

Ж У Р Н А Л К В А Н Т И К

Д Л Я Л Ю Б О З Н А Т Е Л Ь Н Ы Х



№ 2 | Д О М Т А Б Л И Ч Е К

февраль
2024

ДВЕ ИСТОРИИ
ПРО ВИТАМИНЫ

ЖИВАЯ ИГРА В 15

Enter ↵



Настенный перекидной календарь с интересными задачами-картинками от журнала «Квантик» – хороший подарок друзьям, близким и коллегам!



Приобрести календарь и другую продукцию «Квантика»

можно в магазине «Математическая книга» (г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11),
в интернет-магазинах: biblio.mccme.ru, ozon.ru, WILDBERRIES, Яндекс.маркет и других
(полный список магазинов на kvantik.com/buy)

**ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ
НА ЖУРНАЛ
«КВАНТИК»**

в почтовых отделениях
по электронной и бумажной версии
Каталога Почты России:



индекс **ПМ068** –
по месяцам полугодия

онлайн
на сайте Почты России
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068



По этой ссылке вы можете
оформить подписку
и для своих друзей, знакомых, родственников

Подробнее обо всех вариантах подписки см. kvantik.com/podpiska

НАГРАДЫ
ЖУРНАЛА



2017

Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке



2021

БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность



2022

Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 2, февраль 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина,
Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов,
Н. А. Солодовников
Художественный редактор
и главный художник Yustas
Верстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: kvantik@mccme.ru сайт: www.kvantik.com

Подписка на журнал
в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж
обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: biblio@mccme.ru

Формат 84x108/16
Тираж: 4500 экз.

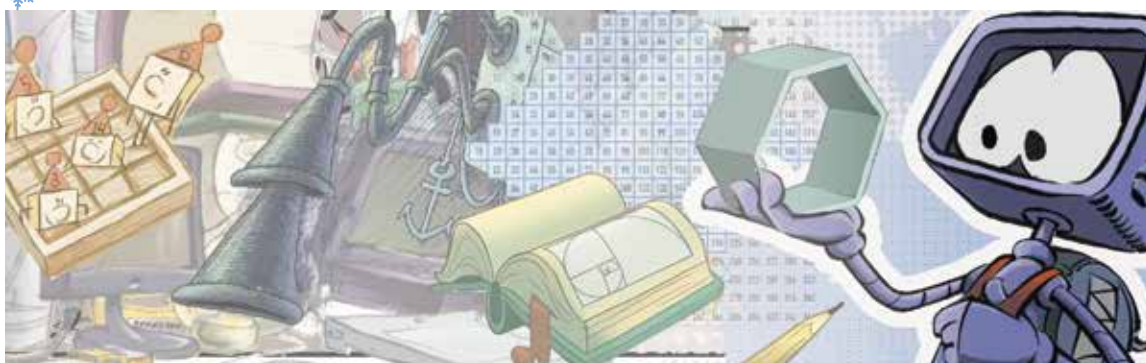
Подписано в печать: 28.12.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986



СОДЕРЖАНИЕ

■ ПРЕДАНИЯ СТАРИНЫ		
Дом табличек. <i>А. Буфетов</i>		2
■ СВОИМИ РУКАМИ		
Икосаэдр из ниток. <i>Н. Нетрусова</i>		8
■ КАК ЭТО УСТРОЕНО		
Две истории про витамины. <i>Г. Идельсон</i>		10
Високосный год и звёздные сутки. <i>Г. Мерзон</i>		16
■ ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ		
Капли на стекле. <i>А. Бердников</i>		17
Разворот ракеты. <i>В. Сирота</i>	IV с. обложки	
■ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ		
Живая игра в 15. <i>К. Кохась</i>		18
■ ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ		
Змейки из шести уголков. <i>С. Полозков</i>		24
■ ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ		
Парламент сов. <i>Г. Мерзон</i>		25
■ ОЛИМПИАДЫ		
ХС Санкт-Петербургская олимпиада по математике. Избранные задачи I тура		26
Наш конкурс		32
■ ОТВЕТЫ		
Ответы, указания, решения		28



ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Александр Буфетов

Чуть утро блеснуло,
я начал работать,
На пятый день
чертежи закончил...

Эпос о Гильгамеше
(перевод
Н. С. Гумилёва)



ДОМ ТАБЛИЧЕК

Запишем число «сто одиннадцать» по-арабски: 111. Римлянин записал бы его иначе: CXI. Видно, как отличаются эти записи: нам понадобилась только одна арабская цифра, а римских – целых три; ведь в римской записи для обозначения сотен используется одна цифра, для обозначения десятков другая, а для обозначения единиц третья, похожая на арабскую. Напротив, в арабской записи одна и та же цифра обозначает и сотни, и десятки, и единицы – величина числа, передаваемого цифрой, меняется в зависимости от позиции цифры в записи. Конечно, позиция цифры имеет значение и в римской записи – например, запись IX обозначает число «девять» – но ни в каком случае римской цифрой I не может обозначаться десяток, как у арабов. В силу ключевой роли, которую в записи числа играет позиция, арабская система счисления так и называется – *позиционная*.

Кто придумал позиционную систему счисления? Она существовала и активно использовалась уже шумерами, в эпоху III Династии Ура, несколько раньше, чем за две тысячи лет до н. э. Но кто такие шумеры? И откуда мы о них знаем?

Неизвестный язык

В 1614 году 28-летний римский композитор Пьетро делла Валле отправился паломником на Святую Землю: из Венеции через Константинополь в Александрию, из Александрии через Синай в Иерусалим. Поклонившись Гробу Господню, Пьетро делла Валле поехал в Дамаск, затем в Багдад и на руины Вавилона, которые подробно описал. Из путешествия на Восток Пьетро делла Валле привёз в Европу кирпичи с древними надписями. Так европейцы Нового времени впервые увидели клинопись.

Увидев, решили прочесть. Математик Карстен Нибур вместе с другими учёными отправился в экспедицию на Восток, организованную датским королём Фредериком V, – и единственный выжил, и в 1778 году опубликовал надписи, скопированные им в Персеполе – древнем городе на территории современного Ирана. Раскопки XIX века, в первую

очередь английские и французские, давали всё новый материал. К середине XIX века в результате труда многих исследователей – среди них ирландский священник Эдвард Хинкс, британский офицер сэр Генри Кресвик Роулинсон и родившийся в Гамбурге, работавший во Франции филолог Юлий Опперт – постепенно расшифровали язык, на котором писали в Вавилоне за полторы тысячи лет до н. э. Язык называли «аккадским».



Глиняная табличка из Шуруппака с текстом о продаже поля и дома, ок. 2600 г. до н. э.

Открытие аккадской литературы совершенно по-новому осветило и Ветхий Завет: ведь у вавилонян был и свой рассказ о сотворении мира, и о всемирном потопе. Встал острый вопрос о возможном влиянии. В изучение клинописи активно включились немецкие иезуиты, только что изгнанные из Германии в рамках противостояния между Папой Пием IX и канцлером Отто фон Бисмарком. Именно монахам-изгнанникам – иезуитам Иоганну Непомуку Штрассмайеру, Иосифу Эппингу и Францу-Ксавьеру Куглеру – мы обязаны поразительным открытием великой вавилонской математики и особенно математической астрономии. Но возвратимся к аккадцам.

Аккадский язык – семитский, то есть родственник сегодняшних арабского, арамейского и иврита. Но постепенно на клинописных табличках находили всё больше и больше слов, совсем не похожих на семитские. Изумлённые исследователи открыли новый язык и новый народ. По предложению Опперта, вновь обретённому народу дали его аккадское имя: «шумеры».

Междуречье, плодородная полоса земли между Тигром и Евфратом, было заселено, возможно, уже в шестом тысячелетии до н. э. Мы не знаем, когда и откуда в Южное Междуречье пришли шумеры. Трудо-





любивый упорный народ создал сияющую культуру, а передать её потомкам помогло поразительное изобретение – клинопись.

Развитие письменности

«Развитие письма, – пишет известный учёный-востоковед Айзик Абрамович Вайман, – это весьма сложный процесс, охватывающий промежуток времени в пять-шесть тысяч лет». Сперва отдельные понятия, в устной речи отвечающие слову, изображаются схематическими рисунками. Например, на рисунках может изображаться конкретный предмет: голова человека, Солнце, голова животного, тростинка. Такие рисунки называют *пиктограммами*. Однако человеку хочется передавать на письме не только то, что он видит, но и то, что он думает и чувствует: появляются рисунки, на которых изображается «судьба» или «могущество». Такие рисунки называют *идеограммами* – ведь рисунок выражает идею автора. Первые шумерские идеограммы предположительно датируются четвёртым тысячелетием до н. э. Постепенно рисунки всё более и более схематизируются, но только многими веками позже схематический рисунок начинает обозначать не смысл, а звук – в случае клинописи слог, как в сегодняшней японской азбуке.

Например, в русском языке односложное слово «уж» обозначает вид неядовитой змеи. При этом пара букв «уж» встречается во многих словах: «стужа», «нужен», «ужас» – и во всех словах пишется одинаково, в зависимости только от звучания слова, а не от его смысла. Переход от идеограмм к слоговому письму начинают шумеры, продолжа-

ют пишущие по-аккадски во втором тысячелетии до н. э. вавилоняне, вслед за ними в первом тысячелетии до н. э. ассирийцы, но «и в это время наряду со слоговыми написаниями слов встречаются также и идеографические», – подчёркивает Вайман. С другой стороны, знаки для чисел уже за три тысячи лет до н. э. вместе с пиктограммами появляются у шумеров.

