№ 8 | август 2024

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 8
август
2024

КУКУШКА, ФЛЕЙТА И КУНЖУТ

ИНВЕРСИЯ ТЕНИ

ПЕРЕГИБЫ С ПЕРЕПЛЁТОМ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области популяризации науки

Журнал «Квантик» № 8, август 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Сергей Чуб

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал
в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84х108/16

Тираж: 4000 экз.

Подписано в печать: 02.07.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40

Заказ №

Цена свободная

ISSN 2227-7986

6+

www.kvantik.com **kvantik@mccme.ru** **vk.com/kvantik12** **t.me/kvantik12**

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Вас плохо слышно! *В. Клепцын* 2

Удвоение отрезка и судьба точки. *Н. Солодовников* 10

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Кукушка, флейта и кунжут: почему так называются кости человека? *А. Синюшин* 6

ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ

Инверсия тени. *А. Бердников* 13

Пар из кастрюли. *Г. Мерзон* IV с. обложки

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Календарик. *В. Красноухов* 14

СМОТРИ!

Неквадратный Пифагор 16

ВЕЛИКИЕ УМЫ

Сусуму Тонегава. Такие разные защитники. *М. Молчанова* 18

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Перегибы с переплётом. *И. Акулич* 24

СТРАНИЧКИ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХ

Светофоры. *Т. Корчемкина* 27

УЛЫБНИСЬ

Рыба и птица. *И. Акулич* 28

ОТВЕТЫ

Ответы, указания, решения 29

ОЛИМПИАДЫ

Наш конкурс, XII тур 32

Математический кружок

Виктор Клепцын

ВАС ПЛОХО СЛЫШНО!

В прошлый раз[1] начало кружка прервало разговор Жени и Мики – и в этот раз, увидев в руках Мики знакомый конверт с надписью «*Юному волшебнику*», Женя уже знала, чего ожидать.

Мика (доставая из конверта 6 карточек)**:** Загадай число от 0 до 31.

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

1	2	4	7
8	11	13	14
16	19	21	22
25	26	28	31

Женя: Загадала! Слушай, а ведь первые пять карточек мы уже в прошлый раз видели – ты как раз число от 0 до 31 с их помощью и отгадывал. И достаточно было сложить первые числа тех карточек, на которых было моё число – а мои ответы были просто двоичной записью числа. А зачем тогда нужна шестая карточка?

Мика: А мы теперь поменяем правила. Теперь ты про любую одну карточку можешь отказаться отвечать.

Женя: Про любую?

Мика: Про любую – но только про одну! Так что: на каких из этих карточек есть твоё число?

Женя: На первой, четвёртой, пятой и шестой есть, на второй нет, а про третью я отказываюсь отвечать.

Мика: Так-так, давай посмотрим... Моя интуиция волшебника мне подсказывает, что на третьей карточке, той, про которую ты отказалась отвечать, на самом деле твоего числа нет. Так что ответы на первые пять карточек это «Да, нет, нет, да, да». Так ведь?

Женя промолчала, сохраняя каменное выражение лица.

Мика (уверенно)**:** Так, так. И тогда твоё число восстанавливается именно так, как ты сказала, складывая красные числа на первых пяти карточках с ответами «да». Получается $16+2+1=19$, – ты загадала 19!

[1] См. статью «Магические карточки» в «Квантике» № 7 за 2024 год.

Женя: Правильно! Но как ты узнал, что на третьей карточке моего числа нет? Ты ведь не просто угадал?

Мика (возмущённо): Нет, конечно, это честный фокус. Я знал наверняка!

Женя: А как?

Мика: У меня была инструкция!

Инструкция юному волшебнику, часть вторая

Сложи в одну стопку те карточки, на которые загадывающий сказал «Да», в другую те, на которые загадывающий сказал «Нет», и отложи в сторону ту карточку, про которую он отказался ответить. Если в стопке «Да» нечётное количество карточек, ответ, который тебе отказались дать, – это «Да», положи отложенную карточку в эту стопку. Иначе – ответ на неё «Нет», положи её в стопку с остальными «Нет». Теперь сложи красные числа на тех карточках, которые попали в стопку «Да». Это и будет загаданное число.

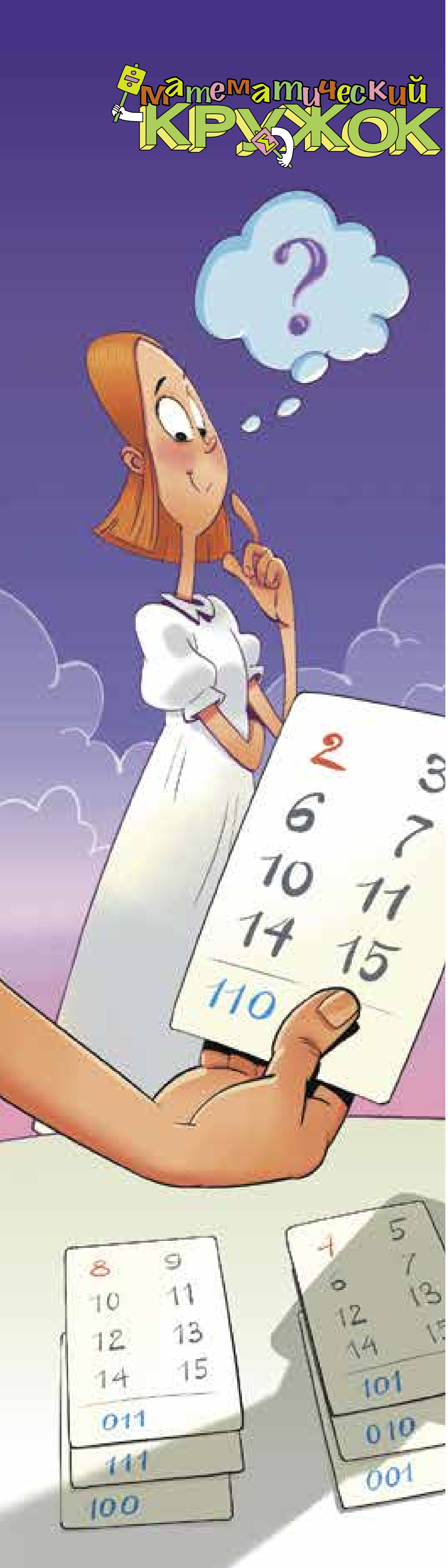
Женя: Ага. Если в стопке «Да» нечётное число карточек, то та, про которую отказались отвечать, идёт туда, а если чётная, то в «Нет». Значит, если отвечать про все шесть карточек, то ответов «Да» всегда будет чётное число. А ведь на этом фокус и построен: если мы знаем, что в стопке «Да» должно быть чётное число карточек, то неизвестный ответ про одну из них ровно так и восстанавливается.

Мика: Ну я же говорил, что точно знал, какой ответ ты отказалась дать!

Женя: Слушай, а я ведь понимаю, как этот фокус сделали. Первые пять карточек у нас ведь уже есть – нужно сделать только шестую. Так вот, представим себе, что про неё-то нам и отказываются отвечать. И восстановим нужный ответ! То есть – нужно просто собрать на неё те и только те числа, которые из первых пяти карточек есть на нечётном числе: на одной, на трёх или на всех пяти. И всё!

Мика (доставая следующий набор из 7 карточек): А и правда. Но у меня есть ещё один фокус. Загадай число от 1 до 15!

Женя: Готово. Только у тебя карточек как-то много, мы ведь уже видели, что хватает четырёх карточек – собственно, первых четырёх в этом наборе. Если бы,



8 9	4 5	2 3	1 3	1 2	1 2	1 3
10 11	6 7	6 7	5 7	4 7	5 6	4 6
12 13	12 13	10 11	9 11	9 10	8 11	8 10
14 15	14 15	14 15	13 15	12 15	12 15	13 15
код: 011	код: 101	код: 110	код: 111	код: 100	код: 010	код: 001

как раньше, можно было отказываться отвечать на один вопрос – хватило бы одной дополнительной карточки. А тут дополнительных карточек целых три. Зачем?

Мика: Мы опять поменяем правила. Теперь ты не можешь отказаться отвечать – но можешь один раз соврать. Но только один!

Женя: И что, ты всё равно угадаешь моё число?

Мика: Конечно! Ведь я же фокусник, а фокусники никогда не ошибаются.

Женя: Ну что же, моё число есть на первой, третьей, четвёртой и пятой карточках, и его нет на остальных. Твой ход!

Мика: Так-так, посмотрим... Абракадабра! Я уверен, что ты соврала в ответе про третью карточку – твоего числа на ней нет. И тогда ты загадала число 9.

Женя: Угадал! Но как ты узнал, что я соврала про третью карточку? Опять следовал инструкции?

Мика (с важным видом)**:** Конечно!

Инструкция юному волшебнику, часть третья

Сложи в одну стопку те карточки, на которые загадывающий сказал «Да», в другую те, на которые он сказал «Нет». Теперь возьми любую из стопок (например, ту, что меньше) и сложи в ней в столбик коды этих карточек, они написаны внизу синим цветом. Если получилось число, у которого все цифры чётные, то загадывающий не соврал. Иначе замени у суммы чётные цифры на 0, а нечётные на 1 – это и будет код той карточки, про которую загадывающий соврал. Переложи её в другую стопку. Теперь все ответы верные. Сложи красные цифры на карточках в стопке «Да», это и будет искомое число.

Мика: Я взял стопку ответов «Нет», сложил в столбик

$$101+010+001=112,$$

заменил 2 на 0, получил 110, и понял, что ты соврала про карточку с кодом 110. А это и есть третья карточка.

Женя: А если бы ты складывал коды в стопке «Да»?

Мика: Смотри, сумма кодов всех семи карточек равна 444, так что если мы складываем коды в другой стопке, то каждая цифра заменится на дополняющую её до 4. Но на чётность это не повлияет.

Женя: Да, действительно. А тогда я наполовину понимаю, как такой фокус работает. Давай допустим, что и впрямь при правильных ответах сумма кодов в каждой из стопок записывается только чётными цифрами. Тогда если отгадывающий про какую-нибудь карточку врёт, это всё равно, что он перекладывает эту карточку в другую стопку.

Мика: Точно! И при этом сумма кодов ровно на код этой карточки и изменяется. Так что в тех разрядах, где у кода единицы, появляются нечётные цифры, а остальные остаются чётными.

Женя: Но вот как эти карточки придумали?

Задача. В набор фокусника забыли вложить карточки с кодами 001, 010 и 100 (но положили инструкции юному волшебнику). Как их сделать самим – как понять, какие числа писать на самодельных карточках, чтобы инструкция работала правильно?

От автора. Фокусы, с которыми встретились наши герои, связаны с хранением и передачей данных.

