№ 9 | сентябрь 2024

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9
сентябрь
2024

ПОИСК САМОЙ ВКУСНОЙ ШОКОЛАДКИ

О БРОНЗЕ И ДРЕВНЕЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛЕ

ВОДЯНЫЕ ЛИНЗЫ

Enter

НАШИ НОВИНКИ

Вышел в свет 23-й выпуск АЛЬМАНАХА «КВАНТИК»

В него вошли материалы журналов «Квантик», публиковавшиеся в течение I полугодия 2023 г.

Приобрести новый альманах и другие наши издания можно в магазине при издательстве по адресу: г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, 1 этаж, **магазин «Математическая книга»**, а также в интернет-магазинах: **biblio.mccme.ru**, **my-shop.ru**, **ozon.ru**, **WILDBERRIES**, **Яндекс.маркет** и других (полный список магазинов смотрите на **kvantik.com/buy**)

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России **ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ** за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук **ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА** за лучшие работы в области популяризации науки

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84x108/16

Тираж: 4000 экз.

Подписано в печать: 23.07.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40

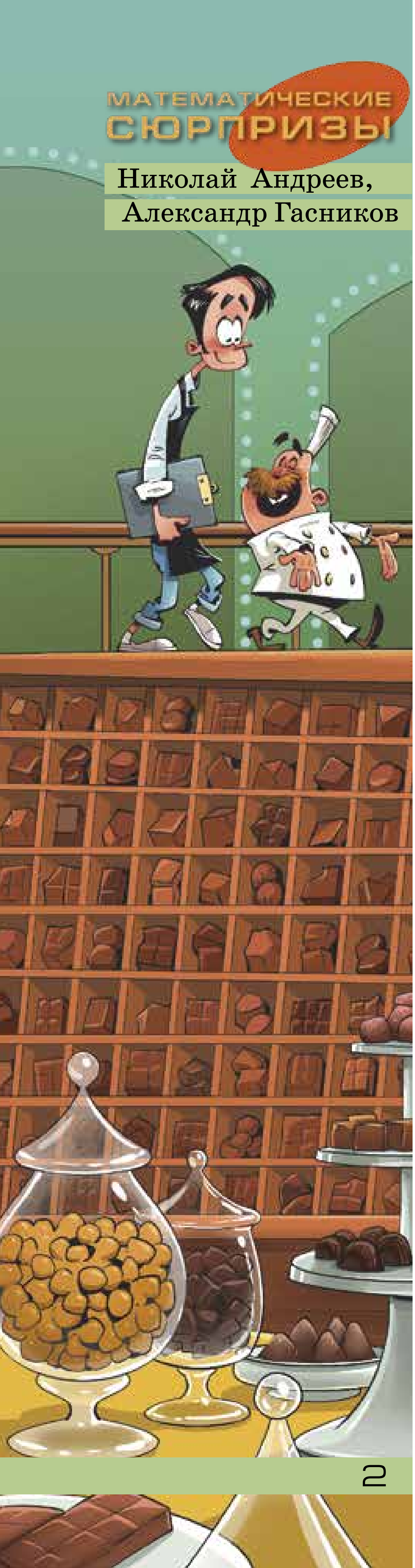
Заказ №

Цена свободная

ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



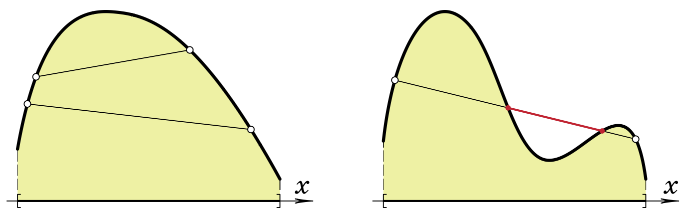
Николай Андреев,
Александр Гасников

ПОИСК САМОЙ ВКУСНОЙ ШОКОЛАДКИ

Шоколад делается на основе масла какао, которое получается из какао-бобов – семян шоколадного дерева. Чтобы шоколад был вкусным, в масло примешивают множество добавок. Делается много вариантов, в которых добавки смешиваются в различных пропорциях, а дегустаторы выбирают вариант, по их мнению, самый вкусный.

