cdot(n-k)$.

Но можно рассуждать иначе! Сначала выберем всю команду из $k+1$ игроков – одним из $\binom{n}{k+1}$ способов, а потом пусть они выберут среди себя капитана – одним из $k+1$ способов. Получаем ответ $\binom{n}{k+1}\cdot(k+1)$.

Какое из этих рассуждений правильное? Оба правильные! На самом деле, мы доказали тождество

$$\binom{n}{k}\cdot(n-k)=\binom{n}{k+1}\cdot(k+1).$$

Задача 7. Докажите похожим образом, что

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{n}{k}.$$

Возможно, вы уже заметили, что числа в строках треугольника Паскаля сначала возрастают (до середины), а потом убывают – такое свойство называется *унимодальность*. Можно объяснить это так: по только что доказанному, $(k+1)$-е число в n-й строке получается из k-го умножением на $(n-k)/(k+1)$; пока $k<(n+1)/2$, числитель больше знаменателя и следующее число больше предыдущего (а потом наоборот).

Задача 8. Докажите, что при $1<k<n-1$ число $\binom{n}{k}$ не может быть простым.

Формула для числа сочетаний

Те, кто решили задачу 6, доказали фактически и явную формулу для чисел сочетаний:

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}=\ldots=$$

$$=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\binom{n-k+1}{1}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

(где $k!$ – обозначение для произведения $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$).

Можно объяснить эту формулу и по-другому. Будем выбирать k предметов из n последовательно всевозможными способами и записывать каждый выбор на бумажку. Первый предмет можно выбрать одним из n способов; после того как первый выбран, второй можно выбрать $n-1$ способами (любой из оставшихся) и так далее. То есть мы запишем на бумажке всего $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ строк. Но в них каждый из $\binom{n}{k}$ наборов предметов будет встречаться $k!$ раз: переставленный всевозможными способами. Вот и получается, что

$$\binom{n}{k}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

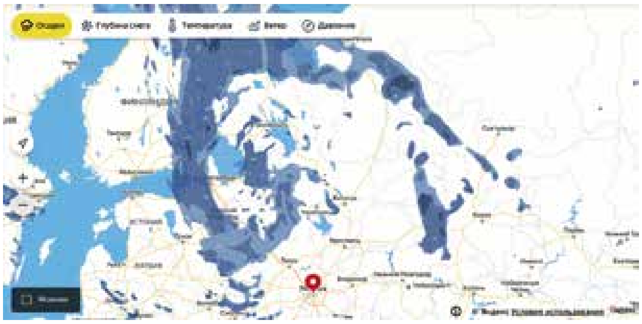
Эта явная формула не всегда удобна. Так, если мы хотим найти число способов выбрать 99 предметов из 100, вряд ли разумно сначала вычислять 100! и 99!, а потом делить одно на другое... Для вычислений (в том числе компьютерных) обычно удобнее рекуррентное задание (последовательное вычисление строки за строкой). А для доказательства разных фактов про числа сочетаний полезно помнить про их комбинаторный смысл (выбор k предметов из n, количество путей...).

Художник Мария Усеинова

Максим Прасолов

КАРТА ОСАДКОВ: ОТВЕТ

В «Квантике» №8 за 2022 год был вопрос про карту осадков. На ней можно увидеть, где идёт дождь. Москва отмечена красной точкой. Куда дует ветер в Москве?



На первый взгляд здесь ничего не дано, но посмотрим на длинную тучу, закрученную в спираль. Чем ближе к центру, тем у́же туча. Подобную картинку можно увидеть в водовороте! Если капнуть краской на воду, пятно будет плыть вокруг водоворота, медленно приближаясь к нему. Чем ближе к водовороту, тем быстрее крутится вода, поэтому пятно будет менять свою форму (рис. 1). Ближние к водовороту слои будут обгонять дальние, и вскоре пятно превратится в спираль! Она продолжит крутиться и вытягиваться. По форме спирали можно восстановить направление течения: оно не сильно отличается от направления, в котором надо двигаться вдоль спирали, если стремиться к её центру (рис. 1).

Рис. 1

«Воздуховороты» называются *циклонами*: в них вращается не вода, а воздух. В центре циклона – область пониженного давления. Это то самое давление, о котором говорят в прогнозе погоды. Воздух вращается и немного приближается к центру, поэтому облако, независимо от первоначальной формы, постепенно превращается в спираль. Чтобы определить направление ветра в Москве, посмотрим на направление участка спирали между Москвой и центром циклона: ветер дует примерно на северо-восток; такой ветер называется юго-западным. Это и есть ответ к задаче.

Мы нашли направление ветра, предполагая, что центр циклона неподвижен. Но если вращающийся циклон ещё и перемещается как единое целое – его сдувает какой-то ветер, – нужно сделать поправку на этот ветер.

Куда исчезает воздух в центре циклона? Есть два варианта: вниз и вверх. Но в задаче речь идёт о небольших дождевых облаках. Это самые низкие облака, поэтому вниз уходить воздуху мешает Земля. Значит, в центре нашего циклона воздух поднимается. Это как водоворот, только вверх ногами! Если он сильный, то может поднять вверх даже дом, это называется *смерч*.

А может, мы всё перепутали, и на самом деле эту тучу на картинке не затягивает, а выбрасывает? Действительно, бывает так, что над каким-то участком земли воздух движется вниз, а дальше воздух расходится во все стороны вне этого участка. Это называется *антициклон*. Но при этом дождевые облака возникнуть не могут! Дело в том, что в тёплое время года чем ниже воздух, тем он теплее, а значит, он может удерживать больше воды в виде пара. Если при понижении возникло облако, которое вот-вот прольётся, отчего же оно раньше не пролилось? По этой причине антициклон летом несёт ясную погоду. О том, как всё-таки образуются дождевые облака, можно прочитать в «Квантике» №2 за 2013 год в статье «Почему облака снизу плоские?».