Глубоко-глубоко внутри всех компьютеров данные хранятся именно в двоичной системе. Кодирование, которое возникает во втором фокусе, по-научному называется добавлением бита контроля чётности, и оно чаще применяется для обнаружения ошибок при хранении или передаче данных. А именно, если при передаче сообщения в одном из мест принимающий услышит 0 вместо 1 или 1 вместо 0, то число единиц окажется нечётным и он сможет понять, что произошла ошибка (и переспросит отправителя).

В третьем же фокусе применяется знаменитый код Хэмминга – первый из представителей кодов, исправляющих ошибки. В этом случае принимающий может не только заметить, что произошла ошибка при передаче, но и, предполагая, что неправильно принят только один бит из семи, эту ошибку исправить.

Эти две идеи можно скрестить, добавив к коду Хэмминга бит контроля чётности: получается пополненный код Хэмминга, позволяющий при передаче 4 бит информации в 8 битах сообщения исправлять одну ошибку и обнаруживать, пусть и не исправлять, две.

Художник Мария Усеинова

КУКУШКА, ФЛЕЙТА И КУНЖУТ: *почему так называются кости человека?*

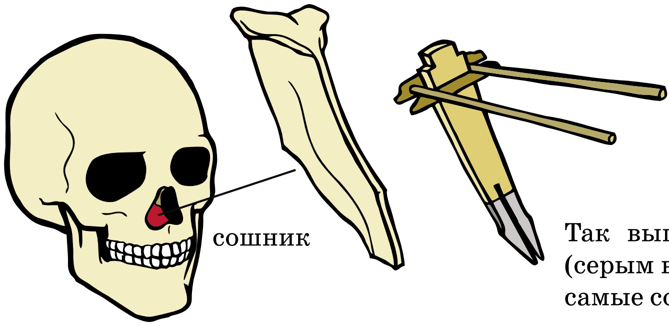
Скелет человека состоит из чуть более чем двухсот костей, и отличать их друг от друга необходимо многим специалистам – археологам, антропологам, криминалистам, врачам. Поэтому у каждой, даже самой мелкой, кости есть своё название. Именно об этих названиях мы и поговорим.

Некоторые из них понятны сразу. В самом деле, *бедренная* или *лобная* кости называются так, потому что расположены в соответствующих частях тела. Ясно, что *кубовидная* или *трёхгранная* кости получили имена из-за особенностей формы. А откуда взялись слова *копчик*, *сошник* или *ключица*?

Как и систематика, анатомия пользуется латынью. Сейчас найдётся немного людей, способных поддержать диалог на латыни, но ещё два века назад научный трактат вполне мог быть написан именно на этом языке, и естествоиспытатели могли свободно его прочесть. Такое же назначение остаётся у анатомической латыни: в любой стране мира студенты-медики учат, что *caput humeri* – это головка плечевой кости, независимо от того, как она называется в языках этих стран и народов.

Названия некоторым костям были даны ещё древними греками или римлянами. Эти слова вошли и в современный научный лексикон. Несложно догадаться, что слова, обозначающие бедро или ребро, есть в любом языке, и латынь с древнегреческим не исключение. А вот задача различить и поименовать восемь небольших косточек запястья возникла лишь сравнительно недавно – при появлении анатомии как науки и составлении первых анатомических пособий. Вероятно, первым *остеологом*, специалистом по костям, был в XI веке Ибн Сина, известный также как Авиценна. В европейской науке подробные описания скелета берут начало в знаменитом семитомном труде «О строении человеческого тела» Андреаса Везалия (XVI в.). Русские названия большинства костей представляют собой простой перевод латинских.

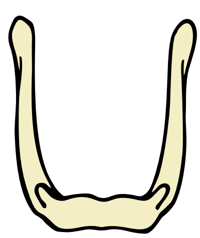
Конечно, мы не станем подробно обсуждать названия всех двух с лишним сотен костей человека, а остановимся на самых интересных. В *черепе* (это слово – однокоренное с *черепаха* и *черепица*) пояснения нужны, пожалуй, только для *сошника*. Мы нечасто видим вспашку земли плугом, и уж совсем редкостью стало использование сохи. Часть сохи, которая непосредственно рыхлит землю, – сошник. Форма кости похожа на эту плоскую деталь; латинское название кости (*vomer*) имеет то же значение.



Так выглядит соха (серым выделены те самые сошники)

Хорошо запоминаются названия слуховых косточек среднего уха – *молоточка*, *наковальни* и *стремечка*. Их латинские названия (соответственно *malleus*, *incus* и *stapes*) имеют те же значения и были впервые использованы в XVI в. Курьёзно, что латинское слово *stapes* придумали европейцы Средневековья или Возрождения специально, чтобы как-то назвать стремя: древние римляне стременами не пользовались и слова такого не знали.

Интересно научное название подъязычной кости – *os hyoideum*. *Os* – это просто кость, это слово входит в названия большинства частей скелета. Слово *hyoideum* греческого происхождения и означает «сходный с буквой ипсилон». В этом слове *hy-* – название буквы, *-oide-* – латинизированный греческий суффикс *-oeidēs* со значением «подобный» (тот же, что и в словах *астероид* или *геоид*), а *-um* – окончание прилагательного среднего рода в латыни. Форма кости и вправду напоминает строчное начертание ипсилона: υ. В латинице этой букве соответствует игрек (буквально «и-греческое»), в кириллице – уже не используемая ижица.



Подъязычная

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

• ATLAS •

• EPISTREPHO •

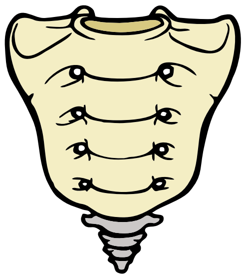
Позвоночник (однокоренное с *звено*) состоит из очень похожих по строению позвонков. Специалист может точно определить, грудной или поясничный позвонок перед ним, однако собственные названия есть не у всех.

Первый шейный позвонок – *атлант* (латинское *atlas*). Его название отсылает к древнегреческому мифу о титане Атланте, которому боги повелели держать небесную твердь в наказание за мятеж. В античном и более позднем искусстве небо на плечах Атланта изображали в виде сферы, поэтому, конечно, параллель между легендарным гигантом, несущим эту сферу, и позвонком, поддерживающим голову, напрашивается сама собой.

Помимо легенды о титане-бунтаре, своя история есть и у названия этого позвонка. Дело в том, что древние римляне называли атлантом не первый, а седьмой шейный позвонок – самый нижний, граничащий с грудным отделом. В некотором смысле это логично: тяжёлую ношу, не снабжённую лямками, человек носит именно на этом месте. Однако в анатомических трактатах эпохи Возрождения атлантом стали называть уже первый шейный позвонок. У этого изменения, вероятно, есть некоторое символическое значение: подлинный груз, который суждено нести человеку, – не тяжёлая ноша, а бремя мыслей, разум. Такое переосмысление было вполне в духе Ренессанса.

Второй шейный позвонок тоже имеет своё имя – *эпистрофей* или *аксис*. Первое слово происходит от греческого *epistrepho* («поворачиваюсь»; этот же корень есть в словах *катастрофа* и *стрептококк*), второе на латыни означает просто «ось». Оба названия подчёркивают, что вокруг зубовидного отростка этого позвонка поворачиваются атлант и вся голова.

Русское слово *крестец* – это буквально «маленький крест»; если напрячь воображение, его и вправду можно увидеть в очертаниях этой части позвоночника, располагающейся ниже поясничного отдела. Такая же отсылка содержится во многих европейских языках: и венгерское *keresztcsont*, и литовское *kryžkaulis* означают «*крест-кость*». Латинское же название, *os sacrum*, переводится как «священная кость» и вызывает много вопросов. Каких только истолкований не предлагали, опираясь на верования разных народов и эпох. В древнееврейской и арабской традициях бытовало мнение, что крестец – это «кость воскрешения». Считалось, что он будто бы не подвержен разложению и его невозможно уничтожить, а потому из него, как из ореха, возродится всё тело при воскресении мёртвых. Арамейское слово *luz* обозначало и орех, и некую кость в основании позвоночника – не исключено, правда, что это копчик, о котором речь пойдёт ниже. Древнеегипетский миф о воскрешении разрубленного тела бога Осириса придавал большое значение именно сохранности крестца. Исидор Севильский, живший в VI в., в грандиозной для своего времени энциклопедии «Начала» писал, что крестец первым образуется у эмбриона и якобы потому язычники наделяли его особым смыслом, принося в жертву богам. Не последнюю роль, вероятно, сыграла и близость этого отдела позвоночника к репродуктивным органам. Так или иначе, с древнейших времён крестец воспринимался как «священная кость», что и отражено в его латинском названии.



Крестец и копчик (выделен серым)

И уж совсем загадочным остаётся название *копчика*. По одной из версий, у этого слова тот же корень, что и у слова *копна*, и оно буквально означает что-то вроде «холмик», «бугорок». Другая гипотеза связывает копчик с *кобчиком* – небольшим соколом. Форма копчика предположительно напоминает то ли силуэт, то ли хвостовое оперение, то ли клюв этой птицы.

Однако птичья тема прослеживается и в научном, ещё древнегреческом по происхождению, названии этой части позвоночника: *coccyx* – «кукушка». Везалий называл копчик *os cuculi*, «кукушечья кость», и связывал это название с формой, будто бы напоминающей клюв кукушки. Кажется, однако, что нет ничего особенного в клюве этой птицы, – в отличие, скажем, от пеликана или кроншнепа. В чём же дело? Не исключено, что в античном названии копчика мы слышим отголосок какого-то уже забытого мифа.

О названиях костей конечностей мы поговорим в следующем номере.

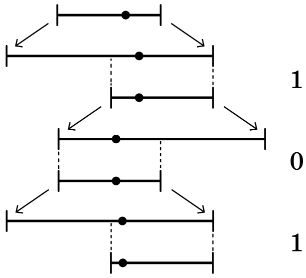
Рисунки костей в тексте: Андрей Синюшин

Художник Алексей Вайнер

Никита Солодовников

УДВОЕНИЕ ОТРЕЗКА И СУДЬБА ТОЧКИ

Квантик и Ноутик отметили на отрезке точку и играют в такую игру. Квантик равномерно растягивает отрезок в 2 раза, а Ноутик режет получившийся отрезок посередине. Ту половину, в которой нет отмеченной точки, выбрасывают, а с той, в которую попала точка, повторяют всю операцию сначала. И так шаг за шагом. Если точка попала ровно посередине, её можно отнести к любой из половин.



Чтобы помнить, что происходило с точкой, Квантик каждый раз записывает, в какую половину она попала: если в левую, он пишет 0, а если в правую – пишет 1. Так у него получается записанной *судьба* точки: по последовательности нулей и единиц сразу видно, в какой половине оказывалась точка на каждом шаге.