Рассмотрим самую простую задачу, когда все ингредиенты уже зафиксированы, и мы должны определиться только с одной добавкой – например, сколько класть сахара. Если сахара мало, шоколад будет слишком горьким, а если слишком много – шоколад будет приторным. Выберем одного эксперта-дегустатора и введём функцию «вкусноты»: на вход подаётся количество добавленного сахара, и чем шоколадка вкуснее, тем больше значение функции вкусноты.

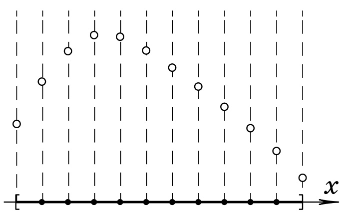
Будем рассматривать нашу функцию над отрезком, каждая точка которого показывает, сколько сахара положили в шоколад, а края отвечают каким-то разумным значениям количества сахара. Сделаем естественное допущение: будем считать, что наша функция вкусноты *строго выпукла вверх* – если соединить две любые точки на графике функции, то отрезок будет всегда лежать под графиком функции (выходя на график только своими концами). То есть между отрезком и графиком функции – выпуклая область, как на левой картинке, а не на правой.



Это допущение основано на реальном эффекте насыщения – первые увеличения сахара оказывают большее влияние на вкус, чем следующие за ними. Можно считать, что поведение нашей функции на отрезке таково: функция вкусноты при увеличении количества сахара возрастает до какого-то момента (пока сахара слишком мало), в какой-то точке достигает единственного на отрезке максимума, а потом убывает (когда сахара чересчур много).

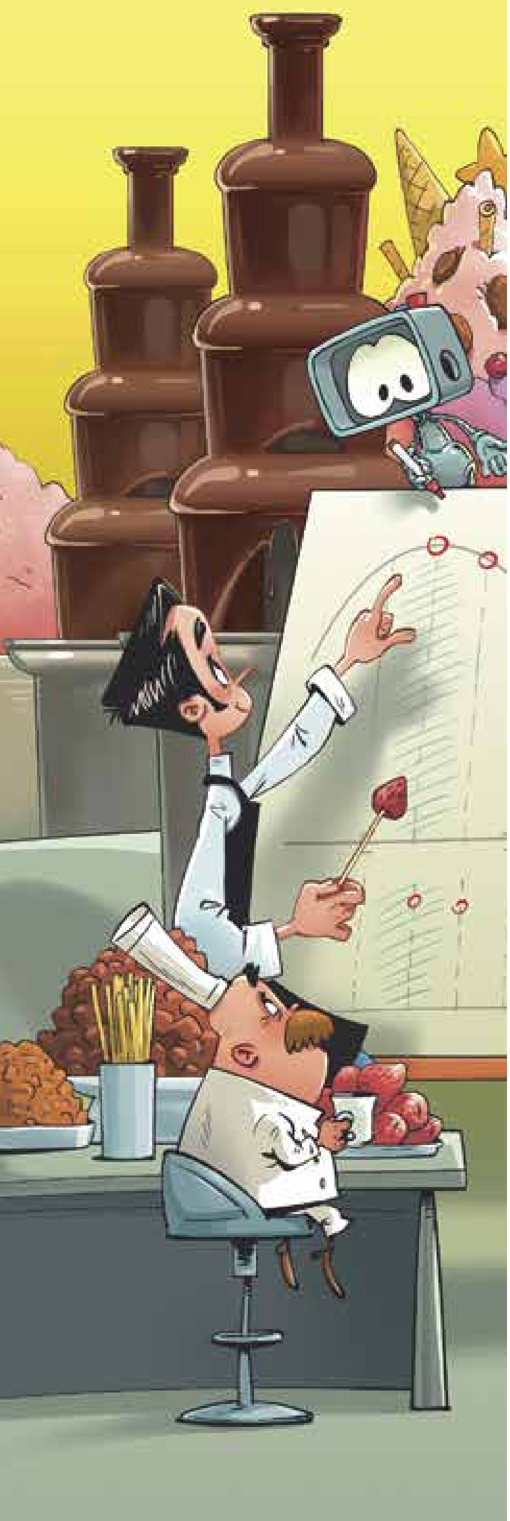
Мы не знаем, как в точности выглядит функция вкусноты, но хотим найти ту единственную точку, в которой она принимает максимальное значение: найти количество сахара, при котором шоколадка самая вкусная из возможных. По какому алгоритму нам действовать?