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎷 2	𐎷𐎷 12	𐎷𐎷𐎷 22	𐎷𐎷𐎷𐎷 32	𐎷𐎷𐎷𐎷𐎷 42	𐎷𐎷𐎷𐎷𐎷𐎷 52
𐎸 3	𐎸𐎸 13	𐎸𐎸𐎸 23	𐎸𐎸𐎸𐎸 33	𐎸𐎸𐎸𐎸𐎸 43	𐎸𐎸𐎸𐎸𐎸𐎸 53
𐎹 4	𐎹𐎹 14	𐎹𐎹𐎹 24	𐎹𐎹𐎹𐎹 34	𐎹𐎹𐎹𐎹𐎹 44	𐎹𐎹𐎹𐎹𐎹𐎹 54
𐎺 5	𐎺𐎺 15	𐎺𐎺𐎺 25	𐎺𐎺𐎺𐎺 35	𐎺𐎺𐎺𐎺𐎺 45	𐎺𐎺𐎺𐎺𐎺𐎺 55
𐎻 6	𐎻𐎻 16	𐎻𐎻𐎻 26	𐎻𐎻𐎻𐎻 36	𐎻𐎻𐎻𐎻𐎻 46	𐎻𐎻𐎻𐎻𐎻𐎻 56
𐎼 7	𐎼𐎼 17	𐎼𐎼𐎼 27	𐎼𐎼𐎼𐎼 37	𐎼𐎼𐎼𐎼𐎼 47	𐎼𐎼𐎼𐎼𐎼𐎼 57
𐎽 8	𐎽𐎽 18	𐎽𐎽𐎽 28	𐎽𐎽𐎽𐎽 38	𐎽𐎽𐎽𐎽𐎽 48	𐎽𐎽𐎽𐎽𐎽𐎽 58
𐎾 9	𐎾𐎾 19	𐎾𐎾𐎾 29	𐎾𐎾𐎾𐎾 39	𐎾𐎾𐎾𐎾𐎾 49	𐎾𐎾𐎾𐎾𐎾𐎾 59
𐎿 10	𐎿𐎿 20	𐎿𐎿𐎿 30	𐎿𐎿𐎿𐎿 40	𐎿𐎿𐎿𐎿𐎿 50	

Вавилонские клинописные числа

Как записывать числа

Знак \uparrow обозначал единицу. Знаки для двойки, тройки и так далее вплоть до девятки получаются соединением нескольких знаков для единицы: $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$. Для числа «десять» применяется уже новый знак — \leftarrow . Отдельный знак был для числа «шестьдесят» \uparrow (такой же, как для единицы, но писался крупнее), отдельный для числа «шестьсот» \leftarrow — видно, что он получен соединением знака для десятки и знака для шестидесяти. Повторив знак для числа «шестьсот» несколько раз, получаем запись чисел «тысяча двести», «тысяча восемьсот», «две тысячи четыреста», «три тысячи»: $\leftarrow\leftarrow$, $\leftarrow\leftarrow\leftarrow$, $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$, $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$. А для числа «три тысячи шестьсот» использовался уже отдельный знак \diamond — в нём по сторонам квадрата стоят знаки для числа 60.

Знаки, записанные вместе, нужно было сложить — как и в римской системе счисления:

$$\begin{array}{l} \diamond \diamond \diamond \diamond \leftarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \\ \diamond \diamond \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} = 3 \cdot 36000 + 4 \cdot 3600 + 5 \cdot 600 + 2 \cdot 60 + 17 = 125537$$

Земледелие шумеров опиралось на систематическое орошение. Необходимо было рыть каналы и следить за их состоянием. Работникам выдавали ячмень. Требовались очень объёмные точные расчёты.

Мы не знаем и, наверное, никогда не узнаем имени гениального шумерского математика, первым догадавшегося, что для числа «три тысячи шестьсот» не нужен отдельный знак — а достаточно отдельного разряда. Во всяком случае, его великое открытие широко использовалось, повторимся, уже в эпоху III Династии Ура, за две тысячи лет до н. э. Например, запись $\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$ обозначает число $4876 = 1 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 16$.

При этом непозиционную систему счисления тоже продолжали применять. Очень приблизительно можно сказать, что старинную непозиционную привлекали преимущественно для простых хозяйственных расчётов, а позиционная, более совершенная, но и более трудная для понимания, использовалась при решении математических задач — в частности, в школе.



Рассказ шумерского школьника

Да, у шумеров были школы – может быть, самые древние в мире. Школа называлась «дом табличек», учитель – «отец дома табличек», а школьник – «сын дома табличек». Школьников учили считать, читать, писать, рисовать. Учили математике. Конечно, учили шумерской литературе, самой прекрасной на свете. Сохранилось множество табличек шумерских стихов, записанных неуверенной рукой ученика.

Есть у нас и рассказ, написанный от лица шумерского школьника, приблизительно датированный концом третьего тысячелетия до н. э. Автор, быть может, шумерский школьный учитель? Так предполагает переводчик рассказа, родившийся в Российской Империи в Жашкове, работавший в Университете Пенсильвании, сам начинавший как школьный учитель шумеролог Самуил Ной Крамер.

Рассказ шумерского школьника открывается описанием школьного дня: мальчик прочёл табличку, пообедал, записал табличку, получил домашнее задание и пошёл домой. Он прочёл табличку папе, и папа очень обрадовался. «Я пить хочу, дайте мне пить, я голоден, дайте мне есть, помойте мне ноги, приготовьте постель, я хочу спать; разбудите меня рано утром, я не должен опоздать, не то учитель побьёт меня палкой», – говорит (надо полагать, родителям) школьник.

Проснувшись рано утром и взяв обед, мальчик поспешил в школу. «Почему ты опоздал?» – спросил мальчика сторож («моё сердце быстро билось, я очень боялся»). Его домашнее задание не понравилось, и его побил палкой учитель, потом его побил палкой завуч, и ещё несколько учителей, и даже сторож побил его палкой, а потом учитель рисования, а потом учитель шумерского языка, а в конце учитель сказал ему: «У тебя плохой почерк», – и мальчика снова побил палкой – в восьмой раз.

Видя, что дела его плохи, мальчик пошёл к отцу. Отец внимательно выслушал мальчика. Отец пригласил учителя в гости, усадил на почётное место, напоил и накормил учителя («подливал, как воды, ему доброго масла»), одел его в новое платье и сделал ему подарок. Тон учителя изменился: «Желаю тебе



достигнуть вершины искусства письма, полностью овладеть им. Желаю тебе стать первым среди твоих братьев, среди твоих друзей главным, среди всех школьников наивысшим».

Математика шумеров

Какой математике учились в школе маленькие шумеры? К сожалению, в нашем распоряжении пока ещё не очень много шумерских математических табличек. Более поздних табличек из Вавилона, приблизительно датируемых XIX–XVII веками до н. э., гораздо больше. Между тем, математические термины, используемые в вавилонских табличках – сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, нахождение обратного ($n \rightarrow 1/n$), – все шумерские.

Историк математики Марвин Пауэлл исследовал несколько шумерских табличек, датированных им периодом от середины до конца третьего тысячелетия до н. э., эпохами династии Великого Саргона и III Династии Ура. На этих табличках математические задачи с решениями. Например: дана площадь прямоугольного поля и длина, требуется найти ширину. Решая задачу сегодня, мы поделили бы площадь на длину, но шумерский школьник действует немного иначе: он сперва находит обратную величину к длине и потом уже умножает на неё площадь. На некоторых из табличек дроби записываются уже в шестидесятеричной позиционной системе счисления. Справочники обратных величин будут играть ключевую роль и 500 лет спустя в Вавилоне.

А вот другая табличка, с задачей ещё проще: даны длина и ширина поля, требуется найти площадь. С обратной стороны, внизу, на табличке подпись: Ур-Иштаран. Может быть, Ур-Иштаран – ученик, написавший табличку? Если так, математика трудно даётся маленькому Ур-Иштарану: в его вычислении много ошибок.

Поэзия вавилонян опирается на шумерскую, и нельзя не предположить, что и математика вавилонян имеет шумерские корни. Марвин Пауэлл, в окончание своей замечательной работы, высказывает мнение, что рано или поздно будут найдены подробные доказательства этой гипотезы.

Великой цивилизации шумеров больше 5000 лет. Изучение математики шумеров только начинается.

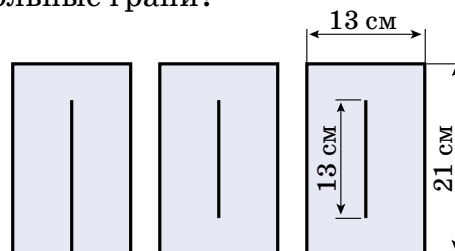


Художник Алексей Вайнер

Когда Таня после уроков зашла к Квантику, тот вырезал из плотного картона прямоугольники.

- Что это? Мы будем мастерить параллелепипед?
- Ты не поверишь, но это будет икосаэдр!
- Но у него же треугольные грани?
- А вот смотри!

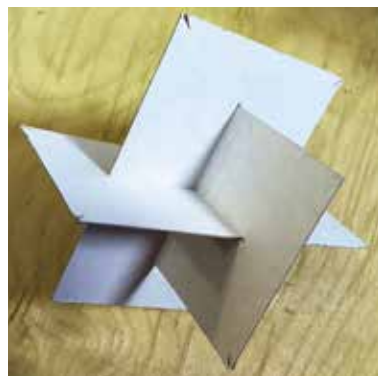
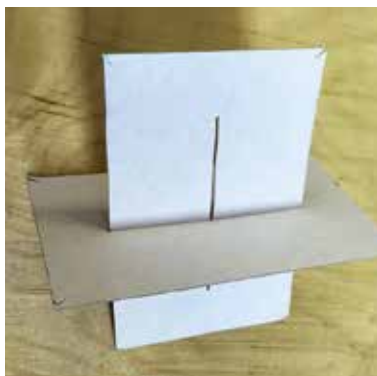
Квантик разложил на столе три картонных прямоугольника $13\text{ см} \times 21\text{ см}$ с прорезами посередине.



– У первого прямоугольника разрез до конца, а другие два одинаковые, у них прорезь по длине равна короткой стороне. И прорезь я сделал чуть пошире, чтобы можно было вставить одну картонку в другую перпендикулярно. В каждом углу каждого прямоугольника я сделал небольшой надрез от угла к центру – туда мы будем вставлять нитки.

– Теперь вставим третий прямоугольник внутрь второго, расположив их перпендикулярно друг другу.

– А потом «ножки» первого прямоугольника вставим в прорезь третьего:



– После сборки конструкции «ножки» первого прямоугольника можно склеить скотчем.

Дальше Квантик взял моток ниток, вставил конец нити в одну из прорезей и протянул нить к одному из ближайших углов. Так, продолжая тянуть нить от угла к углу, Квантик получил икосаэдр. Через каждый угол нить прошла ровно два раза и вернулась к исходному углу.

Потом Квантик ещё раз прошёл вдоль нити от начала и до конца, подтягивая нити на некоторых участках, чтобы образовались равносторонние треугольники. А потом связал начало и конец нити и обрезал лишнее.



Таня задумалась:

– Неужели вот так можно взять три любых взаимно перпендикулярных прямоугольника, собрать такую конструкцию и получить правильный икосаэдр?