Задача 1. На отрезке [0; 1] выбрана точка 0,474. Выпишите первые три знака её судьбы.

В этой статье мы ответим на три вопроса:

1. Может ли точка иметь две разные судьбы?
2. Могут ли разные точки иметь одинаковую судьбу?
3. У каких точек периодическая судьба (с какого-то момента повторяется, например: 110010101010...)?

У каких точек две судьбы

Если точку можно описать двумя разными судьбами, то можно найти номер первого шага, на котором судьбы различаются. Например, судьбы

01011100...
01011101...

впервые различаются на восьмом шаге. После седьмого шага отрезок в очередной раз разрезали надвое, и точку можно было отнести как к левой половине, так и к правой. Значит, точка оказалась ровно посередине отрезка! При этом, если её отнести к левой половине, то она будет его правым концом и будет оставаться им при всех дальнейших удвоениях. А если отнести к правой, то она навсегда впредь будет левым концом. Это однозначно определяет её дальнейшую судьбу:

01011101000... (дальше идут одни нули)
01011100111... (дальше идут одни единицы)

У разных точек разные судьбы

На каждом шаге, пока различные точки не попадают в разные половины, расстояние между точками удваивается. Поэтому судьбы неизбежно разойдутся: в какой-то момент расстояние станет больше длины исходного отрезка и точки попадут в разные половины.

Периодические судьбы

Пример. Точка 3/5 при растяжении вдвое перейдёт в 6/5 и попадёт в правую половину, на отрезок [1; 2]. При разрезании будет отброшена левая половина, 6/5 перейдёт в $6/5 - 1 = 1/5$. Продолжим:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3/5 & \to & 1/5 & \to & 2/5 & \to & 4/5 & \to & 3/5 & \to & \ldots \\ & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & \ldots & \end{array}$$

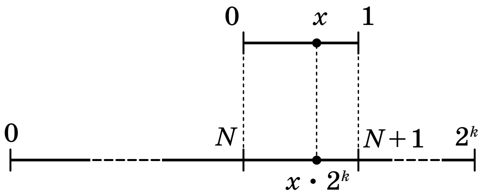
После четырёх шагов дробь перешла в себя – и далее последовательность (1001) в судьбе начнёт повторяться. Повторяющуюся часть последовательности (наименьшую) называют её *периодом*, а количество знаков в периоде – его *длиной*. У точки 3/5 судьба 100110011001... с периодом (1001) длины 4.

Умножение на 2 и вычитание 1 не меняет знаменатель дроби (условимся не сокращать дроби!). Дробей с любым конкретным знаменателем на отрезке [0; 1] конечное число, поэтому при удвоении (и вычитании 1) любая дробь рано или поздно «зациклится». Значит, *судьба любой дроби будет периодической*.

Задача 2. Квантик берёт отрезок [0; 1] и сначала выкидывает правую половину отрезка, потом левую половину оставшегося, потом снова правую, снова левую... Какая точка не будет выкинута ни на каком шаге?

Теперь покажем, что если у точки x периодическая судьба, то x – обыкновенная дробь, то есть отношение целого числа к натуральному. Пусть k – длина периода этой судьбы. Вообразим, что Квантик исправно удваивает отрезок, а Ноутик забывает его разреза́ть. Квантик растянет отрезок до длины 2^k. Если теперь Ноутик спохватится, он разрежет получившийся отрезок $[0; 2^k]$ на единичные отрезки [0; 1], [1; 2], [2; 3], ... Точка x после k удвоений будет иметь координату $x \cdot 2^k$ – и окажется на одном из единичных отрезков. Пусть это отрезок $[N; N+1]$. Периодичность

судьбы означает, что точка приняла своё исходное положение, то есть на отрезке $[N;\ N+1]$ она тоже имеет координату x.



Получается, что $x \cdot 2^k = N + x$, а значит, $x = N\ /\ (2^k - 1)$. Итак, точка обязательно будет дробью.

Задача 3. На отрезке AB отметили точку X так, что $AX : AB = 1 : 10$. После этого отрезок AB разделили на 2^{10} равных частей. В каком отношении точка X делит ту часть, на которую попадает?

Послесловие

Попробуем изменить игру в «удвоение». Будем растягивать отрезок $[0;\ 1]$ не в 2, а в 10 раз и резать его на 10 частей $[0;\ 1]$, $[1;\ 2]$, ..., $[9;\ 10]$. Кодировать их будем цифрами 0, 1, 2, ..., 9. После этого тот из единичных отрезков, на который попала выбранная точка, возьмём как новый отрезок $[0;\ 1]$, а остальные 9 отрезков выкинем. Повторяя такое «удесятерение» раз за разом, мы получим судьбу точки, записанную цифрами от 0 до 9.

Эта «судьба» совпадает с десятичной записью координаты точки! Действительно, при построении десятичной записи координат отрезок не растягивают в 10 раз, а просто выбирают сначала одну из его десятых долей $[0;\ 0{,}1]$, $[0{,}1;\ 0{,}2]$, ..., $[0{,}8;\ 0{,}9]$, $[0{,}9;\ 1]$. Затем выбирают одну из сотых – для этого делят выбранную десятую долю на более мелкие 10 частей. Затем, деля выбранную сотую долю на 10 частей, уточняют положение точки до тысячных долей.

Всё, что мы доказали прежде для судьбы точки при удвоении, верно и для судьбы при удесятерении, а поэтому и для десятичной координаты точки. Так, $0{,}9999... = 1{,}000...$, потому что у точки, попадающей на границу отрезка, две судьбы. Дроби – и только они! – имеют периодическую запись и в десятичной, и вообще в любой системе записи.

Задача 4. Найдите судьбу 0,474 при удесятерении.

Задача 5. Найдите, в какие дроби переходит 1/11 при удесятерении. Выпишите её судьбу в десятичной записи. Сравните с вычислением 1/11 на калькуляторе.

Художник Анна Рацкевич

ИНВЕРСИЯ ТЕНИ

Это фото бордюра и его тени сделано весной, когда температура колебалась около нуля градусов. К тени примыкает слева тёмный узор на асфальте, причём правая граница узора совпадает с левой границей тени (асфальт, закрытый тенью, на самом деле светлый). Как это объяснить?

Художник Мария Усеинова

Автор Александр Бердников

Фото автора

Владимир Красноухов

КАЛЕНДАРИК

Головоломки-календари на каждый день появились не так давно. Об одной из них, где нужно «открывать» текущую дату (день и месяц), писал журнал «Квант» в №1 за 2024 год. Предлагаем читателям «Квантика» необычный календарь, придуманный российскими изобретателями Ириной Новичковой и Владимиром Красноуховым.

Состоит головоломка из рабочего поля («поляны») и набора деталей. Поляна (рис. 1) разбита на 54 клетки, в которых написаны названия 12 месяцев, числа от 1 до 31, названия 7 дней недели и 4 символа планируемой активности (например, отдых, работа, спорт, семья) на выбираемую дату. Всего получается $31 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 4 = 10416$ вариантов исходных данных. Фактически владельцу календарика предоставляется возможность решить более десяти тысяч задач на упаковку элементов 🙂. Это займёт 28 лет, если решать по 1 задаче в сутки.

Детали головоломки (рис. 2) – набор из 10 пентамино (из 12 возможных пентамино авторы головоломки после предварительного анализа удалили две «неудобные» фигуры **w** и **+**).

Теперь каждое утро, начиная свой новый день с физической зарядки, вы можете перейти к зарядке для ума.

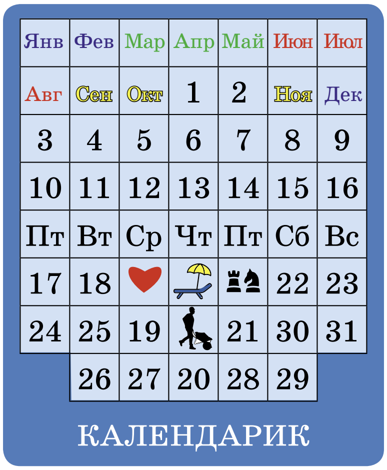


Рис. 1

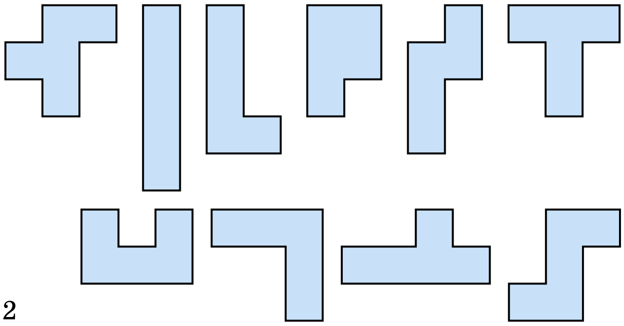


Рис. 2

Например, 1 мая (некоторого года) будет среда, вы планируете отдохнуть. Тогда вам надо разместить элементы так, чтобы остались открытыми соответствующие четыре окна (рис. 3). Варианты решения для данных четырёх окон приведены на рисунке 4.

Вообще-то для каждой четвёрки исходных данных существует от одного до нескольких сотен решений. Количество решений может служить мерилом сложности задачи, высшая сложность соответствует задачам с единственным решением. В подавляющем большинстве случаев количество решений исчисляется двух- и трёхзначными числами. Примеры сложных задач – это «сердечко 25 марта четверг», «сердечко 10 марта вторник» и некоторые другие, имеющие по одному решению.

Авторы головоломки благодарят Геннадия Яркового, Сергея Полозкова и других членов клуба «Диоген» за конструктивное обсуждение вариантов головоломки. В частности, Сергей Полозков доказал, что для любых сочетаний исходных данных в предложенном варианте Календарика решения существуют.

Задачи для читателей «Квантика».

Соберите в Календарике (последовательно):

1) декабрь, 31, вторник, работа;

2) январь, 1, среда, отдых.

Желаем успехов!