Первое, что приходит на ум: можно разбить отрезок на много-много шажков, пусть одинаковых; сделать для каждой точки шоколадку с соответствующим количеством сахара и заставить дегустатора все их попробовать. В качестве первой рассмотрим задачу, когда дегустатор умеет, попробовав шоколадку, указать для неё значение функции «вкуснота». То есть мы умеем вычислять значение функции для любой точки, и требуется найти её максимум на заданном отрезке. Дегустатор, испытав тысячи шоколадок (а в реальных задачах числа оказываются гораздо больше), может выбрать самое большое значение из названных им (по сути, по точкам построить график функции вкусноты). Помня, на какой шоколадке достигался максимум, мы получим рецепт, близкий к наилучшему.

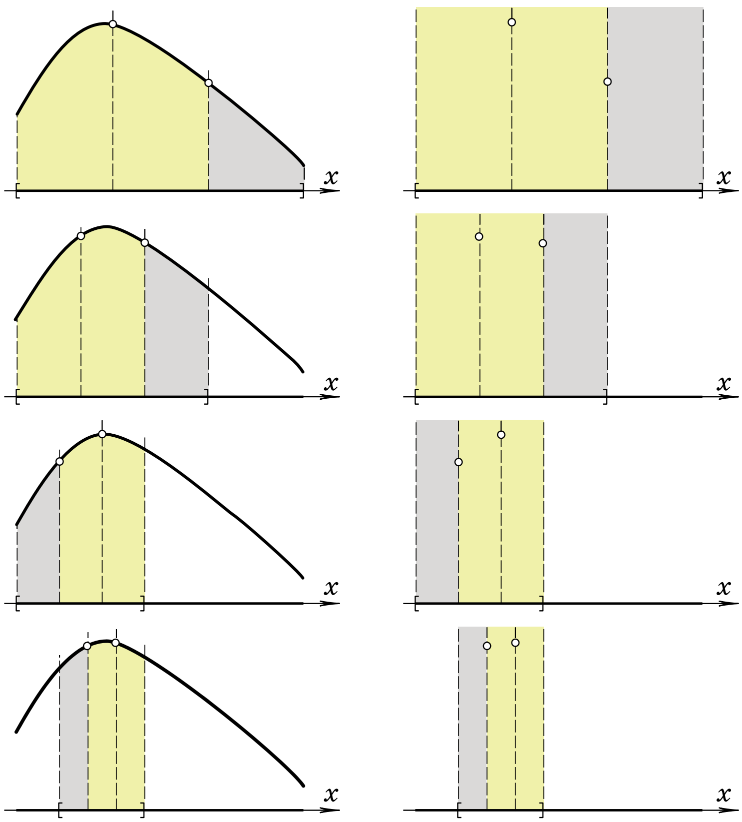


Но согласитесь, это очень странное требование к дегустатору, чтобы он по шоколадке назвал точное число – значения функции вкусноты. Чаще всего нормальный человек может сравнить два данных ему образца, сказав, что один вкуснее другого. И это вторая задача, которую мы попробуем решить. В этой постановке у нас есть неизвестная функция (вкусноты) и дегустатор, который по конкретным двум точкам на отрезке может сказать, что больше – значение функции в первой точке или второй. Требуется найти максимум этой функции на отрезке (точку, в которой он достигается).