– Нет, – ответил Квантик, – тут важно соотношение сторон. У икосаэдра 5 граней сходятся в одной вершине. Стороны треугольников, противоположные этой вершине, образуют правильный пятиугольник.

– У наших прямоугольников одна сторона будет играть роль стороны такого пятиугольника, а другая – диагонали. Диагональ правильного пятиугольника относится к его стороне как золотое сечение. То есть если мы возьмём прямоугольники, стороны которых относятся как золотое сечение, мы получим идеальный икосаэдр.



– Но мы действуем приблизительно: во-первых, у нас есть небольшие разрезы по углам, а во-вторых, стороны прямоугольников относятся друг к другу как два последовательных числа Фибоначчи. О золотом сечении и о числах Фибоначчи можно почитать в статье Александры Подгайц «Интересные факты о золотом сечении» (в «Квантике» № 6 за 2013 год).

– А, я поняла, – ответила Таня, – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Мы могли бы взять прямоугольники со сторонами 8 см и 13 см, и тоже всё получилось бы.

– Верно. Я взял 13 см и 21 см потому, что 21 см – ширина листа А4 и прямоугольники такого размера очень удобно вырезать.

– А что будет, если это будут квадраты? А есть другие такие модели из ниток?

– Об этом расскажу в следующий раз, сначала сделай эту.

Фото автора



Художник Анна Горлач

ДВЕ ИСТОРИИ ПРО ВИТАМИНЫ

Витамин В1 – тиамин

В 1872 году доктора Канехиро Такаки назначили врачом японского флота. Потом он был послан на несколько лет на усовершенствование в Англию и вернулся в 1880 году. Ему пришлось заняться ужасной новой болезнью *бери-бери*, которая поражала матросов в японском флоте. При этой болезни человек страшно слабеет, худеет до истощения, теряет память и в конце концов умирает. Тогдашняя наука считала эту болезнь инфекционной.



Довольно быстро Такаки обнаружил, что болезнь распространена очень избирательно: ею никогда не болели матросы на европейских кораблях, а на японских болели только матросы, но не офицеры.

Образ жизни матросов на европейских и японских кораблях не отличался, и Такаки предположил, что дело в рационе японских матросов. На японских кораблях рис выдавали бесплатно, а всякую другую еду надо было покупать. Только недавно, в 1861 году, английский изобретатель Сэмпсон Мур изобрёл машину для очистки риса от кожуры. Эта машина стала популярна в Японии, и матросов кормили очищенным, белым рисом, который ценился выше. Матросы, в основном из бедных семей, посылали деньги семьям, а сами жили на одном белом рисе.



Неочищенный рис (слева) содержит в коже витамин В1, в очищенном рисе (справа) он отсутствует

В 1883 году военный корабль «Рюдзё» совершил 9-месячную экспедицию в Новую Зеландию, Южную Америку и Гавайи. Из 267 членов экипажа 169 за-



болели бери-бери, 25 умерли. Такаки предположил, что белый рис не содержит какого-то необходимого питательного элемента и что он есть в пище, которую покупали офицеры. Он написал письмо императору с просьбой позволить ему в виде эксперимента добавить к рациону немного мяса, сгущённого молока и ячменя. Такаки сам отправился на корабле, чтобы лично проследить за соблюдением рациона. И действительно, на корабле «Цукуба», совершившем такое же плавание, заболело всего 14 человек из более чем 300. Все они по своим причинам не ели мяса.

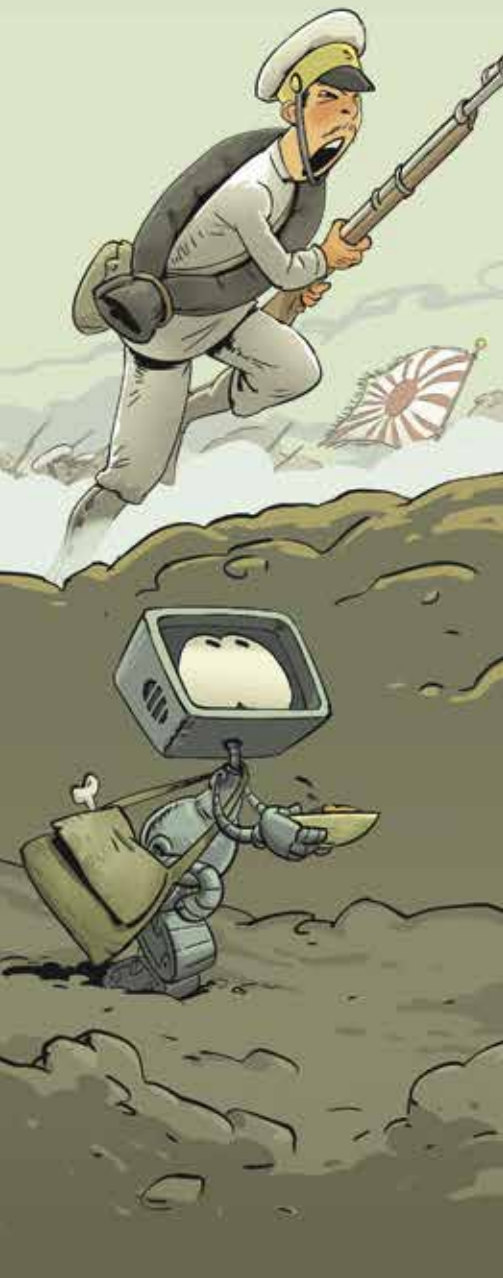
Успех был решительным, и командование флота распорядилось разнообразить пищу матросов. Но флот – это флот, а есть ещё и армия. И руководство армии наотрез отказывалось принять рекомендации Такаки: крупнейшие профессора-медики утверждали, что бери-бери – инфекционная болезнь. Известный японский профессор в 1885 году опубликовал статью об открытии бактерии-возбудителя бери-бери. В последующие годы другой японский учёный – ученик Роберта Коха – опубликовал статью, опровергающую открытие бактерии, но препирательства продолжались.

Бери-бери болели не только японские матросы. Благодаря техническому прогрессу шлифованный рис стал настолько дешёв, что продавался по такой же цене, как раньше неочищенный, и все стали его покупать. Это ударило по беднякам, которые питались только им – в Китае, Индонезии и других странах риса. Индонезия тогда была голландской колонией, и поэтому голландские врачи стали изучать новую болезнь.

В 1897 году голландец Эйкман уже подробно изучил и доказал, что бери-бери происходит от нехватки какого-то элемента питания и полностью излечивается, если давать больному отвар из кожуры неочищенного риса. Годом позже Фредерик Хопкинс сформулировал, что пища содержит микродобавки, необходимые для жизни. В 1912 году эти добавки назвали *витаминами* (от лат. *vita* – жизнь). Эйкман и Хопкинс в 1929 году получили Нобелевскую премию, Такаки к этому моменту уже не было в живых.

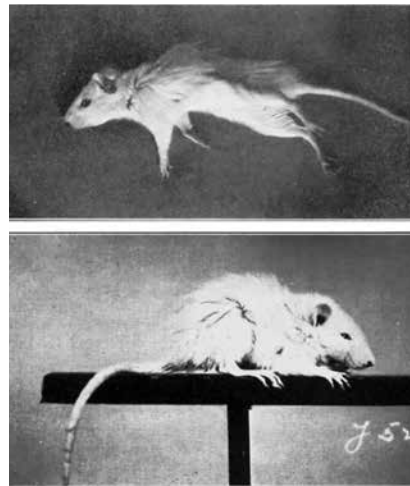
Особенность дефицита витаминов – то, что выздоровление наступает очень быстро, иногда в течение





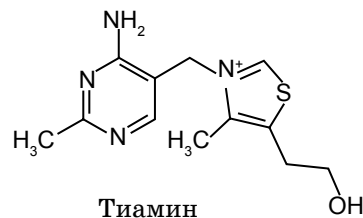
нескольких часов после того, как человек или животное получает витамин.

На верхней картинке – крыса, которую держали на диете без витамина В1. Она весит 54 грамма вместо положенных 120. На нижней – та же самая крыса через 23 часа после того, как ей стали давать экстракт из пшеничных зародышей, обогащённый витамином В1.



Фотографии из статьи 1918 года

Вещество, которого не хватало в очищенном рисе, называется витамин В1, или *тиамин*. Животные и люди не умеют его сами производить и должны получать с пищей, взрослый человек – примерно 1 миллиграмм в день. Это очень небольшое количество, но без него человек не может существовать. Производное из него вещество *тиамин пиродифосфат* служит кофактором в некоторых важных ферментативных реакциях.



Тиамин

Если этот ферментативный путь не работает, клетка не может усваивать пищу, даже если этой пищи хватает.

Несмотря на то, что витамин В1 был уже открыт, руководство японской армии продолжало настаивать, что бери-бери – инфекционная болезнь, и в начале русско-японской войны в 1904 году 80 тысяч японских солдат были отправлены в тыл из-за того, что заболели бери-бери, а 10% из них умерло.

Только в феврале 1905 года, после долгих межведомственных препирательств, японский министр обороны распорядился изменить рацион в армии и добавлять к рису ячмень, к большому неудовольствию солдат. Одновременно те же изменения ввели в тюрьмах, тоже к большому неудовольствию заключённых.

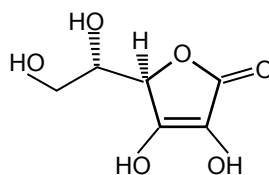
Но ещё в 1942 году американцы, захватывая в плен японских солдат на разных отдалённых островах, к своему удивлению, находили много больных бери-

бери. Причина была организационной. Американские солдаты получали готовые индивидуальные порции, которые можно было есть холодными или разогревать. А в японской армии продукты выдавали оптом, на целую часть. Повара, конечно, получали инструкции, что к белому рису надо добавить столько-то ячменя, но на практике в боевых условиях солдаты нередко готовили себе сами и брали только рис.

Витамин С – аскорбиновая кислота

Формально аскорбиновую кислоту называют витамином С. Человеческий организм не умеет его производить и не может без него существовать. Но есть существенное отличие.

Для большинства животных это не витамин, поскольку образуется в процессе обмена веществ. У человека для синтеза аскорбиновой кислоты не хватает гена всего одного фермента: *L*-гулонолактоноксидазы (ГУЛО). Ферменты – это белки, которые катализируют, то есть ускоряют, те или иные химические реакции в организме. Правильнее, вероятно, сказать «осуществляют» – без них во многих случаях эти реакции вообще не могли бы произойти. Названия почти всех ферментов традиционно оканчиваются на *-аза*, а перед этим обычно идёт длинное слово, описывающее химическую реакцию, которую осуществляет этот фермент.