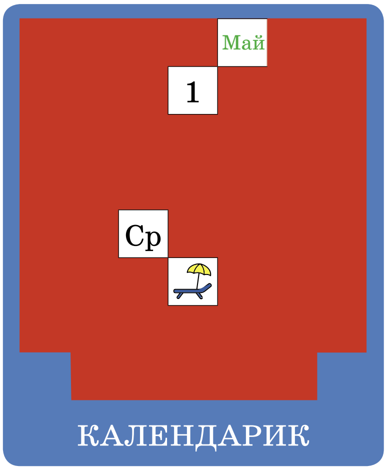


Рис. 3

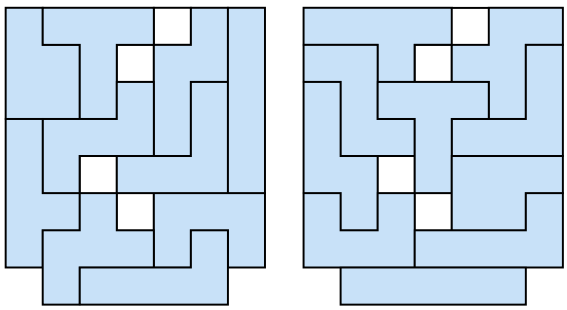


Рис. 4

Художник Анна Рацкевич

Материал подготовил
Григорий Мерзон

НЕКВАДРАТНЫЙ ПИФАГОР

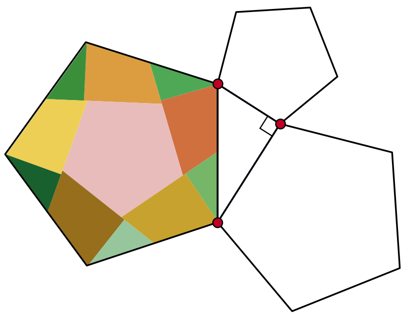
Теорема Пифагора гласит: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

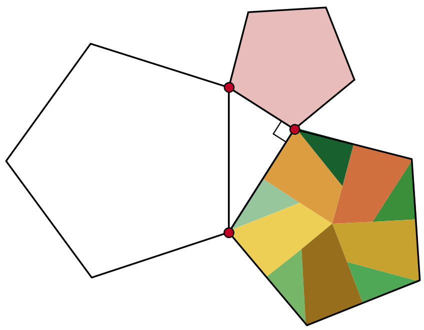
Можно построить на каждом из катетов по квадрату, разрезать их на части и сложить квадрат, построенный на гипотенузе[1].

Но на сторонах не обязательно строить именно квадраты! Площадь *любой* фигуры при растяжении в k раз увеличивается в k^2 раз. Поэтому можно вместо квадратов строить на сторонах правильные треугольники, или шестиугольники, или ещё что-нибудь.

Справа на картинках демонстрируется теорема Пифагора при помощи разрезания пятиугольников.

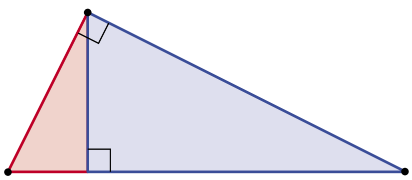
[1] Резать можно многими разными способами. Можно поиграть в некоторые из них сайте Математических этюдов etudes.ru/etudes/pythagorean-theorem/ или сделать свою модель самому!





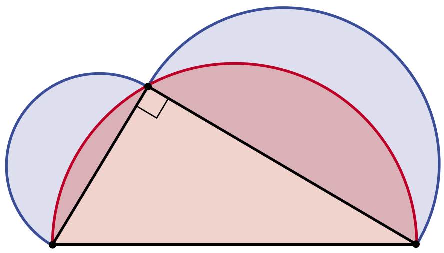
А вот самая, наверное, экономная из подобных картинок. Она основана на том, что высота из вершины прямого угла делит любой прямоугольный

треугольник на два треугольника *такой же формы, как исходный*[2].



То есть исходный треугольник с гипотенузой c разбит на два треугольника такой же формы, но других размеров: с гипотенузой a и с гипотенузой b. Так как площадь целого есть сумма частей, получаем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

На последней картинке на сторонах треугольника построили как на диаметрах полукруги. Полукруг, построенный на гипотенузе, наложился на полукруги, построенные на катетах. Выкинем их общую часть. От большого полукруга остаётся наш треугольник, а от двух меньших кругов – *луночки* сложной формы. Равенство площадей при этом сохранится (из обеих частей равенства мы вычли одно и то же: площадь пересечения).



Значит, суммарная площадь двух луночек[3] (их называют гиппократовыми) равна площади треугольника. Это довольно удивительно, особенно если припомнить, что в формулу для площади круга входит странное число π.

[2] Чтобы в этом убедиться, подумайте про углы этих треугольников.

[3] Кое-что ещё про площадь луночек можно узнать из статьи В. Кириченко и В. Тиморина «Квадратура луночки» в «Квантиках» №№ 2 – 3 за 2022 год.

Художник Алексей Вайнер

СУСУМУ ТОНЕГАВА

Марина Молчанова

Сусуму Тонегава
(род. 06.09.1939)
Фото: wikimedia.org, User9131986

Упрощенная схема иммунной системы
Рисунок из статьи G. Dranoff, 2004 г.

С первых дней жизни каждый из нас окружён опасностями. Тысячи бактерий, вирусов, микроскопических грибов, одноклеточных паразитов стремятся проникнуть в наш организм, вызвать инфекцию и натворить много бед.

К счастью, у нас есть сложно устроенная армия для защиты от всех этих врагов – иммунная система. Причём важно, что она способна различать пришельцев поимённо и бороться с каждым отдельно. В самом деле: мы знаем, что прививка против кори не предохраняет от ангины, а человек, переболевший ковидом, остаётся уязвимым перед гриппом – да чего уж, даже и перед другими вариантами коронавируса...

На разных этапах с разными возбудителями инфекций сражаются разные бойцы. Немыслимо описать все детали в одной статье, но для нашего разговора важно вот что: часть работы выполняют сами клетки (и тогда мы говорим о *клеточном иммунитете*), а часть – особые белки, которые производятся другими клетками (*гуморальный иммунитет*). Существование этих белков было открыто ещё в конце XIX века Эмилем Берингом и Паулем Эрлихом, а называют их *антителами*. Многие из вас наверняка слышали это название, а кому-то из ваших знакомых, может быть, даже делали анализ на антитела, чтобы узнать, чем человек болел или болеет. Есть и более длинное название для этих белков – иммуноглобулины.

Когда в организм попадает какой-то чужак, иммунная система начинает вырабатывать антитела именно против него. То есть вырабатывать белки, которые будут связываться именно с этим чужаком (точнее, с каким-то его фрагментом, который называют *антигеном*) и помечать его для дальнейшего уничтожения. Например, вы могли слышать про спайк-белок коронавируса – важный антиген... Кстати, не обязательно даже, чтобы чужак был именно бактерией или вирусом – для иммунного ответа достаточно, чтобы в организм попал просто посторонний белок или даже его кусочек, который может служить антигеном.

ТАКИЕ РАЗНЫЕ ЗАЩИТНИКИ

Однако здесь сразу возникает парадокс, который долгое время смущал биологов. Итак, иммунная система способна различать многие миллионы антигенов и вырабатывать антитела против каждого. Каждое антитело – белок. Каждый белок должен кодироваться в ДНК своим геном – так учит молекулярная биология. Но генов в человеческой ДНК всего около 20 тысяч, и занимаются они далеко не только иммунитетом. Откуда же может взяться нужное количество разных антител?

Этот парадокс сумел разрешить японский (а также американский и швейцарский) учёный Сусуму Тонегава. Кстати, интересно, что в этом решении используется несложная математика – а именно, комбинаторика.

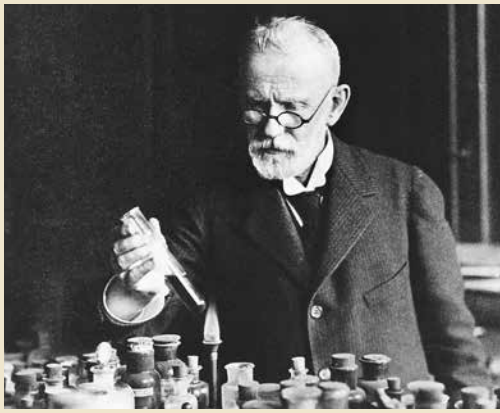
А теперь, прежде чем читать дальше, подумайте, как бы вы сами решили проблему. Вдруг вы о чём-то догадаетесь?

* * *

Сусуму Тонегава родился в 1939 году в семье инженера. Он закончил школу в столичном Токио и поступил в университет в Киото – другой, древней столице Японии. Там его первоначальный интерес к химии сменился интересом к молодой, бурно развивавшейся науке – молекулярной биологии. В то время открытия в этой области следовали одно за другим – непаханое поле для энтузиастов.

Но увы, в Японии тогда было не так много лабораторий, в которых можно было заниматься молекулярной биологией. Тонегава попал в одну из них, но уже через два месяца его руководитель, профессор Итару Ватанабе, вызвал к себе способного юношу и предложил ему поехать дальше учиться в США: там более высокий уровень, и, мол, если вы не против обучения за рубежом, то можно похлопотать... И вскоре молодой Тонегава оказался в США, в Калифорнийском университете города Сан-Диего.

Этот университет образовался по тем временам сравнительно недавно, но в нём уже было немало крупных учёных, включая и лауреатов Нобелевской



Пауль Эрлих (1854 – 1915)

Эмиль Беринг (1854 – 1917)

Университет Киото

Фото: wikimedia.org, Moja~commonswiki

СУСУМУ ТОНЕГАВА

Ренато Дульбекко (1914 – 2012)

премии – как настоящих, так и будущих. И Тонегава попал в одну из, быть может, лучших лабораторий в мире. Там он изучал *бактериофаги* – особые вирусы, которые заражают бактерии. Это было интересно, но Тонегава, по его собственным словам, понимал, что изучение «простых» организмов уже не так перспективно. Возможно, самое главное в этой области уже сделано. То ли дело многоклеточные организмы – такие, как мы с вами. Но эта задача гораздо сложнее – хватит ли имеющихся знаний и ресурсов? И чем стоит заняться в первую очередь?

Вопрос для Тонегавы решился неожиданно, и это история про то, как не было бы счастья, да несчастье помогло. Из-за визовых проблем он должен был уехать из США на два года. Куда податься на это время? И тут его коллега и начальник лаборатории Ренато Дульбекко (к слову, тоже будущий нобелевский лауреат), в то время путешествовавший по Европе, предложил поехать в Швейцарию, в новый Базельский институт иммунологии. Правда, раньше Тонегава не занимался иммунологией – ну так, может быть, пора?

Как позже признавал сам Тонегава, первый год работы в новой области дался ему непросто. Но потом он искренне заинтересовался иммунологией и особенно проблемой разнообразия антител, о которой мы выше уже рассказали. Вместе со своими сотрудниками в Базельском институте он приступил к работе. И много лет спустя вспоминал: «Исследования двигались с потрясающей скоростью с 1974 по 1981 год, мы работали изо всех сил и получали массу удовольствия».

А мы расскажем о том, что же получилось в результате.

* * *

Чтобы понять открытие Тонегавы, сначала представим себе, как выглядят молекулы белков-иммуноглобу-

Джеральд Эдельман (1929 – 2014)

Родни Портер (1917 – 1985)

линов – в 60-х годах XX века их строение выяснили (и опять-таки получили за это Нобелевскую премию) Джеральд Эдельман и Родни Портер.