Один из способов, используемый в информатике для решения обеих задач, – троичный поиск. Разделим отрезок двумя точками на три равные части и сравним значения в этих точках. Максимум функ-



ции (указанного типа) лежит в тех двух областях, которые граничат по точке с большим значением. Поэтому другая треть исходного отрезка – от точки, где значение меньше, до ближайшего к нему края – откидывается. (Если значения в двух точках совпали, то можно откинуть любой из крайних отрезков.) Новый отрезок на треть меньше предыдущего, и описанный шаг алгоритма повторяется применительно уже к нему. Тем самым, на каждом шаге отрезок, на котором находится искомый максимум функции, во-первых, лежит внутри предыдущих, во-вторых, с каждой итерацией уменьшается – сокращается на треть длины отрезка, рассматриваемого на предыдущем шаге, и для каждого шага приходится вычислять значение функции в двух точках, чтобы сравнить их.



В левом столбце первые четыре шага алгоритма показаны для случая первой задачи, когда мы умеем вычислять функцию. Но и в случае второй задачи, когда вычислять функцию не умеем, а умеем только сравнивать значения в двух точках, алгоритм, как показано в правом столбце, работает так же.

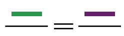
В реальных задачах очень часто точку максимума достаточно локализовать с какой-то точностью – указать маленький отрезок, внутри которого она находится. Действительно, если локализовать наилучшее количество сахара с точностью до отрезка в $\frac{1}{1000}$ от исходного, вряд ли даже профессиональный дегустатор почувствует разницу – дальнейшие уточнения не имеют практического смысла.

Чтобы локализовать точку максимума на отрезке в $\frac{1}{1000}$ от исходного в первой задаче (когда мы умеем вычислять функцию), необходимо было бы съесть тысячу шоколадок! А к нашей второй задаче алгоритм поточечного построения графика и вовсе не применим. Чтобы локализовать точку максимума с такой же точностью рассмотренным алгоритмом троичного поиска, придётся сделать всего 16 шагов: чтобы $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ стало меньше $\frac{1}{1000}$. И, соответственно, попробовать $2 \cdot 16 = 32$ шоколадки. Всего 32 шоколадки, а не тысячу! Причём этот алгоритм работает и в первой задаче, и во второй. А можно ли с такой же точностью локализовать точку максимума, проявив заботу о дегустаторе и потратив ещё меньше денег и времени на эксперименты – за ещё меньшее число шоколадок?

Один из способов, который позволяет это сделать, – метод золотого сечения. Напомним читателю, что *золотым сечением* называется число $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, которое удовлетворяет уравнению $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. У этого числа много интересных свойств, и оно уже не раз встречалось на страницах нашего журнала.

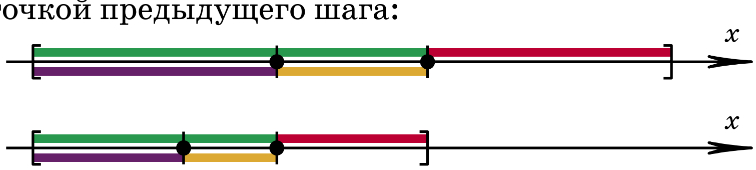
Метод золотого сечения улучшает алгоритм троичного поиска за счёт такого разбиения отрезка двумя точками на три (уже не равные) части, чтобы одна из точек совпадала с использовавшейся на предыдущем шаге. Тогда на очередном шаге информацию в этой точке можно брать из предыдущего шага.

