ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9 | сентябрь 2023
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 9
сентябрь
2023

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ ДУШ

КОВЁР СЕРПИНСКОГО

ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ПО НОВОМУ СТИЛЮ

Enter

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2023 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Формат 84х108/16 Тираж: 4500 экз.
Подписано в печать: 27.07.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+ EAC

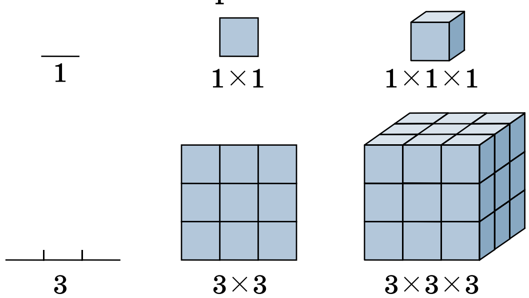
www.kvantik.com kvantik@mccme.ru vk.com/kvantik12 t.me/kvantik12

СОДЕРЖАНИЕ

Никита Солодовников

КОВЁР СЕРПИНСКОГО

Если втрое увеличить сторону квадрата, его периметр увеличится втрое, а площадь – в $3 \cdot 3 = 9$ раз. Если же втрое увеличить сторону кубика, его объём увеличится в $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ раз.



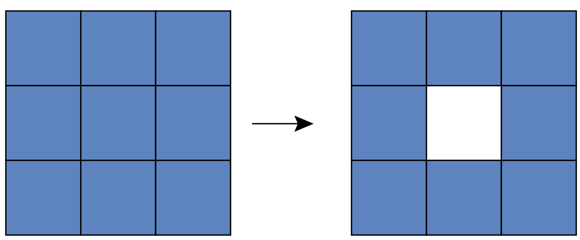
Закономерность верна в общем случае: при увеличении в k раз площадь двумерной фигуры увеличится в $k \cdot k$ раз, а объём трёхмерного тела – в $k \cdot k \cdot k$ раз. Более того, квадрат 3×3 *разбивается* на 9 квадратиков 1×1, а куб $3 \times 3 \times 3$ – на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (но так бывает уже не всегда: шар разбить на шарики нельзя).

Задача 1. Куб а) $3 \times 3 \times 3$; б) $4 \times 4 \times 4$; в) $12 \times 12 \times 12$ окунули в краску, а затем разрезали на единичные кубики. Сколько в каждом случае будет кубиков с тремя, двумя или одной окрашенной гранью? А сколько будет кубиков, у которых ни одна грань не окрашена?

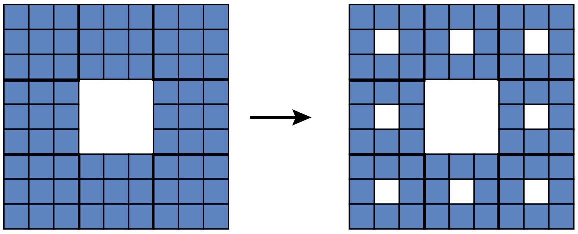
Задача 2. За неделю ежедневной стирки длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько дней хватит оставшегося куска?

Ковёр Серпинского

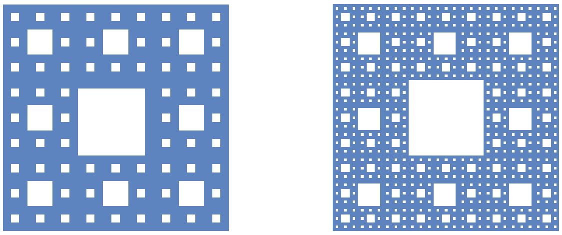
Построим на плоскости фигуру, которая при увеличении в 3 раза составляется не из 9, а из 8 копий исходной фигуры. Для этого разобьём квадрат на $9 = 3 \cdot 3$ квадратиков, а затем вырежем средний квадрат.