На схематических рисунках эта молекула похожа по форме на английскую букву Y или на рогатку. А если вглядеться подробнее, мы видим, что эта Y «нарисована» двойными линиями и состоит из четырёх соединенных белковых цепей. Две длинные (образующие «ножку») нарисованы тёмно-синим, две короткие – голубым. При этом молекула симметрична: длинные цепи слева и справа одинаковы, короткие тоже. А участки, которые узнают антиген, находятся на «верхних» концах буквы Y, и вот они-то и должны быть наиболее разнообразными. Итак, откуда же взять столько генов, чтобы обеспечить достаточное разнообразие этих участков?

Тонегаве с сотрудниками удалось показать удивительную вещь. Гены иммуноглобулинов отличаются от обычных генов. Они не присутствуют во всех клетках нашего организма в готовом виде, а вместо этого каждый раз по-разному пересобираются из кусков! И в результате этого процесса в организме образуются клетки (B-лимфоциты), потенциально способные производить многие миллионы разных антител – и тех, которые спасали человечество в прошлом, и тех, которые потребуются лишь в будущем для атаки на совершенно новые антигены, и тех, которые вообще никогда не понадобятся.

Представьте себе, что мы собираем цепочку из трёх звеньев. Вариантов первого звена, скажем, 50, вариантов второго звена – 10, вариантов третьего – 30. Всего получается, что разных звеньев не так и много: $50 + 10 + 30 = 90$. Вполне поместятся в небольшую коробочку. А вариантов цепочек (вот и комбинаторика!) будет $50 \cdot 10 \cdot 30 = 15\,000$ – уже вполне солидное число! А если цепочек не одна, а две (короткая и длинная), то вариантов ещё больше.

Именно такой процесс и происходит при сборке генов антител. Его назвали *V(D)J-рекомбинацией*. Бук-

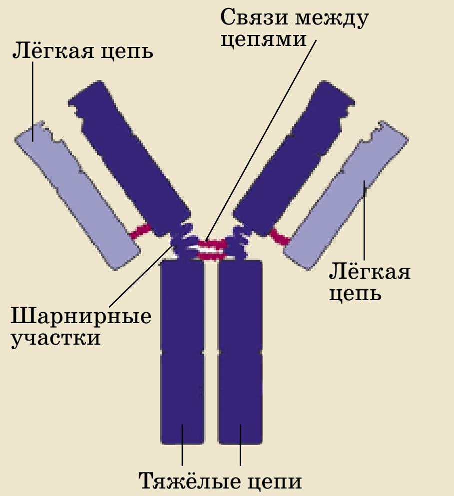
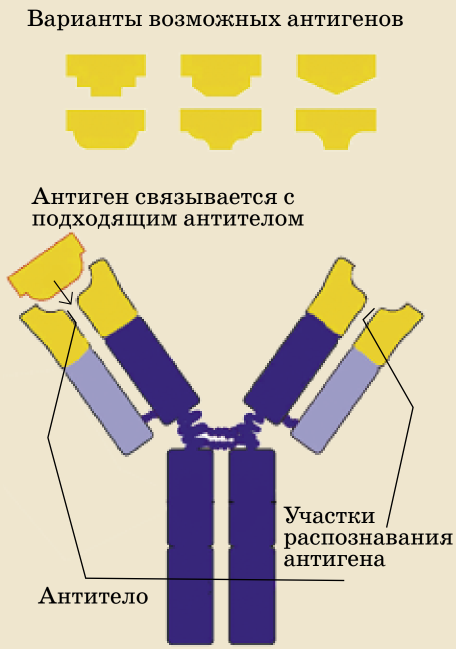


Схема молекулы иммуноглобулина



Под каждый антиген подбираются свои антитела

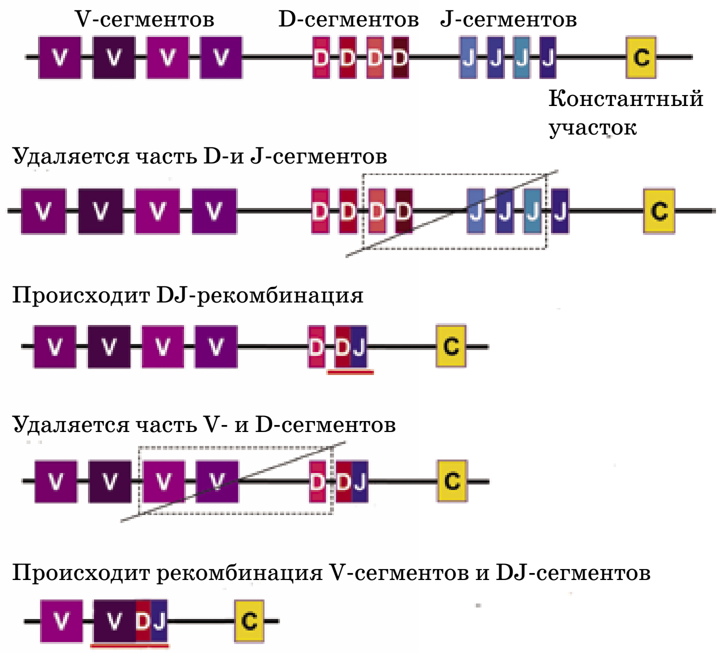


Схема рекомбинации для тяжёлых цепей

вы здесь выбраны в соответствии с английскими словами: *V* – variable (переменная), *D* – diversity (разнообразие), *J* – joining (присоединение).

А сам процесс изображен на рисунке. В ДНК последовательно записано несколько вариантов кусочков (сегментов) *V*, несколько вариантов *D* и несколько вариантов *J*. При образовании каждой новой клетки, производящей антитела, каким-то способом выбираются конкретные кусочки. Для тяжёлой цепи – один *V*-сегмент, один *D*-сегмент и один *J*-сегмент, для лёгкой происходит только выбор *V* и *J*. А те участки ДНК, которые находятся между ними, выбрасываются.*

Попробуем подсчитать, какое разнообразие антител можно обеспечить таким образом. При сборке тяжёлых цепей происходит выбор из примерно 65 *V*-сегментов, около 27 *D*-сегментов и 6 *J*-сегментов. Всего вариантов $65 \cdot 27 \cdot 6 = 10\,530$. Есть два вида лёгких цепей (различия между ними нам сейчас неважны): для одних есть примерно 30 *V*-сегментов и 4 *J*-сегмента (то есть $30 \cdot 4 = 120$ вариантов), для других – около 40 *V*-сегментов и 5 *J*-сегментов (то есть $40 \cdot 5 = 200$ вариантов). Всего получаем 320 разных лёгких цепей. А значит, $10\,530 \cdot 320 = 3\,369\,600$ разных антител, то есть чуть меньше трёх с половиной миллионов.

Уже хорошо. Но всё-таки недостаточно. Оказывается, эта схема не учитывает ещё один источник разнообразия. Присоединение сегментов друг к другу тоже происходит не строго одинаковым образом: малень-

* Кстати, сходная история с клеточным иммунитетом. «Узнающие» белки (рецепторы) на поверхностях иммунных клеток тоже формируются при помощи V(D)J-рекомбинации.

кие кусочки ДНК могут при этом выпадать или прибавляться. Из-за этого возможных антител (и видов клеток, способных их производить) становится ещё на несколько порядков больше. Этого запаса уже хватит. А дальше при попадании антигена в организм активизируются и начинают размножаться именно те клетки, которые способны производить нужные антитела.

И, наконец, существует ещё один замечательный механизм. Правда, изучил его уже не Тонегава, а другие учёные, но сказать о нём всё равно стоит. Речь идет о тонкой настройке, «доводке» антител на более поздних стадиях иммунного ответа.

Дело в том, что на тех концах молекулы иммуноглобулина, которые вовлечены в узнавание антигена, есть участки, которые постоянно изменяются. Потому что в ДНК, соответствующей этим участкам, особенно часто возникают «ошибки» (мутации) – в миллион раз чаще нормы! И каждое антитело присутствует в организме во многих чуть-чуть разных вариантах. Иногда бывает так, что после очередной «ошибки» антитело стало хуже связываться с антигеном. Иногда – не хуже и не лучше. А иногда – гораздо лучше! В результате клетки, которые производят самые лучшие антитела, получают сигнал размножаться и продолжать их производить, а клетки, которые производят антитела похуже, – сами понимаете...

Таким образом, внутри каждого из нас постоянно происходит естественный отбор. Всё по Дарвину.

* * *

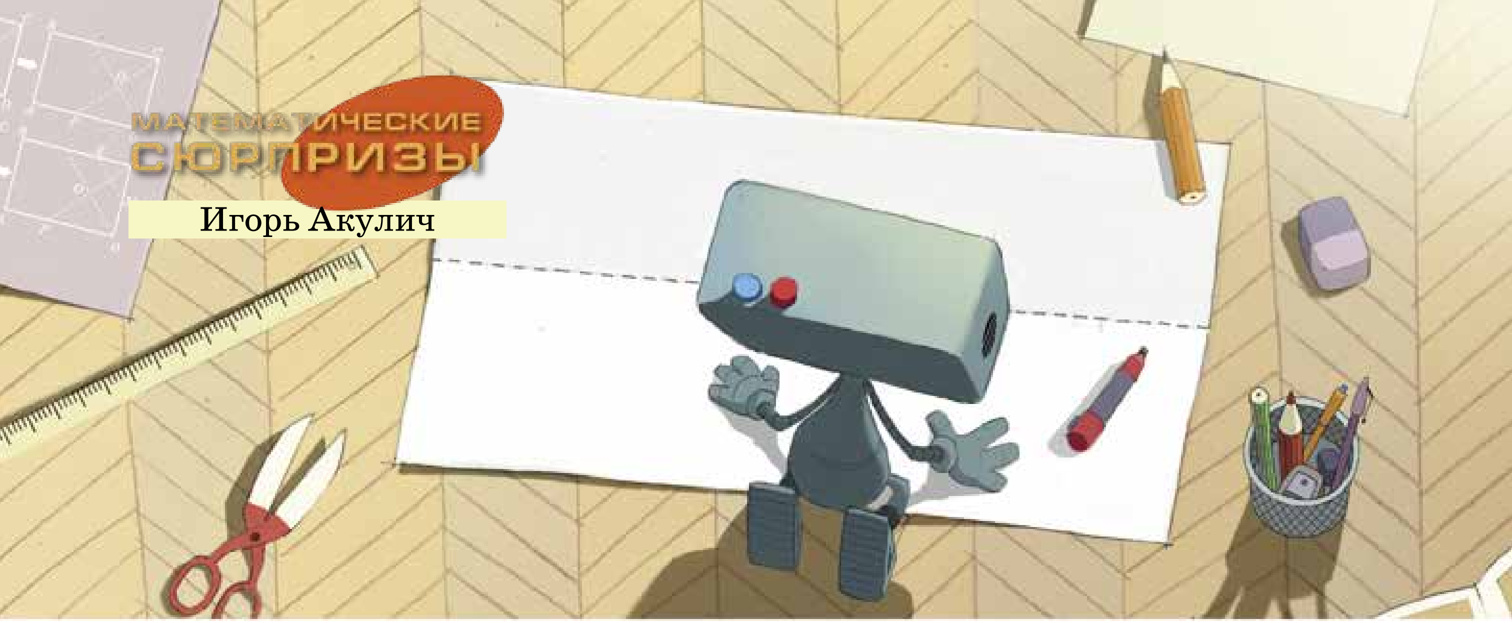
За своё открытие профессор Тонегава в 1987 году получил Нобелевскую премию. В последние десятилетия он много занимался нейробиологией и был директором Пиковеровского института проблем обучения и памяти в американском университетском городе Кембридже (не путать с английским Кембриджем!).