Две точки внутри отрезка будем выбирать симметрично относительно середины отрезка

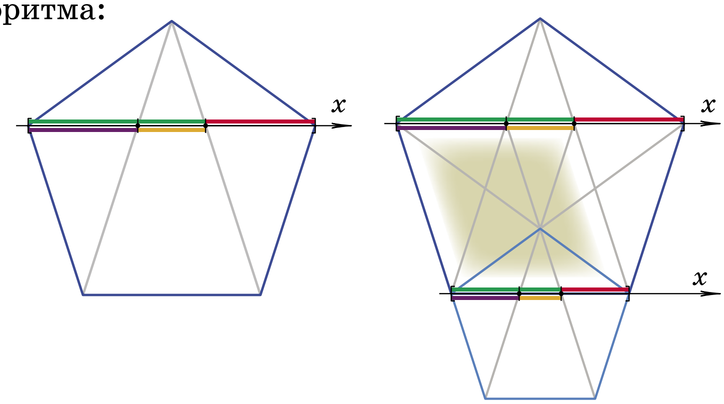
и так, чтобы выполнялось соотношение 

(а красный отрезок равен фиолетовому из-за симметричного выбора точек). При этом окажется, что оба эти отношения равны φ, откуда и берёт название описываемый метод. При таком разбиении это же соотношение выполняется и для другой стороны отрезка:

Так как для золотого сечения $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, когда мы поделим отрезок следующего шага двумя точками в той же указанной пропорции, одна из них совпадёт с точкой предыдущего шага:



Любители геометрии наверняка оценят такое представление используемого деления отрезка и шага алгоритма:



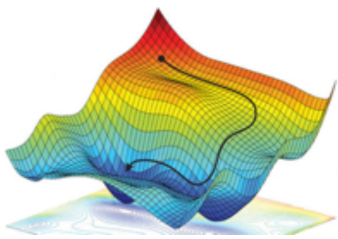
В случае, когда мы ищем максимум функции, которую умеем вычислять, на первом шаге, конечно, придётся посчитать её значение в двух точках внутри отрезка. Но на каждой следующей итерации в совпадающей для двух шагов точке используется значение функции, посчитанное на предыдущем шаге, и считать надо только одно значение.

Когда функция неизвестна, алгоритм тоже работает. Помня вкусовые ощущения предыдущего шага, дегустатор, пробуя одну шоколадку, сравнивает её вкусность с тем, что уже было.

Итак, преимущество метода золотого сечения над алгоритмом троичного поиска основано на двух идеях. Во-первых, на каждом шаге надо пробовать одну шоколадку, а не две! Во-вторых, на каждом шаге отрезок уменьшается не на $\frac{1}{3}=0{,}3333...$ от длины предыдущего, а больше – на $\frac{1}{\varphi+1}=0{,}3819...$ от длины, а значит, для достижения нужной точности надо будет сделать чуть меньше шагов. Выигрыш, по сравнению с троичным поиском, получается больше чем в 2 раза!

Это только в детстве кажется, что много шоколадок – это хорошо. Но много шоколадок съесть невозможно. Да и дóроги эксперименты с миллионами и миллиардами (а именно такие масштабы встречаются в реальных задачах) шоколадок. Количество съедаемых шоколадок при решении задачи – а на научном языке количество шагов алгоритма – необходимо минимизировать, делать как можно меньше. Раздел математики, который занимается вопросами эффективности алгоритмов, – это *теория сложности*, см., например, book.etudes.ru/articles/complexity/ в интернете.

А исходная задача – численного поиска максимума или минимума какой-то функции – относится к области, называемой *оптимизацией*. Мы с вами рассматривали простейшую постановку – с одним параметром: наша функция «жила» над отрезком, да ещё и обладала свойством выпуклости. Если параметров два, то функция задаёт поверхность над участком плоскости: мы попадаем с вами в холмистый, а иногда и горный, рельеф. Бродя по нему, мы должны найти самую низкую точку в заданном районе. Причём некоторые задачи надо решать, имея карту, а в некоторых задачах – даже не представляя карты местности, а только видя ближайший рельеф: по сути, бродя «на ощупь» в густом тумане! Как нужно строить маршрут поиска самой низкой точки, чтобы он был и алгоритмичным, и покороче? В современных реальных задачах количество параметров исчисляется миллиардами, поверхности строятся в многомерных пространствах и даже при наличии самых современных компьютеров необходимо находить математические алгоритмы, прокладывающие путь к точке минимума или максимума не за вечность, а за разумное время, как можно меньшее.