Аскорбиновая кислота

L-гулонолактоноксидаза окисляет *L*-гулонолактон кислородом, и образуется аскорбиновая кислота.

На месте, где у других животных находится ген ГУЛО, у человека находится псевдоген. То есть там есть последовательность ДНК, похожая на ген ГУЛО, но она содержит такие мутации, что фермент не может быть синтезирован. Люди в этом не одиноки: гена ГУЛО нет у всех обезьян, его нет у костистых рыб, у птиц отряда воробьиных, у морских свинок. Его нет у некоторых летучих мышей, причём в отряде летучих мышей он независимо исчезал несколько раз.

Непонятно, с чем связано такое частое его исчезновение, но, конечно, оно возможно потому, что большинство животных получают аскорбиновую кислоту





из пищи. Её нужно совсем немного: взрослым людям – 60–90 мг в день. Она есть, хотя и в разных количествах, почти в любой сырой пище. Проблема возникает у людей, когда они оказываются в условиях, где нет свежих овощей и фруктов, а вся пища термически обработана или высушена: в дальних плаваниях, осаждённых городах, лагерях за колючей проволокой...

В рассказе Джека Лондона «Ошибка Господа Бога» из серии рассказов про Смока Беллью большая группа сектантов во главе со своей «пророчицей» отправились на Аляску, чтобы разбогатеть. По неопытности они обменяли свои запасы сырого картофеля на сушёный, не содержащий витамина С, – и все заболели цингой. Только один негодяй, который руководил хозяйством секты, не заболел. Герои рассказа понимают, что у него, вероятно, хранится небольшой запас сырого картофеля, отбирают его и спасают больных.

Всю долгую ночь, снова и снова сменяя друг друга, Смок и Малыш давали больным картофельный сок, втирали его в распухшие дёсны, в которых шатались и постукивали зубы, и заставляли несчастных тщательно глотать каждую каплю драгоценного эликсира.

Назавтра к вечеру в состоянии обоих пациентов произошла чудесная, прямо невероятная перемена. Они уже не были самыми тяжёлыми больными в лагере. Через сорок восемь часов, когда была выпита последняя капля картофельного сока, оба они оказались вне опасности, хотя и далеки ещё от полного выздоровления.

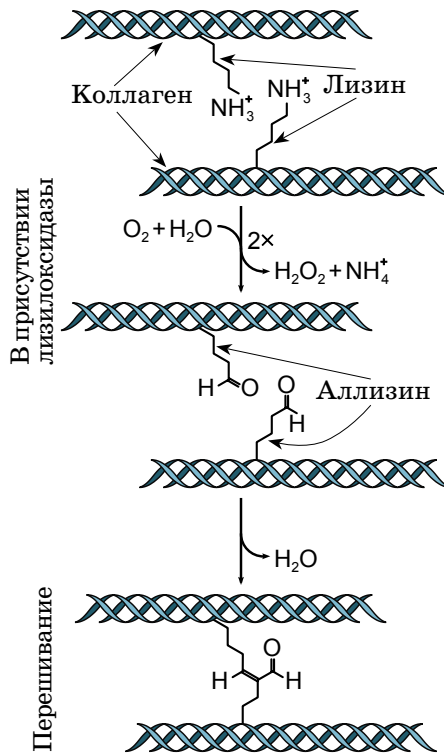
Среди разных химических реакций, для которых нужна аскорбиновая кислота, – «перешивание» между собой молекул *коллагена*, основного белка соединительной ткани. На рисунке на с. 15 показана цепь химических реакций, которая приводит к «перешиванию» коллагена. Центральная реакция в этом процессе – окисление аминокислоты лизина ферментом лизилоксидазой. Вот для этого процесса совершенно необходима аскорбиновая кислота. В её отсутствие коллаген не перешивается, и соединительная ткань становится менее прочной. В первую очередь это проявляется в стенках сосудов – сосуды становятся лом-

кими и у человека происходят внутренние кровотечения, зубы оказываются плохо прикреплёнными к надкостнице, начинают качаться и выпадать. Болезнь, связанная с дефицитом аскорбиновой кислоты, называется *цингой*.

История цинги, так же как история бери-бери – это история медицинской косности. Первое упоминание о цинге в египетском медицинском «папирусе Эберса» предлагает правильное лечение чесноком. Но Гиппократ, а за ним европейская наука, считали цингу инфекционной болезнью. С XVI века ходили слухи, что фрукты помогают от цинги, и Британская Ост-Индская компания рекомендовала давать матросам лимоны. Но это считалось предрассудком, а передовая медицинская наука считала, что цинга – это эпидемия, вызываемая грязью или плохими условиями.

Английский адмирал Ансон был хорошо образованным аристократом и прекрасно знал, что, по мнению учёных, цинга бывает от грязи и антисанитарии. Он всячески боролся за то, чтобы на его кораблях была идеальная чистота. Поэтому в его кругосветном путешествии (1740–1744 гг.) из 1900 человек умерло 1400.

А знаменитый путешественник Джеймс Кук – выходец из самых низов, сын батрака – начинал с того, что служил юнгой на корабле, перевозившем уголь. Он впоследствии хорошо обучился навигации и астрономии, необходимым капитану, но в других вопросах он руководствовался здравым смыслом. На его кораблях всегда стояла бочка с кислой капустой, и матросы могли её оттуда брать. В его трёх кругосветных путешествиях (1768–1779 гг.) никто никогда не болел цингой.



Художник Мария Усеинова

Материал подготовил
Григорий Мерзон



ВИСОКОСНЫЙ ГОД И ЗВЁЗДНЫЕ СУТКИ

В одной книжке Квантик прочитал такие вопрос и ответ.

Вопрос. Почему каждый четвёртый год длиннее на один день?

Ответ. Всё дело в том, что привычные нам сутки продолжаются на самом деле не 24 часа, а немного меньше – 23 часа 56 минут и 4 секунды. Для повседневной жизни это не имеет значения, а вот для различных расчётов эта разница существенна. Если сложить неучтённые минуты и секунды, то за четыре года как раз набираются целые сутки.

Квантик подумал, что это очень странно – не проще ли тогда было бы назвать часом ровно $1/24$ часть суток, а не делать непостоянным число дней в году? Возникли у него и другие вопросы – попробуйте на них ответить.

1. За сколько времени в календарях Квантика и Ноутика набегит разница в одни сутки, если у Квантика в сутках будет 24 часа («солнечные сутки»), а у Ноутика 23 часа 56 минут и 4 секунды («звёздные сутки»)?

Решив эту задачу, Квантик убедился, что к високосному году эти два вида суток не имеют никакого отношения. И сразу возникли ещё два вопроса.

2. Почему на самом деле каждый четвёртый год ещё со времён Юлия Цезаря обычно удлиняют на один день?

3. В чём смысл звёздных суток, которые действительно примерно на 4 минуты короче обычных?

(Указание: вспомните ответ на задачу 1 и подумайте про вращение Земли вокруг Солнца.)

Художник Алексей Вайнер

Капли на стекле

Капли, как правило, стремятся принять круглую форму из-за поверхностного натяжения. Почему тогда капли на запотевшей поверхности часто принимают самые разнообразные формы, далёкие от круга?



Автор Александр Бердников • Фото автора

Художник Анна Горлач



– Мне попался совершенно замечательный листик отрывного календаря! – объявил таракан Кузька. – Смотрите, какая тут интересная картинка.

– Игра в 15, – прочёл заголовок дятел Спятел. – Дана коробочка размером 4×4 клетки, на дне которой лежат 16 плиток 1×1 . Плитки пронумерованы, одна из плиток (с числом 16) убрана. В результате имеется одна пустая клетка, на которую можно передвинуть любую из соседних плиток. На освободившееся место опять можно передвинуть одну из соседних плиток и т. д. Требуется, передвигая плитки, расположить их в каком-нибудь стандартном порядке.

– Скучно ты читаешь, – сказала Бусенька. – Где задор? Где полёт фантазии? Дай-ка я прочту. – Бусенька взяла листик календаря и стала читать: – Заголовок! Игра в 15! В коробочке размером 4×4 живут 16 плиток 1×1 , каждая в своей клеточке.

– Живут? – встрепенулся Кузька.

– Так и написано – «живут»? – поддержал его дятел Спятел.

– Какая разница – так или не так? Букв столько же, зато какой драйв! Не мешайте зажигать. Так, где мы читаем... Ага, живут 16 плиток! Плитки пронумерованы, любые две плитки либо дружат, либо вовсе незнакомы.

– А-а-а-а, они ещё и дружат! – проверещал Кузька. – Мне кажется, кто-то из нас спятил.

– Время от времени две плитки, которые дружат друг с другом и имеют общую сторону, меняются местами, – продолжала Бусенька. – Спрашивается, всегда ли с помощью таких обменов плитки смогут расположиться в каком-нибудь стандартном порядке.

– Что значит «всегда ли»? – спросил Кузька. – Разве тут что-то зависит от времени?

– Имеется в виду, – пояснила Бусенька, – что начальное расположение может быть разным, а стандартное – одно, например, как на твоём листи-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Один из возможных стандартных порядков

ке. И нас спрашивают, при любом ли начальном расположении плитки смогут переползти в стандартное.

– Почему это «переползти»? – возразил дятел Спятел. – Может, они при обмене не ползут, а прыгают.

– Пусть они все передружатся, – предложил Кузька, – тогда им ничего не стоит допрыгать до какого угодно порядка!

– Если все друг с другом дружат, это помогает решить столько проблем... – сказала Бусенька. – К сожалению, наша жизнь устроена гораздо хуже.

– А что известно о том, кто с кем дружит? – спросил дятел Спятел.

– Да, в общем-то, ничего не известно. Для каждого варианта дружбы получается своя головоломка.

– Ну тогда пусть, например, они как-нибудь расселись по клеткам и оказалось, что каждая плитка дружит лишь с соседними (по стороне), – предложил Кузька. – Смогут ли они при такой дружбе расположиться в любом порядке?