А иммунология – по-прежнему бурно развивающаяся наука, и в ней до сих пор происходят замечательные открытия.

Университетская библиотека в Сан-Диего
Фото: unsplash.com, Edgar Cedillo

Институт иммунологии в Базеле (ныне расформирован)
Фото: F. Hoffman-La Roche

Пиковеровский институт проблем обучения и памяти (MIT, Кембридж, Массачусетс, США)



Игорь Акулич

ПЕРЕГИБЫ С ПЕРЕПЛЁТОМ

Пусть у нас имеется прямоугольный лист бумаги $ABCD$. Если мы его перегнём по какой-то прямой, а потом развернём лист обратно, линия сгиба будет хорошо заметна, и её можно затем использовать для других перегибов.

А теперь – задача: требуется с помощью перегибов определить местонахождение середины стороны CD (чтобы какая-то линия сгиба прошла через эту самую середину, которую мы в дальнейшем будем обозначать точкой M).

«И что тут сложного? – спросит читатель. – Задача-то буквально в одно действие! Вернее, в один перегиб». И это чистая правда. Возьмём исходный лист $ABCD$ (рис. 1а) и перегнём его так, чтобы совместились точки C и D (рис. 1б) – очевидно, при этом автоматически совместятся также точки A и B. Далее просто развернём лист обратно – и линия сгиба (штриховая) как раз пройдёт через точку отрезка CD, равноудалённую от концов этого отрезка – то есть через искомую точку M (рис. 1в). Вот и всё!

А теперь представим себе, что $ABCD$ – не отдельный «автономный» лист, а он вшит в тетрадь или книгу с жёстким переплётом вдоль стороны AB. Здесь-то указанный перегиб не выполнишь – переплёт не даст! Как же отметить середину CD, «не зацепив» AB? К счастью, и здесь несложно подобрать подходящую схему действий. А именно: сначала выполним перегиб через точку C, чтобы сторона CD совпала с линией CB (рис. 2а). Расправив

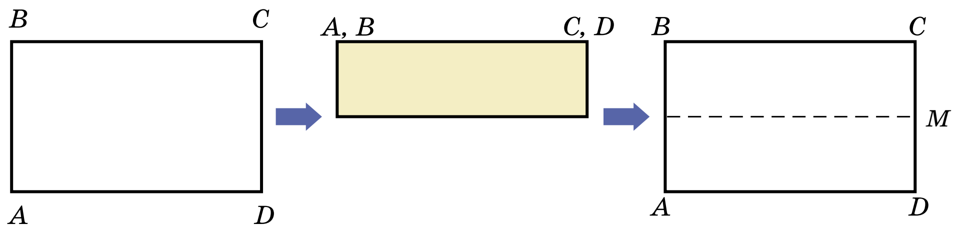
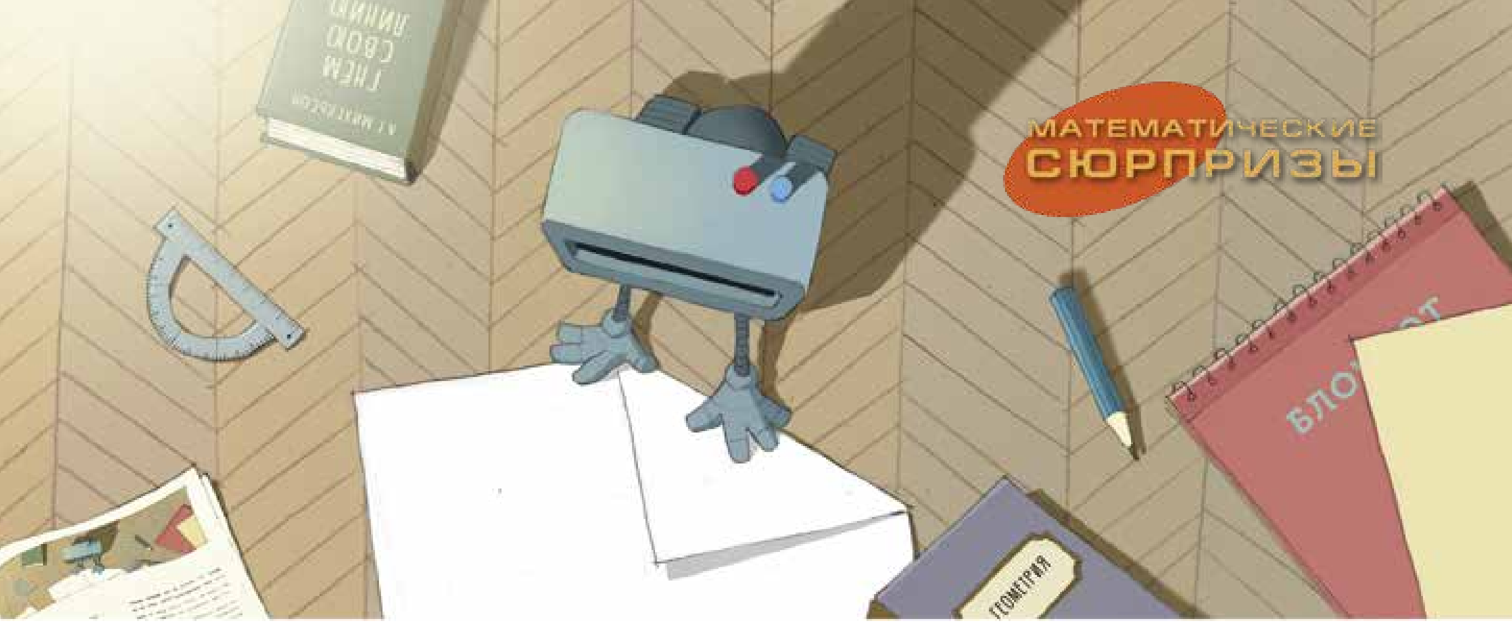


Рис. 1



лист обратно, получим линию сгиба по биссектрисе угла C (рис. 2б). Затем выполним аналогичный перегиб через точку D, получив биссектрису угла D. Две проведённые с помощью перегибов биссектрисы пересекаются в точке O (рис. 2в). Наконец, последним перегибом совмещаем точки C и O (рис. 2г). Расправив лист, получаем линию сгиба KM (рис. 2д), где M – как раз середина CD (доказательство чему вполне очевидно – сделайте это сами).

Всё вроде бы хорошо, но… не совсем. Дело в том, что такой метод годится, только если ширина листа *не меньше* его высоты ($AD \geqslant AB$) – иначе первый же перегиб упрётся в переплёт! Как же быть в ином случае? К счастью, и здесь имеется выход из положения – правда, более громоздкий, вследствие чего приходится кое-какие линии перегиба рисовать цветными карандашами, дабы не запутаться. Сначала перегнём лист так, чтобы точка C совпала с про-

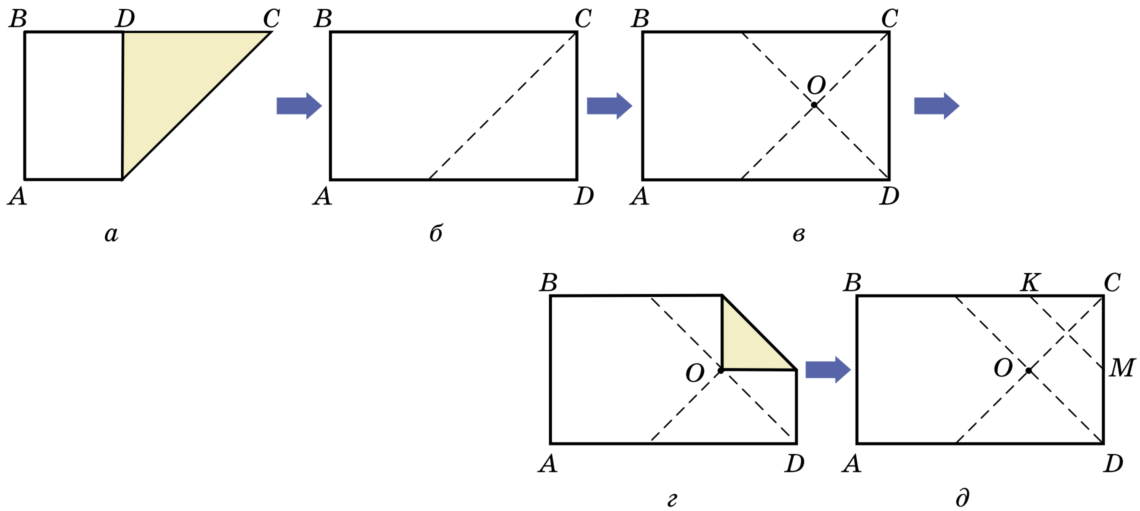


Рис. 2

извольной точкой на стороне BC, а потом выпрямим обратно. Получится линия сгиба EF, параллельная CD, которую мы для удобства восприятия нарисуем красным (рис. 3а). Затем перегибами «проводим» диагонали прямоугольника $FECD$, которые пересекаются в центре прямоугольника – точке P (рис. 3б). После этого, выбрав другую произвольную точку на стороне BC, проделываем те же операции, образуя другой прямоугольник с диагоналями (на этот раз синий), и получаем точку Q – его центр (рис. 3в). Заметим, что точки P и Q лежат на той же горизонтали, что и искомая точка M – середина CD. Поэтому вот последний штрих: угол исходного прямоугольника вблизи точки C загибаем так, чтобы часть стороны CD проходила через точки P и Q (рис. 3г). Полученный при этом сгиб KM как раз пройдёт через середину M стороны CD (рис. 3д).