Художник Мария Усеинова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

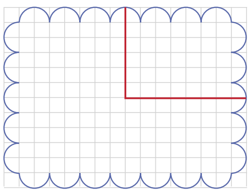
Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

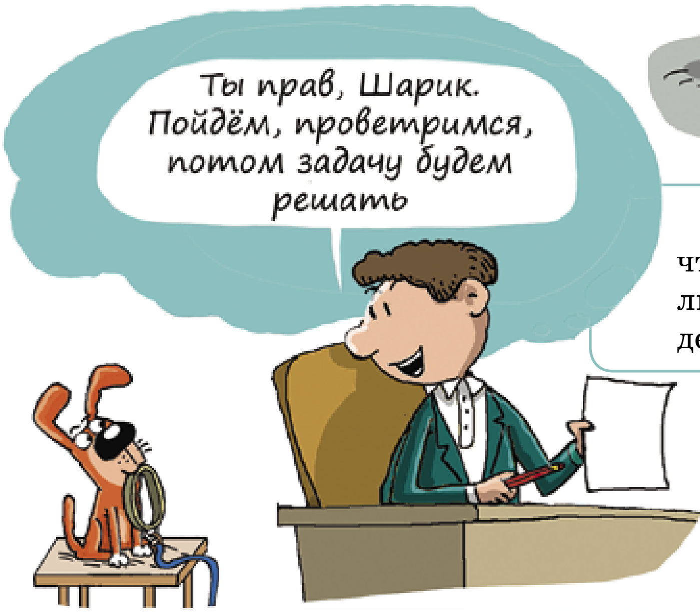


1. На рисунке вы видите печенье и пример, как сделать разрез по линиям сетки, чтобы отделить четверть (по площади). Можно ли от такого же печенья отрезать четверть (по площади) иначе – так, чтобы разрез шёл по линиям сетки и оказался короче, чем в примере?

2. Дан треугольник, два угла которого равны 25° и 80°. Докажите, что в нём биссектриса какого-то угла и одна из трисектрис какого-то угла перпендикулярны друг другу. (Напоминание: биссектриса делит угол пополам, трисектриса отрезает треть угла; сумма углов любого треугольника равна 180°.)

Авторы задач: Татьяна Казицына (1), Михаил Евдокимов (2, 3), Николай Осипов и Аркадий Скопенков (4), Сергей Дориченко (5)

3. Фокусник взял две колоды по 52 карты в каждой и построил на столе треугольный карточный домик с наибольшим числом этажей. Сколько карт у него осталось на руках? На рисунке для примера показаны карточные домики в 2 этажа (из 7 карт) и в 3 этажа (из 15 карт).



4. Даны целые числа a, b, c. Известно, что каждое из чисел $2a-1$, $3b-1$, $6c-1$ делится на 1001. Обязательно ли $a+b+c-1$ делится на 1001?

5. У Пети есть набор из трёх белых гирек массами 101 г, 102 г и 103 г, и такой же набор из трёх чёрных гирек. Массы на гирьках не написаны, а на вид нельзя понять, какая гирька какой тяжелее. Петя хочет разбить гирьки на пары одинаковых по массе. Как ему сделать это за два взвешивания на чашечных весах со стрелкой, показывающих, какая чаша перевесила и на сколько грамм?

Художник Николай Крутиков

ОЗЕРО ЯРЧЕ СОЛНЦА

На фото солнечная дорожка выглядит так же ярко, как солнце, но её площадь значительно больше. Получается, что от неё к нам поступает значительно больше света, чем от солнца.

Но ведь лёд не работает, как лупа, собирая свет в одну точку, а просто отражает его, как зеркало. Как же он может приносить нам больше света, чем само солнце?

Автор Александр Бердников

Художник Мария Усеинова

Фото автора

ISSN 2227-7986 24009

9 772227 798244