– Нет, – подумав, сказал дятел Спятел. – Можно расставить плиточки так, что никакие два друга не будут соседями. Тогда никакой обмен невозможен.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

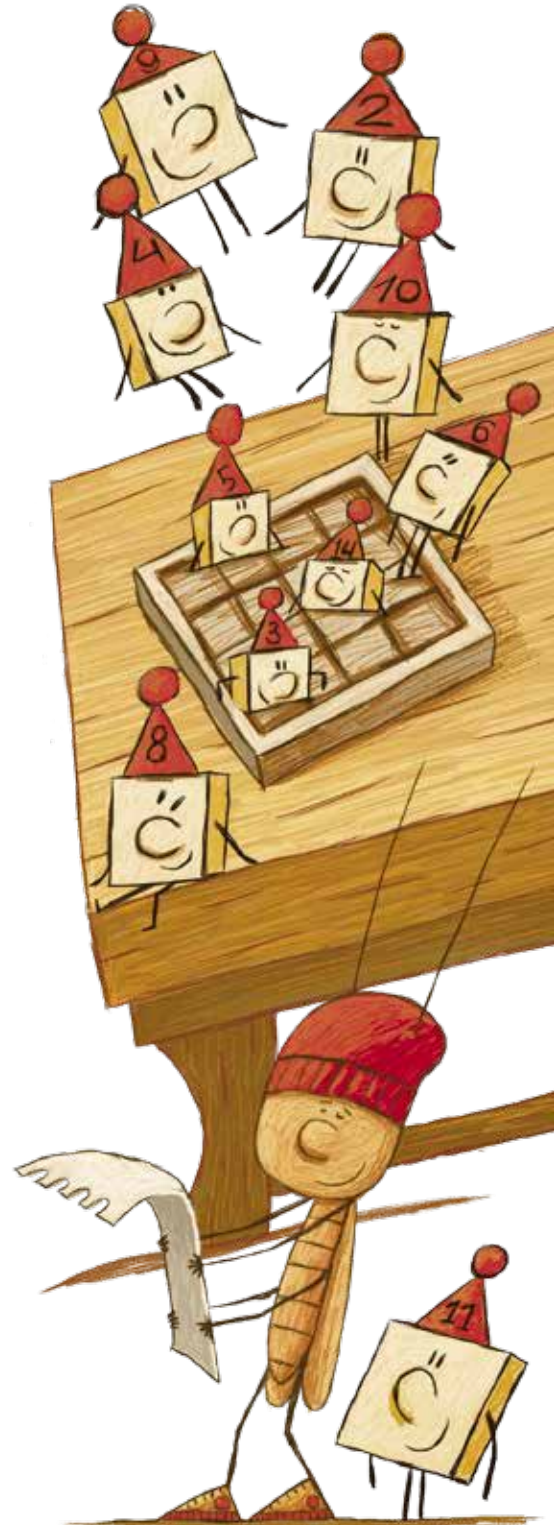
1	3	10	12
5	7	14	16
9	11	8	6
13	15	4	2

Начальное расположение, в котором дружат только соседи по стороне

Здесь плитки, которые на левой картинке были соседями и дружили, теперь живут в несоседних клетках

– Какая неожиданность, – сказал Кузька. – Но ведь это вы говорите про ненастоящую игру в 15. На листике календаря описана другая игра! Я же вижу по картинке – плитка номер 16 вынута!

– Ничего не другая. Просто в «настоящей игре в 15» 16-я плитка дружит со всеми, а больше никто ни с кем не дружит. Получается, что любая плитка может меняться только с 16-й. А чтобы упростить обмены, клетку, где живет 16-я плитка, оставили пустой. Если какая-то из плиток хочет поменяться, она приходит на пустую клетку и занимает её (а свою клетку освобождает) – вот тебе и обмен!





– Это нечестно! – возмутился Кузька. – Ты дружишь со всеми, а тебя даже в свой дом не пускают.

– А настоящая игра в 15 всегда собирается? То есть всегда ли можно получить стандартный порядок? – спросил дятел Спятел.

– Не всегда, – ответила Бусенька. – Но по начальному расположению плиток легко вычислить, соберётся головоломка или нет, – за это отвечают... беспорядки!

– Что-то ты в философию ударилась, – обворчал это заявление дятел Спятел, – голод мешает сытости, сон прогоняет бодрость, беспорядки мешают порядку.

– Точно! Философия! – согласилась Бусенька. – Это именно то, что надо. Требуется повысить уровень абстрактности. Кузька, надень-ка ты свой шлем НШ-19У, на всякий случай. Для начала создадим эстетический задел – покрасим доску 4×4 в шахматном порядке. В этих клетках будут жить плиточки. Но прежде чем заселять доску, заметим, что соседние клетки на ней – всегда разного цвета, однако при этом не любые две клетки разного цвета – соседи.

– Пожалуй, я и впрямь надену шлем, – сказал Кузька и быстренько сгонял за шлемом. – Умеешь ты находить сложности в самых простейших местах.

– Попробуем упростить, – предложила Бусенька, – давайте на этой доске считать соседними клетками любые две клетки разного цвета!

– Выходит, у каждой белой клетки 8 соседних чёрных? – удивился Кузька. – Разве можно так раскрасить доску, чтобы каждая белая соседствовала с восемью чёрными, а каждая чёрная – с восемью белыми?

– А нам больше не нужно ничего раскрашивать. Клетки уже раскрашены, и мы просто договариваемся, что у каждой белой клетки соседями являются все чёрные, а у каждой чёрной – все белые!

– Противоположности притягиваются, – прокомментировал дятел Спятел. – Но я не понял: мы говорим про игру в 15 или про какую-то другую?

– Мы слегка меняем правила игры в 15. Теперь у нас больше соседних клеток, значит, плиточкам легче меняться с 16-й плиткой. Но оказывается, что даже с облегчёнными правилами головоломка иногда не собирается. Сейчас увидите. Мы разобрались с соседством,

теперь разместим на доске плиточки. Сами плиточки прозрачные, на них виден только номер, и каждая плитка может жить и в чёрной клетке, и в белой. Поселим их на доску, например, вот так. И будем считать это расположение плиток стандартным.

1	9	2	10
11	3	12	4
5	13	6	14
15	7	16	8

– Какой-то нелепый стандарт, – сказал дятел Спятел, – очень сложный.

– Сейчас упростим! Для этого отбросим всё лишнее. Так как клетки разного цвета мы считаем соседними, нам не обязательно располагать клетки в виде квадратной доски – можно расположить их в линию. Главное помнить, что при обмене меняются местами плитки, живущие в клетках разного цвета!

– Шаманство какое-то, – пробормотал Кузька.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

– А теперь будем считать беспорядки! Расставим плиточки как угодно и положение плиток, в котором плитка с большим номером лежит левее плитки с меньшим номером, будем называть *беспорядком*.

2	1	3	4	12	6	7	8	9	10	11	5	13	14	15	16
---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	----	---	----	----	----	----

Например, вот здесь плитки 2 и 1 образуют беспорядок. И 12 и 6 образуют беспорядок. И 7 и 5. Давайте подсчитаем суммарное число беспорядков.

– Здесь 13 беспорядков, – доложил Кузька. – Странными делами мы сегодня занимаемся. Наблюдаем за живыми плитками, назначаем дружбу, считаем беспорядки...

– Зато, как говорится в рекламных роликах, – бодро откликнулся дятел Спятел, – ни один таракан при выполнении этих действий не пострадал.

– Проведём эксперимент! – объявила Бусенька. – Поменяем местами любые две плитки, лежащие рядом (независимо от того, дружат они или нет). Скажи мне, Кузька, как изменится число беспорядков?

Кузька задумался. Он пошевелил усами влево, потом вправо, потом опять влево и, наконец, сказал:

– Число беспорядков либо увеличится на 1, либо уменьшится на 1.





– Правильно! Теперь проведём эксперимент сложнее. Если поменять местами любые две плитки (неважно – близко они или далеко, дружат или не дружат), то число беспорядков увеличится или уменьшится на нечётное число! Попросим прокомментировать это наблюдение наших экспертов и менторов!

Эксперты и менторы, в лице дятла Спятла, закатили глаза и стали качаться из стороны в сторону. Потом они выкатили глаза обратно и заявили:

– Проще всего это увидеть на примере. Допустим, мы хотим поменять местами плитки 4 и 5 из предыдущей картинки. Между ними семь других плиток.

2	1	3	4	12	6	7	8	9	10	11	5	13	14	15	16
---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	----	---	----	----	----	----

↑ Поменяем местами плиточки ↑

Сначала подгоним плитку 4 к плитке 5, меняя её каждый раз с соседней справа плиткой. Мы сделаем в результате 7 обменов, и каждый раз, как выяснил Кузька, число беспорядков будет меняться на ± 1 .

2	1	3	12	6	7	8	9	10	11	4	5	13	14	15	16
---	---	---	----	---	---	---	---	----	----	---	---	----	----	----	----

↑ Подгоним плитку 4 вправо к плитке 5 ↑

Далее двигаем плитку 5 влево, меняя каждый раз с очередным соседом, пока она не придёт на место, где вначале стояла плитка 4. Потребуется 8 обменов.

2	1	3	5	12	6	7	8	9	10	11	4	13	14	15	16
---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	----	---	----	----	----	----

↑ Передвинули плитку 5 влево на её новое место ↑

Готово. Плитки 4 и 5 поменялись местами. Мы сделали $7+8$ обменов, каждый раз изменяя число беспорядков на ± 1 . Значит, оно изменилось на нечётное число. Аналогично обстоят дела в общем случае.

– Подведём итог, – сказала Бусенька, – когда мы меняем местами любые две плитки, чётность числа беспорядков меняется на противоположную. Запомним это. И да, ещё будем следить за «адресом» 16-й плитки: если 16-я плитка живёт в чёрной клетке, будем считать, что её адрес равен 0, а если в белой – её адрес равен 1. А теперь – Страшный Секрет игры

в 15. Вы ещё помните, как меняются местами плитки? Шестнадцатая плитка дружит со всеми, и значит, она может поменяться местами с любой «соседней». Иными словами, если 16-я плитка живёт в чёрной клетке, она может поменяться местами с любой плиткой, живущей в белой клетке, и наоборот: если 16-я в белой, то она может поменяться с любой чёрной.

– Помним, помним, – сказал дятел Спятел, – секрет давай.

– Страшный Секрет состоит в том, что чётность числа беспорядков либо всегда равна адресу 16-й плитки, либо всегда не равна!

– Как это? – не понял Кузька.

– Ну вот есть у тебя, допустим, такая расстановка:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	14	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

Тут один беспорядок, то есть чётность числа беспорядков равна 1. А 16-я плитка живет в чёрной клетке, то есть её адрес равен 0. Чётность не совпадает с адресом! Если мы сделаем один обмен, чётность изменится и станет равна 0. Но при обмене 16-я плитка переедет на белую клетку, её адрес станет равен 1, и чётность опять не совпадёт с адресом!