Однако и здесь имеется ограничение: сразу бросается в глаза, что выполнить наши действия мы можем, если ширина листа *не меньше половины* высоты ($AD \geqslant AB/2$), в противном случае невозможным становится самый последний перегиб. Конечно, можно утешиться тем, что книги и тетради, у которых ширина листа меньше половины высоты, встречаются довольно редко, но... мало ли что! Нельзя ли добиться успеха при более узких листах? Подумайте! Ответ – в конце журнала.

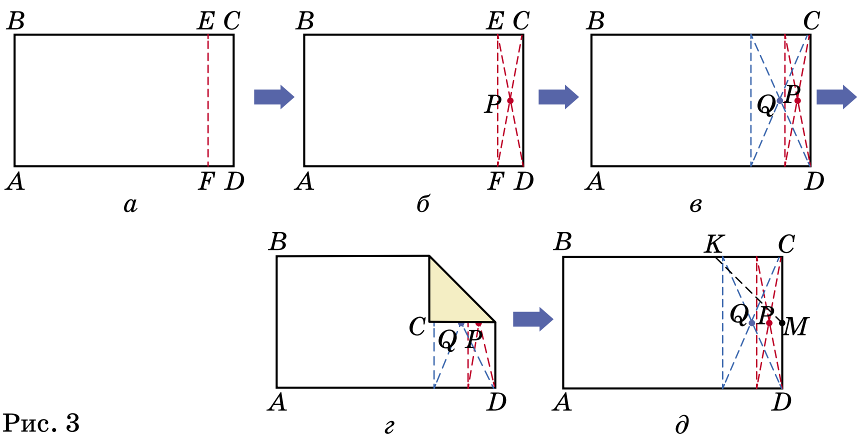


Рис. 3

Художник Алексей Вайнер

Татьяна Корчемкина

СВЕТОФОРЫ

Лёля сфотографировала два светофора, установленных на одном и том же столбе.

Через некоторое время эти же светофоры сфотографировала и Поля.

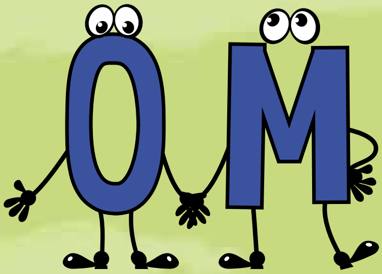
Количество секунд на светофорах различается на одно и то же число. На какое?

Художник Екатерина Ладатко

Игорь Акулич

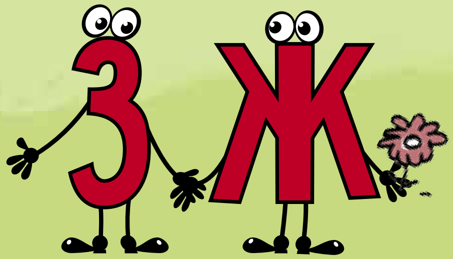
РЫБА И ПТИЦА

Читатели, поднаторевшие в решении ребусов, конечно, без труда скажут, что это за рыба:



В самом деле, здесь изображена буква «О», стоящая вместе с буквой «М», а короче говоря – с «О» «М», то есть – сом. Просто и ясно!

Ну, а если всё действительно так просто и так ясно, то скажите, пожалуйста, что это за птица:



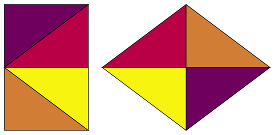
Художник Николай Воронцов

НАШ КОНКУРС, X тур

(«Квантик» № 6, 2024)

46. *У Пети есть картонный прямоугольник. Он хочет разрезать его на части и сложить из них ромб. Помогите ему это сделать.*

Ответ: разрежем Петин прямоугольник на два одинаковых прямоугольника и каждый из них разрежем по диагонали на два треугольника. Из получившихся 4 равных прямоугольных треугольников можно сложить ромб, как на рисунке.



47. *Какое из двух чисел,* $100!$ *или* $100! + 99! + 98!$, *оканчивается на большее количество нулей? Напомним, что* $n!$ *– это произведение натуральных чисел от* 1 *до* n.

Ответ: $100! + 99! + 98!$. Заметим, что $100! + 99! + 98! = (100 \cdot 99 + 99 + 1) \cdot 98! = (100 \cdot 99 + 100) \cdot 98! = 100 \cdot 100 \cdot 98!$, то есть на конце этого числа будет на 4 нуля больше, чем на конце числа $98!$. В то же время, $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98!$, то есть на конце числа $100!$ будет лишь на два нуля больше, чем на конце числа $98!$.

Значит, $100! + 99! + 98!$ оканчивается на большее число нулей, чем $100!$.

48. *На столе лежит стопка блинов. Между соседними блинами либо сметана, либо какая-то одна сладкая начинка – мёд или варенье. Сверху и снизу стопки пусто. У каждого блина ровно одна сторона намазана сметаной. У трети блинов одна сторона намазана вареньем. У* 10 *блинов одна сторона намазана мёдом. Сколько блинов в стопке?*

Ответ: 18. Пусть блинов b. Тогда всего сторон у блинов $2b$, причём из них b намазаны сметаной, $\frac{1}{3}b$ – вареньем, 10 – мёдом, и 2 стороны (верх и низ стопки) – пустые. То есть $2b = b + \frac{1}{3}b + 10 + 2$, откуда $\frac{2}{3}b = 12$ и $b = 18$.

49. *а) Найдите наименьшее целое положительное число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа. б) Найдите наибольшее такое число.*

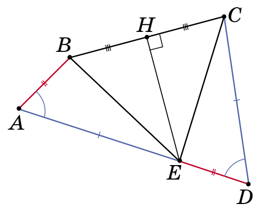
Ответ: а) 112; б) 99999999888888888.

Назовём число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа, *подходящим*. В подходящем числе обязательно найдутся две разные цифры: иначе все цифры одинаковы и равны 0 (так как других цифр нет). Быть двузначным подходящее число также не может: тогда его цифры различны, но каждая должна равняться 1 – противоречие.

Попробуем найти наименьшее подходящее число среди трёхзначных, начинающихся на 1. В таком числе ровно одна цифра не 1, значит, оно состоит из двух цифр 1 и одной цифры 2. Наименьшее такое число – 112.

Найдём теперь наибольшее подходящее число. Если в нём есть различные цифры m и n, то всего в этом числе m цифр, отличных от m, а самих цифр m не больше, чем n – в сумме не более $n + m$ цифр. Значит, в самом большом подходящем числе не более $9 + 8 = 17$ цифр. Если оно начинается с 9, то в нём 9 не-девяток, а значит, самих девяток не более $17 - 9 = 8$, то есть самое большое подходящее число состоит из восьми цифр 9 и девяти цифр 8 – это 99999999888888888.

50. *В выпуклом четырёхугольнике* $ABCD$ *углы* A *и* D *равны,* $AD = AB + DC$. *Серединный перпендикуляр к отрезку* BC *пересекает отрезок* AD. *Докажите, что он делит* $ABCD$ *на два четырёхугольника одинакового периметра.*



Отметим на AD такую точку E, что $AE = CD$ и $AB = DE$, и проведём отрезки BE и CE.

Тогда треугольники BAE и EDC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $BE = CE$, и в равнобедренном треугольнике BCE высота EH, опущенная на сторону BC, совпадёт с серединным перпендикуляром к BC, причём $BH = CH$. То есть нам нужно показать, что четырёхугольники $ABHE$ и $DCHE$ имеют одинаковый периметр. Но это действительно так: у этих четырёхугольников соответственные стороны одинаковы.

ЗОДИАКАЛЬНЫЕ СОЗВЕЗДИЯ

(«Квантик» № 7, 2024)

Солнце и звёзды движутся по небу из-за вращения Земли вокруг своей оси. Звёзды движутся как единое целое, то есть не меняя взаимного расположения. Если бы мы могли днём видеть звёзды, то заметили бы, что Солнце движется по небу медленнее, чем звёзды, и потому переходит из одного созвездия в другое. Разберёмся, почему так происходит. Если для наблюдателя на Земле Солнце находится в каком-то созвездии, то в пространстве Земля, Солнце и это созвездие расположены на одной прямой, причём

Солнце – между Землёй и созвездием. Но Земля движется вокруг Солнца, поэтому эта прямая вращается, пересекая разные созвездия. Эта прямая всегда лежит в плоскости орбиты Земли, поэтому Солнце может оказаться только в тех созвездиях, которые лежат в этой плоскости, они и называются зодиакальными. За один год суммарное отставание Солнца от звёзд составляет как раз один полный круг на небе. Например, Солнце в августе проходит через созвездие Льва, а в феврале – через созвездие Рыб.

Какие созвездия лучше видны? Те, что выше поднимаются над горизонтом. Ведь у горизонта созвездие могут заслонять дома или деревья. К тому же созвездие имеет определённый размер, поэтому ему нужно подняться хотя бы настолько, чтобы его было видно целиком. Созвездия каждый день проделывают на небе один и тот же путь, описывая круг вокруг Полярной звезды, которая почти не движется (если часть этого пути проходит ниже линии горизонта, то в это время созвездия не видно). Но как понять, какое из созвездий зодиака поднимается выше, не заглядывая в звёздные карты и не производя масштабных наблюдений?

Путь зодиакального созвездия можно «вычислить» по пути Солнца. Мы уже упоминали, что Солнце бóльшую часть августа находится в созвездии Льва. Поэтому созвездие Льва движется по небу так же, как Солнце в августе. А когда Солнце поднимается выше всего? В день летнего солнцестояния: это 20 или 21 июня. Кто заглядывал в гороскоп, тот знает, что эти дни соответствуют Близнецам и Раку. Однако на самом деле Солнце находится в каждом созвездии примерно на месяц позже, чем «по гороскопу». Поэтому выше всего поднимаются созвездия Тельца и Близнецов. Соседние с ними созвездия Рака и Овна видны плохо, так как их звёзды тусклые. Хорошо видно созвездие Льва. А хуже всего видны созвездия Скорпиона и Стрельца, так как поднимаются ниже всего.

Созвездия Тельца и Близнецов видны не летом, когда в них Солнце, а зимой, когда они поднимаются над горизонтом ночью (см. задачу «Созвездие Близнецов», «Квантик» №12 за 2022 год). Подумайте, в какие месяцы можно наблюдать самое высокое полнолуние.

ВАС ПЛОХО СЛЫШНО

Пусть отгадывающий отвечает честно на все вопросы; сложим коды карточек, на которые он ответил «да». Чтобы карточки работали правильно, нужно, чтобы все цифры такой суммы были чётными – для любого загаданного числа.