Хорошо, в центре циклона воздух поднимается, а дальше? В космос воздух улететь не может, его притягивает Земля, поэтому он расходится в разные стороны. Это как антициклон, только вверх ногами. Наверху образуются новые облака, которые вылетают из центра в направлении, которое вращается вместе с циклоном. Представьте, что в разбрызгиватель для газона снизу подаётся вода, а дальше она вылетает через носик, который быстро крутится, – получается спираль. Новые облака тоже образуют спираль. При удалении от центра они испаряются. Посмотрите ускоренное видео урагана в интернете по ссылке kvan.tk/hurricane и найдите, какие облака в него засасываются, а какие из него разбрызгиваются.

Получается, что более низкие облака приближаются к центру циклона, а более высокие – удаляются. И действительно, на небе иногда можно найти два облака, которые летят в разные стороны, и даже в противоположные.

Художник Екатерина Жиркова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

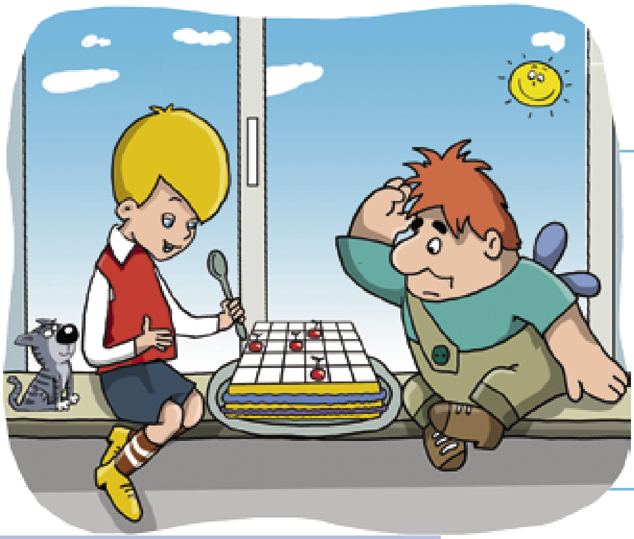
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

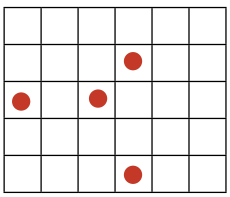
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. На чаепитии всех угощали конфетами. И Петя, и Вася взяли себе по две конфеты каждого вида, но съели только по 10 конфет каждый, а остатки принесли домой. Сколько всего видов конфет было на чаепитии, если Петя принёс домой конфеты только трёх видов, а Вася – шести?

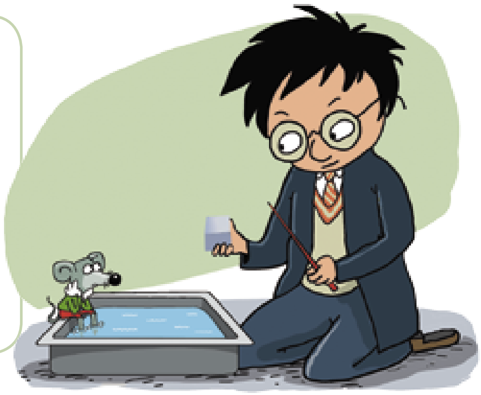


2. Малыш и Карлсон делят торт 5×6, украшенный вишенками (см. рисунок). Может ли Карлсон так разрезать торт на две одинаковые по форме и размеру части, что все вишенки достанутся ему?



Авторы: Сергей Дориченко (1), Михаил Евдокимов (2), Алексей Канель-Белов (3),
Борис Френкин (4), Фёдор Нилов (5)

3. Гарри Поттер поместил в толщу воды неподвижный ледяной кубик со стороной 1 см, после чего вся вода, находящаяся не дальше, чем на 1 см хоть от какой-то точки кубика, тоже замёрзла. Докажите, что получившийся кусок льда можно разрезать на части и сложить из них всех несколько фигур, каждая из которых – кубик, цилиндр или шарик.



4. На острове 99 жителей, и каждый – либо спорщик, либо подпевала. Всех по очереди спросили, кого на острове больше – спорщиков или подпевал. Каждый, кроме первого, отвечал так: если он подпевала, повторял ответ предыдущего, а если спорщик – отвечал наоборот. В результате 75 островитян ответили неправильно. Можно ли только по этим данным определить, кого на острове больше: спорщиков или подпевал?

5. В вершинах куба расставили 8 чисел так, что на любых двух параллельных рёбрах общая сумма чисел одна и та же. Сколько среди этих 8 чисел может быть различных? (Укажите все варианты, сколько различных чисел может быть, и докажите, что других вариантов нет.)

Художник Николай Крутиков

Дидона и треугольник

По легенде, беглая царица Дидона, приплыв в чужие края, попросила у местного племени участок земли – хотя бы столько, сколько можно охватить воловьей шкурой. Получив согласие, Дидона разрезала шкуру на тонкие ремешки и огородила ими целый холм! Так начинался Карфаген…

А древнюю задачу – *какая фигура с данным периметром имеет наибольшую площадь* – называют задачей Дидоны. Ответ простой – круг (доказательство, правда, сложное).

Опираясь на этот факт, попробуйте разобраться в совсем другом, на первый взгляд, вопросе.

Дан равносторонний треугольник. Какая линия, делящая его площадь пополам, имеет наименьшую длину?

Художник Елена Цвегаева

ISSN 2227-7986 22009

9 772227 798220