– Вот ужас! – воскликнул Кузька. – После следующего обмена они снова будут не равны, потом опять не равны... А в стандартном расположении они равны. Значит, мы никогда не достигнем стандартного!

– А если чётность равна адресу – сможем? – усомнился дятел Спятел.

– Сможем. Даже в исходной игре в 15 сможем, а уж в этой линейной чёрно-белой это совсем просто.

Несколько задачек

В задачах описано, какие плитки дружат. Требуется ответить на вопрос: из любого ли начального положения на доске 4×4 плитки смогут перейти в стандартное положение?

1. 16 плиток выложены по кругу, каждая плитка подружилась с двумя соседними.

2. Каждая из 15 плиток дружит с остальными четырнадцатью. А ещё есть 16-я плитка, которая дружит только с 15-й.

3. Есть 5 общительных плиток и 11 необщительных. Каждая необщительная дружит только (со всеми) общительными. Сами общительные между собой не дружат.

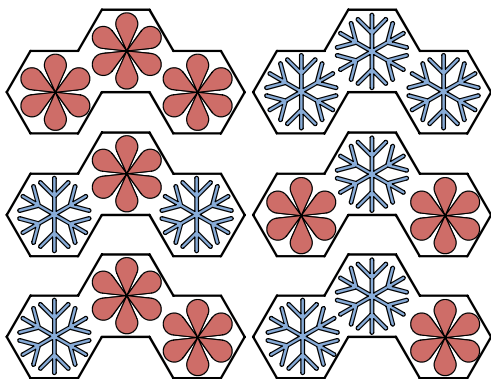
Художник Инга Коржнева





ЗМЕЙКИ ИЗ ШЕСТИ УГОЛКОВ

Каждый элемент этой головоломки – уголок из трёх одинаковых правильных шестиугольников. На каждом шестиугольнике нарисован цветок или снежинка. Рисунок на лицевой стороне каждого шестиугольника такой же, как на тыльной. Всего получается 6 различных элементов (см. рисунок), их разрешается переворачивать.



Художник Алексей Вайнер

В каждой задаче все 9 цветков (как и все 9 снежинок) должны выстраиваться в одну змейку. Змейка – это цепочка из шестиугольников с одним и тем же рисунком. У звеньев змейки не должно быть лишних соседей: у промежуточных звеньев – по два соседа, у крайних – по одному.

Задача 1. Соберите из всех элементов две змейки.

Задача 2. Соберите две змейки, каждая из которых зеркально симметрична.

Задача 3. Соберите две змейки, которые обе на каждом шаге поворачивают на 120° (то есть у ломаной, соединяющей центры соседних шестиугольников змейки, все углы равны 120°).

По ссылке kvan.tk/6corners – заготовка для печати на А4.



По-русски группу животных обычно называют либо *стадом* (коров, коз, антилоп, слонов...), либо *стаей* (волков, ворон, сов...). Встречаются и более специфические слова: *отара* овец, *табун* лошадей, *рой* пчёл, *колония* бактерий, *косяк* рыб...

В английском языке подобных слов ещё больше: a *herd of sheep*, a *flock of birds*, a *gaggle of geese*, a *pack of*

wolves, a *colony of rabbits*, a *school of fish*... и множество более экзотичных (сейчас обычно не используемых): a *murder of crows*, a *parliament of owls*...

А какое ещё из подобных собирательных существительных для животных было заимствовано из английского языка в русский и сейчас используется? Причём оно не переведено, а заимствовано в исходном виде.

Художник Ангелина Дорожинская



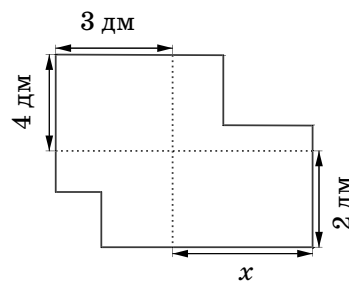
ОЛИМПИАДА ХС САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил
Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс, приглашаются все желающие. Первый (письменный) тур очередной олимпиады прошёл 18 ноября 2023 года. Мы приводим несколько задач этого тура для 6 и 7 классов, попробуйте с ними справиться. Всего в 6 и 7 классах предлагалось по 4 задачи, на решение отводилось 3 часа.

Избранные задачи I тура

1 (7 класс). Дана фигура в виде прямоугольника, из которого вырезано два меньших прямоугольника. Проведена вертикальная прямая, делящая эту фигуру на две части равной площади, и аналогичная горизонтальная прямая. На схеме отмечены длины некоторых отрезков в полученной фигуре. Найдите длину отрезка x .



Александр Кузнецов

2 (7 класс). В магазине «Всё для ученика» Паша купил портфель, тетрадь, линейку и ручку. Он заметил, что стоимость портфеля выражается четырёхзначным числом рублей, не содержащим нулей в десятичной записи. Если из этого числа вычеркнуть одну цифру, получится стоимость тетради. Если из стоимости тетради вычеркнуть одну цифру, будет стоимость линейки. Наконец, если из стоимости линейки вычеркнуть одну цифру, получится стоимость ручки. Могла ли покупка стоить ровно 2323 рубля?

*Таисия Коротченко,
Александр Кузнецов*

3 (6 класс). Во дворцах Ю и Я живут цари и шахи, каждый из них либо добрый, либо злой. Каждый правитель отбыл утром в другой дворец на монарховозе, а вечером вернулся. Оказалось, что в каждом монарховозе, ехавшем в тот день из Ю в Я, количество



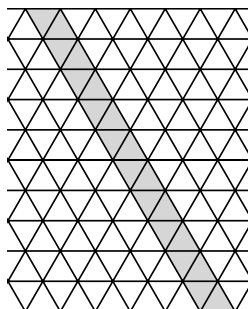


ХС САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ ОЛИМПИАДЫ

царей было на четверть больше числа добрых правителей. А в каждом монарховозе из Я в Ю число злых было на одну десятую больше числа шахов. Кого больше среди жителей обоих дворцов вместе – царей или шахов – и во сколько раз?

Константин Кохась

4 (6 класс). На бесконечном листе бумаги в треугольную клеточку можно закрашивать полосы шириной в одну клетку. Такие полосы бывают трёх разных направлений. В одном направлении закрасили 5 полос, в другом – 6, в третьем – 7. В результате некоторые клетки остались неокрашенными, некоторые покрашены 1 раз, некоторые 2, а некоторые даже 3 раза. Клеток, покрашенных 3 раза, оказалось 34 штуки. Сколько клеток покрашено 2 раза?



Константин Кохась

5 (7 класс). На школьный праздник привезли воздушные шарики десяти разных цветов. Учительница расставила по кругу 40 детей и раздала им по три шарика. (Некоторые из десяти цветов могли не попасться ни одному из детей.) Затем она попросила каждого ребёнка передать один шарик соседу справа и указала, какой именно. Если бы все дети выполнили просьбу учительницы, то у каждого из них оказалось бы три шарика разного цвета. Вместо этого каждый ребёнок передал один шарик (не обязательно тот, который было нужно) своему соседу слева. У какого наибольшего числа детей могло оказаться три шарика одного цвета?

Александр Кузнецов

6 (6 класс). Натуральное число назовём *крупноостаточным*, если сумма остатков, которые оно даёт при делении на 125 и на 80, не меньше 102. Сколько существует крупноостаточных чисел, не превосходящих 1 000 000?

Александр Голованов

Художник Сергей Чуб



НАШ КОНКУРС, IV ТУР

(«Квантик» № 12, 2023)

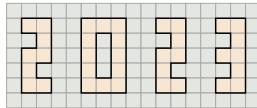
16. Можно ли записать подряд по возрастанию три последовательных натуральных числа и поставить между ними два знака арифметических действий так, чтобы итог равнялся 2023, если а) оба раза разрешается использовать любой знак; б) надо использовать один знак сложения и один знак умножения?

Ответ: да. а) Например, $2022 - 2023 + 2024$ или $45 \cdot 46 - 47$; б) $43 + 44 \cdot 45$.

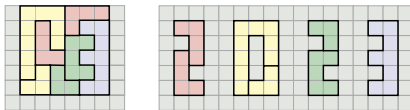
17. У Пети была кубическая коробка и много кусочков сахара размером $1 \times 2 \times 2$. Он смог поместить весь сахар в коробку в несколько слоёв, располагая кусочки параллельно сторонам коробки гранью 2×2 вниз. Потом он решил переложить все кусочки в такую же коробку, располагая их параллельно сторонам коробки гранью 1×2 вниз, но задумался – точно ли это возможно? Помогите Пете ответить на вопрос.

Ответ: возможно. Пусть Петя, поместив кусочки сахара гранью 2×2 вниз, поставит коробку вместе с ними боковой гранью вниз. Получится такая же кубическая коробка, внутри которой все кусочки сахара лежат гранью 1×2 вниз.

18. Разрежьте квадрат 6×6 на семь частей и сложите из них изобразённую на рисунке фигуру в виде числа 2023.



Ответ: см. рисунку.



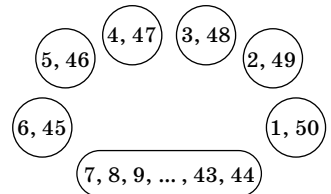
19. По кругу стоят 7 диванов, на них сидит всего 50 человек, на каждом диване – хотя бы один человек. Каждый сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина людей выше меня ростом, а ровно половина – ниже». Какое наибольшее число людей могло сказать правду?

Ответ: 48. Самый высокий человек точно соврал (выше него никого нет), и, аналогично, соврал самый низкий. Значит, больше 48 человек сказать правду не могли.

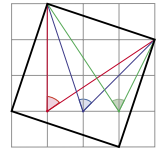
Приведём пример, когда сказали правду 48 человек. Возьмём 50 человек разного роста и пронумеруем их числами от 1 до 50 по возрастанию роста. Посадим на один из диванов людей с номерами 1 и 50, а дальше на каждый предыдущий по часовой стрелке диван будем сажать по-

ровну самых высоких и самых низких из оставшихся (например, как на рисунке).

Тогда для всех, кроме 1-го и 50-го, ровно половина людей на следующем диване будет ниже, и ровно половина – выше.