Поэтому для каждого числа от 1 до 15 нужно сделать следующее:

– посчитать сумму кодов тех из «исходных» карточек (с кодами 011, 101, 110, 111), на которых оно есть;

– посмотреть, какие из разрядов получившейся суммы нечётны;

– записать его на соответствующие новые карточки: если нечётна цифра сотен, то на карточку с кодом 100, если цифра десятков, то на 010, если единиц, то на 001.

Готово – теперь при честных ответах все цифры суммы кодов из стопки «да» чётны!

УДВОЕНИЕ ОТРЕЗКА И СУДЬБА ТОЧКИ

Решение задачи. После первого удвоения точка окажется на отрезке [0; 2], а её координата будет $2\times 0{,}474=0{,}948$. Точка попадёт в левую половину отрезка [0; 2], так как $0{,}948<1$. Поэтому первый раз Квантик запишет в судьбу 0. После разрезания точка лежит на отрезке [0; 1], её координата 0,948. Второй шаг: $1<2\times 0{,}948=1{,}896$ – точка попала на отрезок [1; 2], то есть в правую половину отрезка [0; 2], а значит в судьбу будет записано 1. А после разрезания и выкидывания левой части [0; 1] координату можно для удобства уменьшить на длину выкинутой части – на единицу: $1{,}896\to 0{,}896$ (и снова считать наш отрезок отрезком [0; 1]). Наконец, третий шаг: $0{,}896\to 1{,}792$. Точка снова в правой половине, в судьбу записываем 1. Итак, первые три знака: 011.

2. Ответ: 1/3. Пусть каждый раз, когда Квантик выкидывает половину, он растягивает оставшуюся половину в два раза. Это не повлияет на то, какие точки будут выкинуты. А какие точки не будут выкинуты ни на каком шаге? Те, которые, на первом шаге оказались в левой половине, потом в правой и так далее. Это в точности такие точки, которые имеют судьбу 010101... Проверьте, что такая судьба у точки 1/3.

3. Ответ: 4 : 6. Можно считать, что отрезок AB – это отрезок [0; 1024], а точка X – это точка 102,4. Тогда отрезок AB разделён на единичные отрезки, а точка X попала на отрезок [102; 103], откуда находится искомое отношение. Тот же ответ можно получить с помощью игры в удвоение. Действительно, отрезок AB поделён на 2^{10} равных частей, значит, после первого шага игры

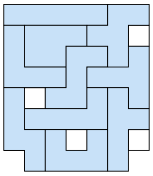
получится отрезок, разделённый на 2^9 равных частей, после второго – на 2^8 и так далее, после десятого шага та часть, на которую попала точка X, растянется на весь отрезок. Теперь можно найти, куда попадёт точка X:
$1/10 \to 2/10 \to 4/10 \to 8/10 \to 6/10 \to 2/10 \to 4/10 \to$
$\to 8/10 \to 6/10 \to 2/10 \to 4/10$.

4. Ответ: 474000... (дальше только нули).

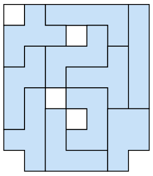
5. Точка 1/11 при первом удесятерении переходит в точку 10/11, потом снова в 1/11, так как $100/11 = 1/11 + 9$. Дальше всё будет повторяться. Точка 1/11 лежит на отрезке [0; 0,1], а точка 10/11 – на отрезке [0,9; 1]. Значит, судьба точки будет 090909... Это цифры числа 1/11 после десятичной запятой: $1/11 = 0,090909...$

КАЛЕНДАРИК

31 декабря
вторник
работа



1 января
среда
отдых



ПЕРЕГИБЫ С ПЕРЕПЛЁТОМ

Оказывается, отметить середину стороны CD можно *при любом* соотношении ширины и высоты листа. Для этого можно применить знаменитую теорему о том, что в любом треугольнике *медианы пересекаются в одной точке*. А как именно – сейчас увидим.

Здесь можно сразу «стартовать» с картинки, изображённой на рисунке 3б – когда с помощью перегибов на листе уже имеется прямоугольник $FECD$ с диагоналями, пересекающимися в точке P. Далее будем рисовать покрупнее, причём только правую часть прямоугольника $ABCD$, содержащую этот самый «вложенный» прямоугольник $FECD$ (рис. 4а). Перегнём лист так, чтобы точка C совпала с точкой E. После обратного «распрямления» появится вертикальный отрезок GH, который делит прямоугольник $FECD$ на две равные части и при этом проходит через точку P (рис. 4б). Перегнём теперь лист так, чтобы линия сгиба проходила через точки C и H (рис. 4в), и рассмотрим повнимательней треугольник CDF. В нём CH – медиана, и DP – тоже медиана. Значит, если через вершину F и точку O пересечения отрезков CH и DP провести прямую линию, то она также будет медианой треугольника CDF и обязана будет пройти через середину стороны CD. А ведь это нам и надо! Итак, последний штрих: перегибаем лист так, чтобы линия сгиба прошла через точки F и O. Она как раз пройдёт через середину M отрезка CD (рис. 4г), что и требовалось.

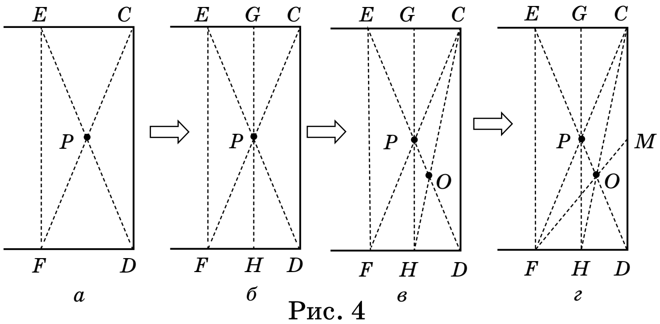


Рис. 4

Примечание. Перегиб по отрезку CF можно было бы и не делать, так как точка P образуется при пересечении двух других отрезков.

ИНВЕРСИЯ ТЕНИ

Если бы тени не было, и тёмная полоса простиралась до самого поребрика, картина была бы яснее: у края дороги может быть тёмная каёмка, если там скопилась и не до конца высохла влага. Как на влажную каёмку может повлиять тень? Участок вне тени прогревается солнцем. Можно было бы ожидать, что он тогда просохнет и будет светлее тени, – но у нас всё наоборот: вне тени асфальт не просох, тепла солнца не хватило. Но его хватило на что-то, после чего солнечная часть стала тёмной, а холодная часть в тени осталась светлой. Если тёплая, солнечная часть тёмная и влажная, то холодная часть, видимо, замёрзшая: инеей оставляет асфальт светлым, а на свету тает и затемняет его. Этот эффект можно воспроизвести, нагрев участок в тени раньше солнца, как показано на фото справа.

СВЕТОФОРЫ

На Лёлиной фотографии левый светофор показывает либо 35, либо 39, значит, разница равна либо 6, либо 2 секундам. На Полиной фотографии на левом светофоре либо 26, либо 28, то есть разность в 6 секунд не подходит, и показания светофоров отличаются на 2 секунды.

РЫБА И ПТИЦА

Здесь главное – сообразить, что слева стоит не буква «З», а цифра «ТРИ», так что получаем: с «ТРИ» «Ж», то есть СТРИЖ.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 сентября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XII ТУР

56. Петя хочет собрать из кусочков проволоки длиной по 1 см каркас параллелепипеда 3 см $\times$ 6 см $\times$ 8 см, поделённого на кубики со стороной 1. Сколько кусочков ему для этого понадобится?

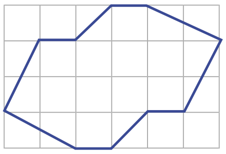
57. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно выехали велосипедисты Алёша и Боря. Их скорости постоянны, причём Алёша едет быстрее Бори. Доехав до пункта Б, Алёша поворачивает обратно, а Боря поворачивает обратно в пункте А. Встретившись после этого, оба разворачиваются, и Боря снова едет в пункт А, а Алёша в пункт Б. Кто из них приедет раньше?

наш КОНКУРС

олимпиады

Авторы задач: Александр Рубин (56), Борис Френкин (57), Михаил Леляков (58), Игорь Акулич (59), Михаил Евдокимов (60)

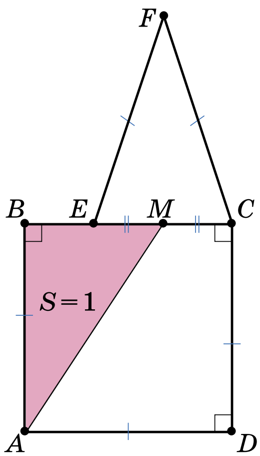
58. Разрежьте фигуру на рисунке на 6 равных (и по форме, и по размеру) частей.

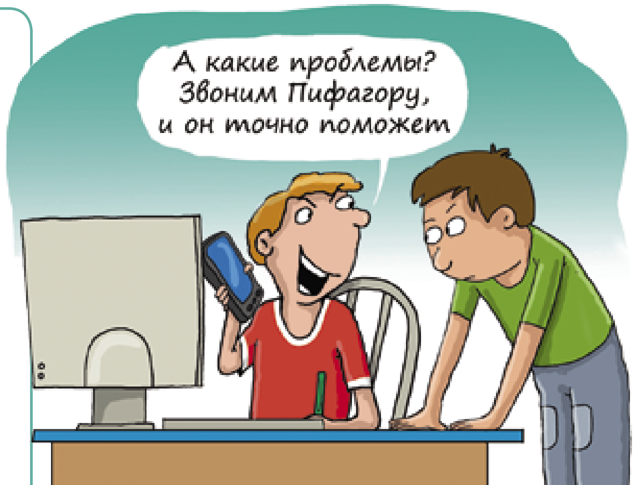


59. Разрешается либо прибавить к натуральному числу сумму его цифр, либо отнять от него сумму его цифр. Можно ли, стартовав от числа 1, с помощью нескольких таких операций получить число:

а) 101; б) 100; в) 99?

60. Можно ли по информации на рисунке найти расстояние между какими-нибудь двумя из 7 точек, отмеченных буквами? При решении вам пригодится теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. (Равные отрезки на рисунке отмечены равным числом чёрточек, площадь красного треугольника равна 1 см^2.)





Художник Николай Крутиков

ПАР
ИЗ КАСТРЮЛИ

Ноутик сварил макароны и начал сливать из кастрюли воду. Повалил пар. Вроде всё было как обычно, но Ноутик вдруг задумался: испаряется вода от нагревания – так почему же пар повалил не тогда, когда кастрюля стояла на горячей плите, а сейчас? (Макароны Ноутик варил, как полагается, в кастрюле без крышки. Если решитесь повторить эксперимент, сливайте воду осторожно – паром можно сильно обжечься!)

Автор Григорий Мерзон

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 24008
9 772227 798244