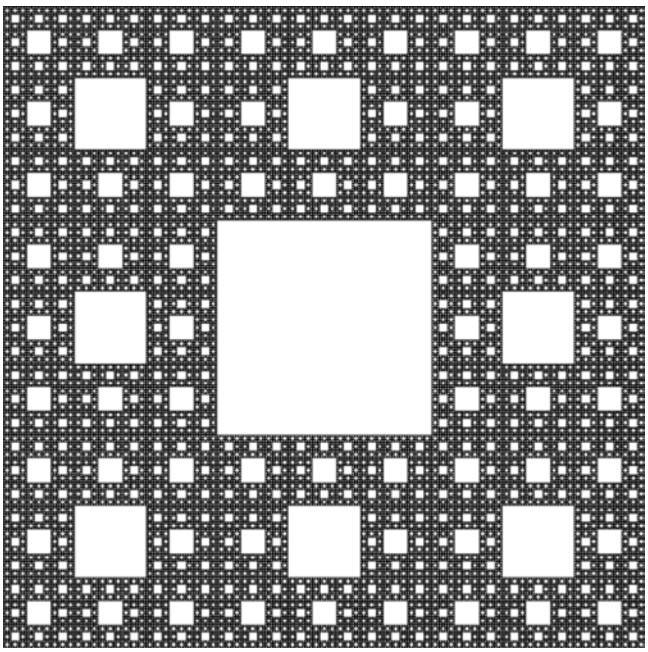
Фигура теперь состоит из 8 квадратиков. Но мы хотим, чтобы фигура состояла из 8 копий самой себя, а сама она – квадрат с дыркой. Для этого повторим операцию с каждым из восьми квадратиков: разобьём каждый на $3 \cdot 3$ частей и выкинем среднюю.



Фигура опять не состоит из копий самой себя, ведь в маленьких квадратах нет дырок. Но теперь дырке, возникшей на первом шаге, соответствуют дырки второго шага. Повторим операцию ещё и ещё раз.

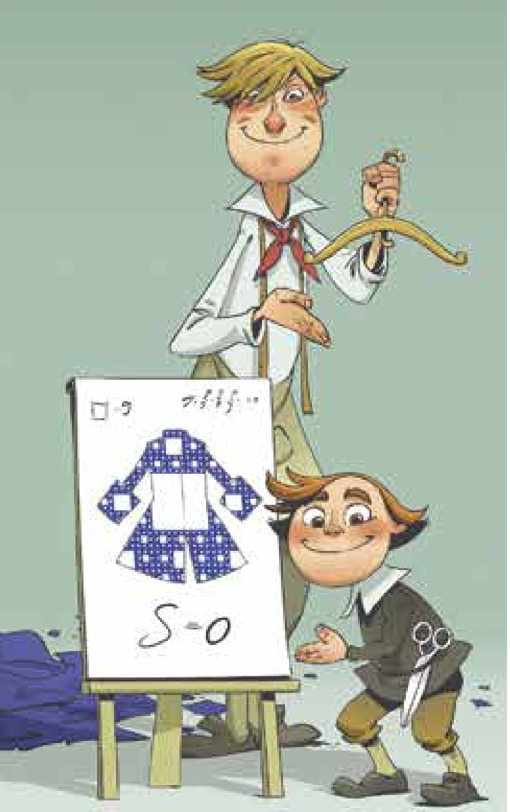


...



Проделаем эту операцию бесконечное число раз. Получится эдакий «всюду дырявый квадрат».

Эту фигуру называют *ковром* или *квадратом Серпинского*. Её трудно представить, потому что неясно, что значит «повторить операцию бесконечное число



раз». Вдруг мы выкинули вообще все точки и вместо ковра у нас – пустое место? Оказывается, нет. Чтобы понять это, заметим: если точка была вырезана, можно указать номер шага, на котором это случилось.

Задача 3. Укажите точку квадрата, которая не будет выкинута ни на каком шаге. Она точно будет принадлежать ковру.