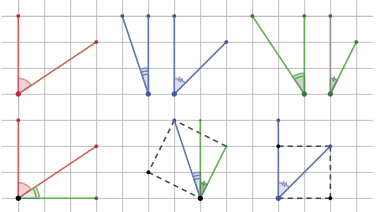


20. Внутри квадрата со стороной, равной диагонали прямоугольника 1×3 клеточки, отметили три угла – красный, синий и зелёный, – как показано на рисунке. Чему равна их сумма?

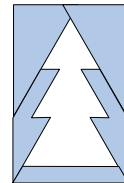


Ответ: 180° . Разделим синий и зелёный углы на части вертикальными линиями сетки и переложим части, как на рисунке.

Красный угол и левая часть зелёного вместе дадут прямой угол; левая часть синего угла вместе с правой частью зелёного, как и правая часть синего угла, образуют углы между сторонами и диагоналями пунктирных квадратов и поэтому равны по 45° . Значит, сумма отмеченных углов равна $90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.



НОВОГОДНЯЯ ГОЛОВОЛОМКА – 2024
(«Квантик» № 1, 2024)



СКОЛЬКО БУДЕТ СОВПАДЕНИЙ?

(«Квантик» № 1, 2024)

Марь-Иванна права: восьми точек совпадения (включая два найденных нуля) не наберётся. Но для этого придётся кое-что подсчитать, рассмотрев подряд все 6 оставшихся пар. Итак:

Пара «Цельсий – Фаренгейт». Выражение температуры по Фаренгейту через температуру по Цельсию нам известно: $T_F = 32 + 1,8T_C$. И если в какой-то точке их числовые значения одинаковы (и равны просто T), то можно записать:

$$T = 32 + 1,8T,$$

откуда $T = -40$. При этой температуре показания по Цельсию и Фаренгейту совпадут.

Пара «Цельсий – Ранкин». Аналогично,

$$T = 491,67 + 1,8T,$$

откуда $T = -614,59$. А такой температуры ни по Цельсию, ни по Ранкину не бывает, она ниже абсолютного нуля. Совпадение невозможно!

Пара «Фаренгейт – Ньютон». У нас нет формулы, выражающей «прямую связь» между этими шкалами. Но есть выражения их обоих через температуру по Цельсию! Приравниваем:

$$32 + 1,8T = 0,33T,$$

откуда $T = -21,77$. Но это – температура в градусах Цельсия! А по Фаренгейту и Ньютону она равна $32 + 1,8 \cdot (-21,77) = -0,33 \cdot 21,77 = -7,18$ градусов в обоих шкалах.

Пара «Фаренгейт – Кельвин». Аналогично, $32 + 1,8T = 273,15 + T,$

откуда $T = -31,43$ (по Цельсию!). Ещё одно совпадение. По Фаренгейту и Кельвину будет $32 + 1,8 \cdot 301,43 = 273,15 + 301,43 = 574,58$.

Пара «Ньютон – Кельвин». Имеем:

$$0,33T = 273,15 + T,$$

откуда $T = -407,69$ (опять же по Цельсию). Снова недостижимая температура.

Пара «Ньютон – Ранкин». Здесь:

$$0,33T = 491,67 + 1,8T,$$

откуда $T = -334,47$ (по Цельсию). И тут мимо.

Итак, из шести гипотетических совпадений реальные три. Всего совпадений (с учётом двух ранее найденных нулей) получается пять.

■ НА ВХОД И НА ВЫХОД

(«Квантик» № 1, 2024)

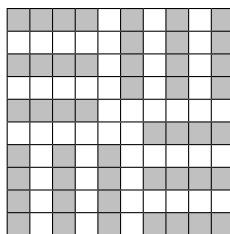
В условии сказано, что код надо набирать и по пути туда, и по пути обратно – видимо, с внутренней стороны калитки есть точно такой же замок с клавиатурой. Маша просунула руку сквозь прутья калитки и набрала код с обратной стороны. Кстати, это реальная история, произошедшая с автором задачи.

■ ОЦЕНИМ КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ

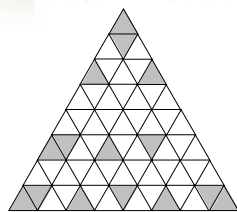
И НЕ ТОЛЬКО («Квантик» № 1, 2024)

5. Ответ: 12. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Клетчатая доска 10×10 содержит 121 узел. Каждый узел может быть покрашен не более одного раза. Каждый прямоугольник 1×4 содержит 10 узлов. Чтобы закрасить 13 прямоугольников, потребовалось бы $13 \cdot 10 = 130$ узлов – больше, чем имеется.

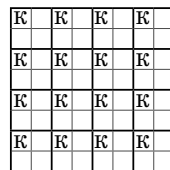
Сравните с ответом в задаче 4.



6. Ответ: из 64 треугольников. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Уберём из доски один ряд треугольников. $1 + 2 + \dots + 7 + 8 = 36$ узлов сетки. Так как общих узлов у фигур быть не может, указанные фигуры занимают $3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 = 37$ узлов сетки. Значит, такой доски не хватит.



7. Ответ: 16. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Разобьём доску на 16 квадратов 2×2 . В каждом таком квадрате можно расположить не более одного короля.



Отметим, что подсчёт числа узлов не даёт нужной оценки, так как их на доске 81, а каждый король занимает одну клетку, то есть 4 узла.

■ ИНЕЙ И ТЕНЬ («Квантик» № 1, 2024)

1. В течение дня солнце движется по небу – движутся и тени. Там, откуда тень только что ушла, образуется белая полоска из не успевшего растаять инея, а место, где тень только что появилась, ещё не успело покрыться инеем и поэтому остаётся тёмным.

2. В обоих полушариях солнце в течение дня движется с востока на запад, значит, тень от неподвижного объекта будет описывать дугу по направлению с запада на восток. Для наблюдателя в Северном полушарии солнце идёт с востока на запад через юг («по часовой стрелке»), а для наблюдателя в Южном полушарии – через север («против часовой стрелки»).

Иней показывает, где недавно была тень. На фотографии видно, что тень крутится по часовой стрелке, значит, полушарие Северное.



■ СТРАННАЯ ЛЕСТНИЦА

(«Квантик» № 1, 2024)

Такая конструкция (её называют «гусиный шаг») позволяет сэкономить место за счёт более крутого наклона (см. рисунок). Если обычную лестницу



сделать очень крутой, то ступеньки придётся делать либо очень узкие, либо сильно нависающие друг над другом. В любом случае спускаться по ней лицом вперёд будет неудобно или даже невозможно.

■ ВИСОКОСНЫЙ ГОД И ЗВЁЗДНЫЕ СУТКИ

1. Примерно за один год (365 раз по 4 минуты – это чуть больше 24 часов), а вовсе не за 4.

2. Годом хотелось бы называть время, за которое Земля делает один оборот вокруг Солнца («астрономический год»), сутками – время, за которое Земля делает один оборот вокруг своей оси. Но нет никакой причины для того, чтобы год состоял из целого числа дней – и действительно, астрономический год состоит примерно из $365\frac{1}{4}$ дней. Если эту разницу игнорировать и объявить календарным годом период ровно из 365 дней, даты времён года будут постепенно смещаться.

Добавление одного дня раз в 4 года в основном решает эту проблему, но не до конца, так как астрономический год немного короче $365\frac{1}{4}$ дней – поэтому сейчас мы пользуемся ещё более точным календарём (по этому поводу см. статью «День рождения по новому стилю» в «Квантике» № 9 за 2023 год).

3. Выше было сказано, что сутки – это время оборота Земли вокруг своей оси, но это не вполне точно. Обычные сутки – это *солнечные сутки*, то есть время, за которое при наблюдении с Земли Солнце делает круг. Или, другими словами, время, за которое Земля снова поворачивается к Солнцу той же стороной.

Из-за того, что Земля вращается вокруг Солнца, за солнечные сутки Земля делает чуть больше одного оборота – а именно, за год набирается разница ровно в один оборот (чтобы разобраться в этом, полезно решить задачу: монету обкатывают вокруг такой же неподвижной монеты – сколько оборотов она сделает к моменту возвращения в исходную точку?). То есть солнечные сутки примерно на $1/365$ длиннее звёздных суток, времени одного оборота Земли вокруг своей оси. Разобравшись с этим, попробуйте решить задачу «День или ночь?» в «Квантике» № 8 за 2022 год.

■ КАПЛИ НА СТЕКЛЕ

Когда поверхность запотеваает, капли на ней растут и, дорастая до соседей, сливаются с ними. Если границы капли не слишком легко двигаются по поверхности (поверхность не

идеально гладкая, не идеально чистая), получившаяся после объединения большая капля не превратится в круг, а так и останется «кляксой» – оболочкой «родительских» капель.

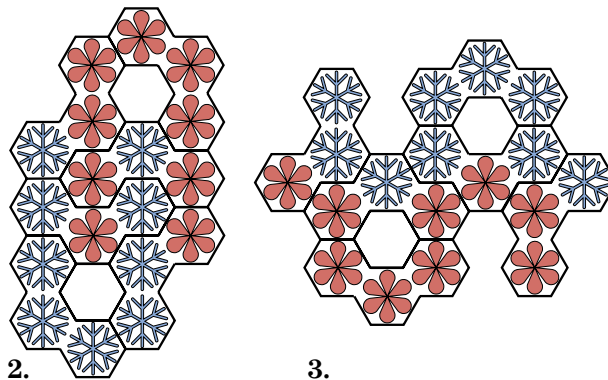
■ ЖИВАЯ ИГРА В 15

1. Ответ: нет. В положении на правом рисунке на с. 19 плитки не могут сделать ни одного обмена.

2. Ответ: да. В игре в 15 мы можем любую плиточку передвинуть за несколько ходов на любую из клеток. В условиях задачи 15-я плитка дружит со всеми, и поэтому она аналогична «пустышке» из обычной игры в 15. Пользуясь 15-й клеткой как пустышкой, передвинем 16-ю клетку в угол (на 16-ю клетку доски). После этого остальные плитки легко расставляют по своим местам, так как все они дружат друг с другом.

3. Ответ: нет. Раскрасим клетки в чёрный и белый цвет как во второй половине сказки. Пусть общительные плитки – это плитки 12, 13, 14, 15, 16. Адресом общительных плиток назовем чётность количества общительных плиток, живущих в чёрных клетках. Тогда здесь тоже работает фокус из сказки: расположения плиток, где чётность числа беспорядков не равна адресу общительных плиток, не приводятся к стандартному расположению.