Итак, ковёр Серпинского состоит не из 9, а всего лишь из 8 своих втрое уменьшенных копий.

Площадь ковра Серпинского

Длину обычно измеряют у кривых, площадь – у двумерных фигур, а объём – у тел. Но ведь можно попробовать измерить площадь чего угодно, что изображено на плоскости. Например, площадь отрезка равна нулю: ведь его можно накрыть сколь угодно узким прямоугольником сколь угодно малой площади.

Найдём площадь ковра Серпинского! В нём повсюду дырки, трудно выделить в нём хоть один «целый» кусочек. Попробуем посчитать, как уменьшается площадь фигуры от шага к шагу при построении ковра.

Задача 4. Посчитайте площадь дырявых квадратов справа на рисунках внизу с. 10 и вверху с. 11, считая за единицу сторону наименьшего из квадратиков.

На первом шаге из 9 квадратов выброшен 1 средний, а значит, мы оставили $\frac{8}{9}$ исходной площади. На втором шаге мы повторили вырезание с каждым из 8 оставшихся квадратов, а значит – после выкидывания вторых по размеру дырок – снова *оставили лишь* $\frac{8}{9}$ *площади от предыдущего шага*. Это уменьшение будет повторяться на каждом шаге. Уже после шестого шага останется менее половины площади квадрата, так как $\left(\frac{8}{9}\right)^6 < \frac{1}{2}$. После двенадцатого – меньше четверти, и так далее. Мы сможем сделать площадь меньше любого положительного числа. Значит, площадь ковра надо считать нулевой: $9 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots = 0$.

Может быть, можно измерить длину границы ковра Серпинского?

Задача 5. Посчитайте длину границы каждой из фигур на рисунке вверху с. 11.

Как и в случае площади, посчитаем длину границы на каждом шаге. В начале она равна периметру квадрата. После первого шага к ней прибавляется периметр центрального квадратика. Затем – восьми квадратиков, каждый из которых втрое меньше выкинутого на первом шаге. Количество вырезаемых квадратиков увеличивается на каждом шаге в 8 раз. А периметр каждого вырезаемого квадратика уменьшается только в 3 раза. Значит, добавка к длине границы на каждом шаге увеличивается в $\frac{8}{3}$ раза! А сумма всех добавленных длин окажется бесконечно большой.

Итак, длина границы ковра бесконечна, а площадь самого ковра равна нулю.

Размерность

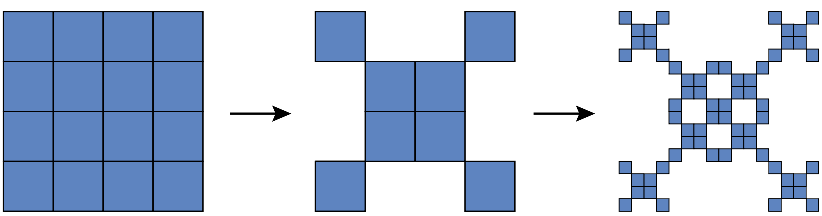
На примере квадрата и кубика отметим такое свойство размерности: *если фигуру размерности d, увеличенную в k раз, можно составить из копий изначальной фигуры, то их количество равно $k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^d$.*

Так, при увеличении в $k = 3$ раза квадрат составляется из $3^2 = 9$ исходных квадратиков, $d = 2$, а куб – из $3^3 = 27$, $d = 3$. Какая же должна быть размерность ковра Серпинского? При увеличении в 3 раза он составляется из 8 копий, значит, размерностью должно быть такое число d, что $3^d = 8$.

Целые числа $d = 1, 2, 3\ldots$ не подходят: $d = 1$ недостаточно, а $d = 2$ слишком велико, так как $3^1 < 8 < 3^2$. Значит, размерность ковра где-то между 1 и 2. На это также указывают площадь и длина. Площадь у ковра нулевая, как у отрезка, а длина бесконечная.