■ ЗМЕЙКИ ИЗ ШЕСТИ УГОЛКОВ



■ ПАРЛАМЕНТ СОВ

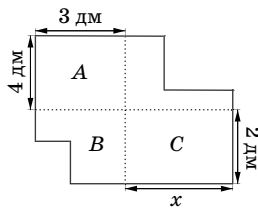
Прайд (pride, то есть «гордость») львов.

■ ХС САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. Ответ: 6 дм. Обозначим через A, B, C «четвертинки» фигуры, показанные на рисунке, а заодно и их площади. Тогда части A и B составляют вместе половину площади фигуры, и ча-

сти B и C тоже составляют половину площади фигуры. Значит, $A + B = B + C$. Тогда $A = C$. Выражая площади этих прямоугольных частей через стороны, получаем уравнение $3 \cdot 4 = 2x$, откуда $x = 6$.



2. Ответ: да. Например,
 $2154 + 154 + 14 + 1 = 2323$.

3. Ответ: шахов было в два раза больше. Заметим, что каждый правитель за день съездил и «туда», и «обратно». Если в каждом монарховозе из Ю в Я количество царей было на четверть больше числа добрых правителей, то и

суммарное количество всех царей на четверть больше числа добрых правителей. (1)

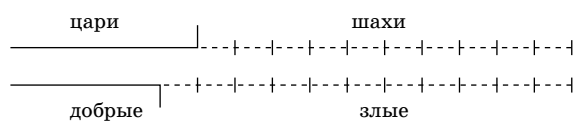
Аналогично

суммарное количество злых правителей на одну десятую больше числа шахов. (2)

Расставим всех правителей в ряд слева направо – сначала царей, потом шахов, на стыке поставим столбик. Теперь переставим правителей: слева поставим добрых, справа злых, а столбик передвинем на новый стык. Судя по условию (1), столбик пришлось передвинуть влево на число мест, равное $1/5$ от числа царей.



Судя по условию (2), столбик сдвинулся на $1/10$ от числа шахов.



Значит, шахов было в 2 раза больше.

4. Ответ: 112 клеток. Заметим, что пересечение любых двух полос разных направлений – это ромбик из двух клеток. Поэтому на пересечении полос первого и второго направления лежит $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$ клеток, при этом 34 из них покрашено в три цвета, а остальные 26 в два – эти клетки лежат в закрашенных полосах первого и второго направления, но не лежат в закрашенных полосах третьего направления. Аналогично на пересечении полос второго и третьего направления лежит $2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$ клетки, 34 из которых покрашено в три цвета, а остальные 50 в два. И наконец, на пересечении полос пер-

вого и третьего направления лежит $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ клеток, 34 из которых покрашено в три цвета, а остальные 36 в два. Итого ровно по два раза покрашено $26 + 50 + 36 = 112$ клеток.

5. Ответ: у 20 детей. Переформулируем задачу: у всех детей было по три разных шарика, и они два раза одновременно передавали шарики налево. Сколько «монохромных» детей могло получиться?

Заметим, что два соседних ребёнка A и B не могут оказаться монохромными. Действительно, пусть у левого ребёнка A вначале были шарики первого, второго и третьего цвета, а в конце – шарики первого цвета. Тогда он отдал налево шарики второго и третьего цвета и дважды получил от B шарик первого цвета, то есть он получил от B шарик первого цвета, который был у B с самого начала, а также ещё один шарик первого цвета, который B получил от своего правого соседа. Но тогда у B остались шарики второго и третьего цвета, которые были у него с самого начала.

Пример, в котором получаются 20 монохромных детей, строится несложно, если не загружать в свой мозг одновременно все детали. Пусть у всех детей вначале были шарики первого, второго и третьего цвета. Пусть дети с номерами, делящимися на 4, собирают три шарика первого цвета (и передают налево сначала шарик второго цвета, а потом третьего), а остальные дети с чётными номерами пусть собирают три шарика второго цвета (и передают налево сначала шарик первого цвета, а потом третьего). Дети с нечётными номерами будут передавать соседу сначала шарик того цвета, который тот собирает, а потом ещё раз такой же шарик (который ему передали на первом ходу).

6. Ответ: 500 000. Разобьём числа от 1 до 999 998 на 499 999 пар с суммой 999 999. Если (a, b) – любая такая пара, $a + b = 999 999$, то нетрудно сообразить, что сумма остатков a и b при делении на 125 равна 124 (то есть остатку числа 999 999 при делении на 125). Аналогично сумма остатков a и b при делении на 80 равна 79 (то есть остатку числа 999 999 при делении на 80). Тогда в каждой паре (a, b) сумма всех четырёх остатков равна $124 + 79 = 203$, поэтому ровно одно из чисел a и b крупноостаточное. Итого мы нашли 499 999 крупноостаточных чисел. Ещё есть крупноостаточное число 999 999 и не крупноостаточное число 1 000 000.



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 марта в систему проверки konkurs.kvantik.com (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу matkonkurs@kvantik.com, либо обычной почтой по адресу 119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».

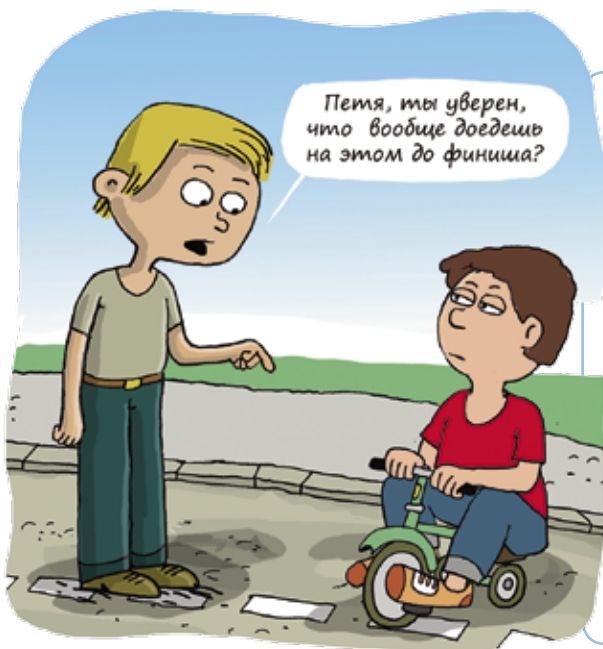
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VI ТУР

26. Расставьте на шахматной доске 4×4 четырёх коней и четырёх слонов так, чтобы эти восемь фигур не били друг друга (фигуры бьют друг друга вне зависимости от цвета).



27. Гонщик Петя тренируется на кольцевой трассе, длина которой – целое число километров. Он едет 1 км, минуту стоит, едет ещё 2 км, минуту стоит, едет ещё 3 км, минуту стоит, и так далее, пока остановка не совпадёт с начальной точкой, и тогда заканчивает тренировку.

а) Может ли случиться, что Петя не сможет закончить тренировку?

б) Вася тренируется по аналогичной схеме на более короткой кольцевой трассе, длина которой – тоже целое число километров. Могло ли случиться, что они ехали с одинаковой скоростью, но у Пети ушло меньше времени на тренировку, чем у Васи?

Авторы задач: Михаил Евдокимов (26, 30), Борис Френкин (27), Татьяна Корчемкина (28), Николай Авилов (29)

28. Разрежьте шестиугольник на рисунке по линиям сетки на 5 частей одинакового периметра (части могут быть разной формы).



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361

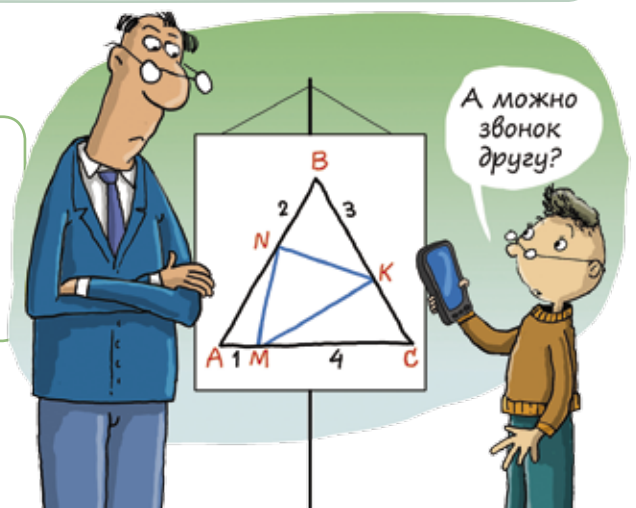
29. Индийский школьник Радж закрасил центральную часть таблицы умножения от 1×1 до 19×19 так, как показано на рисунке, и перемножил числа в закрасенных клетках.

А Квантик выписал на доску по разу числа 1 и 19, по 3 раза – числа 2 и 18, по 5 раз – числа 3 и 17, по 7 раз – числа 4 и 16, и так далее, по 17 раз – числа 9 и 11, а число 10 выписал 19 раз, после чего все числа на доске перемножил и возвёл результат в квадрат.

У кого получилось большее число – у Раджа или у Квантика?

30. В равностороннем треугольнике ABC отметили точки N , K , M на сторонах AB , BC , AC соответственно так, что $AM = 1$, $BN = 2$, $BK = 3$, $CM = 4$. Докажите, что треугольник MNK равнобедренный.

Художник Николай Крутиков





РАЗВОРОТ РАКЕТЫ

ОДНАЖДЫ БАРОН МЮНХГАУЗЕН ЛЕТЕЛ КУДА-ТО В СВОЕЙ РАКЕТЕ, СБИЛСЯ С КУРСА И ЗАБЛУДИЛСЯ В БЕСКРАЙНИХ ПРОСТОРАХ. В ЕГО РАКЕТЕ КОНЧИЛОСЬ ТОПЛИВО, И ТЕПЕРЬ ОНА ПРОДОЛЖАЕТ ЛЕТЕТЬ НЕВЕДОМО КУДА. ОДНАКО БАРОН НЕ ПАДАЕТ ДУХОМ. ОН ТОЛЬКО ХОЧЕТ РАЗВЕРНУТЬ СВОЮ РАКЕТУ ТАК, ЧТОБЫ В ОКОШКО БЫЛО ВИДНО СОЛНЦЕ (ГДЕ СОЛНЦЕ, ОН ЗНАЕТ). КАК БАРОНУ ЭТО СДЕЛАТЬ?

ХУДОЖНИК YUSTAS

АВТОР ВАЛЕРИЯ СИРОТА

24002

ISSN 2227-7986

9 1772227 1798244