В «дробной» размерности есть смысл. Отрезок, ковёр Серпинского, квадрат и куб – всё *самоподобные* фигуры: их можно составить из копий самих себя. «Дробную» размерность можно определить и для произвольных фигур, но мы этого делать здесь не будем.

Задача 6. Попробуйте сами оценить площадь, длину границы и даже найти «размерность» дырявой фигуры, изображённой на рисунке ниже.



Художник Мария Усеинова

Размерность береговой линии и реки

Как измерить длину кривой на плоскости? Можно откладывать шаги на кривой отрезками фиксированного размера, а затем оценить снизу длину кривой как (*число полных шагов*) × (*длина шага*). Чем меньше отрезок, тем больше будет число шагов – и тем точнее будет измерена длина кривой. Оценки длины окружности диаметра 1 с шагом 1/10 и 1/1000 будут отличаться не более чем на 1/100. Оказывается, многие естественные объекты хорошо описываются математическими фигурами дробной размерности. Длина береговой линии Великобритании или длина Енисея со всеми притоками растут как будто неограниченно, если измерять их со всё большей точностью: оценки не сходятся, в отличие от случая окружности. В крупном масштабе обнаруживаются всё новые изгибы берега, а в случае реки – ещё и прежде не учтённые притоки. Это даёт всё большую добавку к длине при уменьшении шага измерений. Как и для ковра Серпинского, для описания таких фигур подходит размерность, промежуточная между 1 и 2.

Источник: frexosm.ru на основе данных openstreetmap.org

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

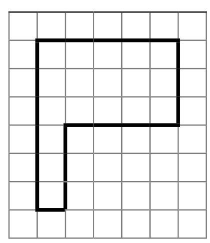
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. На эскалаторе в метро ступеньки пронумерованы по порядку. На каждой пятой (5, 10, 15, …), на первой и на последней ступеньках краской написаны их номера. Поднимаясь по эскалатору, Вася заметил три подряд идущие ступеньки, на которых были написаны номера. Он сложил эти три номера и получил некоторое число. Назовите последнюю цифру этого числа и объясните, почему она именно такая.



2. Разрежьте флажок на две равные по форме и размерам части.

Авторы задач: Иван Молодык (1), Михаил Евдокимов (2, 5), Татьяна Казицына (3), Александр Грибалко (4)

3. У Вани 4 яблока, у Коли – 41 яблоко, а у всех остальных мальчиков по 14 яблок. Мальчики могут поменяться между собой яблоками так, чтобы у всех стало поровну. Сколько всего мальчиков?

4. У Фелониуса Грю живут 33 миньона, все они весят одинаково. Однажды один из них стащил у Грю банан и съел его, но Грю не знает, кто это сделал. У него есть большие чашечные весы без гирь, на которых он может взвешивать любое количество миньонов. Однако если миньоны оказываются на одной чаше весов, они ссорятся и больше на одну чашу одновременно их ставить нельзя. Как Грю за четыре взвешивания найти воришку, если после съеденного банана он весит больше остальных?

5. Каменщик выложил стенку без дырок и полостей из одинаковых кирпичей $1 \times 1 \times 2$. Но некоторые кирпичи он положил вдоль, некоторые поперёк, некоторые вертикально, то есть длинное ребро кирпича параллельно одному из трёх направлений. Могло ли оказаться, что кирпичей каждого из трёх типов поровну, если размеры стенки:

а) $3 \times 8 \times 10$;

б) $3 \times 9 \times 10$?

Художник Николай Крутиков

Колосс Родосский

По легенде, жители города Родос заказали скульптору Харесу статую Колосса Родосского высотой 18 м. Скульптор рассчитал материалы и запросил определённую сумму.

Но тут жители изменили заказ – потребовали сделать статую высотой 36 м и заплатили вдвое больше.

Хватило ли скульптору этих денег или нет? Почему?

Художник Yustas

ISSN 2227-7986
23009
9 772227 798237