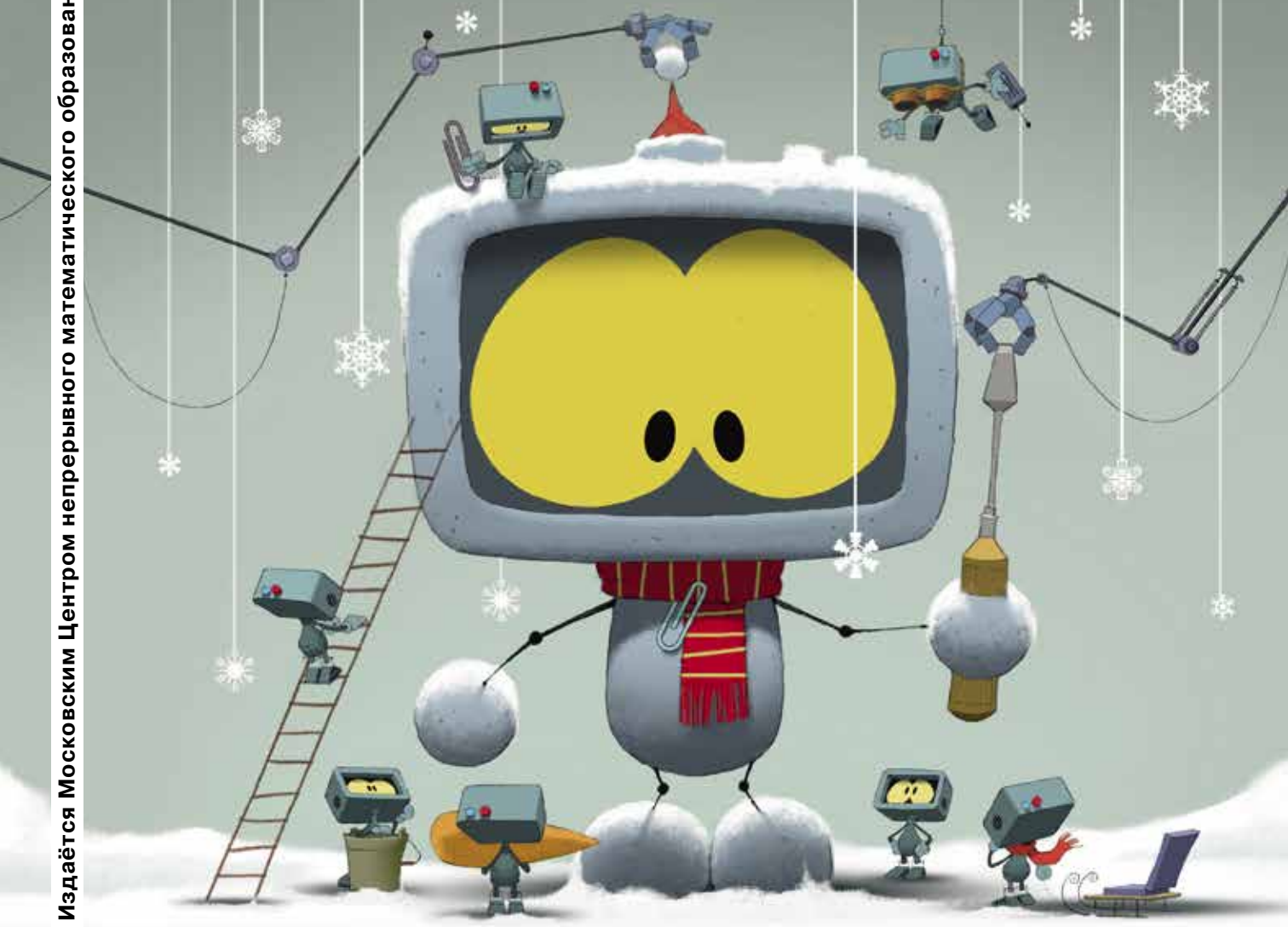
№ 1 | январь 2025

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования



e-mail: kvantik@mccme.ru

№1
январь
2025

ФОКУС С ДВУМЯ СКРЕПКАМИ

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕННА

ЛИШНЯЯ РАДУГА

Enter

НАШИ НОВИНКИ

КАЛЕНДАРЬ КОМИКСОВ
от журнала «КВАНТИК» на 2025 год –
настенный перекидной календарь
с занимательными комиксами

АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ
«КВАНТИК», выпуск 23

включает в себя
все материалы журналов «Квантик»
за I полугодие 2023 года

Приобрести продукцию «КВАНТИКА»
можно в магазине **«Математическая книга»** (г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11),
в интернет-магазинах: biblio.mccme.ru, my-shop.ru, ozon.ru, WILDBERRIES, Яндекс.маркет
и других (полный список магазинов на **kvantik.com/buy**)

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»

в почтовых отделениях
по электронной и бумажной версии
Каталога Почты России:

ПОЧТА РОССИИ

индекс **ПМ068** –
подписка по месяцам полугодия

онлайн
на сайте Почты России
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По этой ссылке вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

Подробнее обо всех вариантах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке
2017

БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ
за плодотворную работу
и просветительскую
деятельность
2021

Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки
2022

Победитель конкурса в номинациях
ЛУЧШИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СРЕДНЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА
ЛУЧШЕЕ ДИЗАЙНЕРСКОЕ РЕШЕНИЕ
2024

Журнал «Квантик» № 1, январь 2025 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина,
Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов,
Н. А. Солодовников
Художественный редактор
и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал
в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж
обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84×108/16

Тираж: 4000 экз.

Подписано в печать: 26.11.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40

Заказ №

Цена свободная

ISSN 2227-7986

6+ EAC

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Ахмес, математик из Египта. *А. Буфетов* **2**

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Про тонкорунных овец. *Г. Идельсон* **8**

ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ

Сифон. *Н. Солодовников* **11**

Весёлый кубик. *Г.Караваев* **15**

Лишняя радуга. *Н. Панюнин* **19**

Ошибка Магеллана. *Д. Житницкий* **IV с. обложки**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Простые числа Мерсенна. *Г. Мерзон* **12**

СВОИМИ РУКАМИ

Фокус с двумя скрепками. *С. Полозков* **16**

УЛЫБНИСЬ

Конкурсный экзамен. *(по М. Твену)* **18**

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Математические кроссворды. *Р. Ханмагомедов* **20**

ОЛИМПИАДЫ

Конкурс по русскому языку, I тур **22**

XLVI Турнир городов, осенний тур, 8-9 классы **24**

Наш конкурс, V тур **32**

ОТВЕТЫ

Ответы, указания, решения **27**

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Александр Буфетов

ἵνα πληρωθῇ τὸ ῥηθὲν ὑπὸ κυρίου διὰ τοῦ προφήτου λέγοντος Ἐξ Αἰγύπτου ἐκάλεσα τὸν υἱόν μου.
[Чтобы исполнилось сказанное Господом чрез пророка: Из Египта призвал Я Сына Моего.]

Мф. 2:15

АХМЕС, МАТЕМАТИК ИЗ ЕГИПТА

ПАПИРУСЫ СРЕДНЕГО ЦАРСТВА

Какой была математика древних египтян? Мы знаем о ней очень мало. В конце четвёртого тысячелетия до н. э. в Египте возникло единое государство. Этот, первый, период истории объединённого Египта мы так и называем – *Древнее царство*. Письменность и запись чисел появились, по-видимому, ещё до объединения. На памятниках самого начала Древнего царства мы встречаем уже очень большие числа, включая миллион, который египтяне изображали в виде бога, держащего небо на руках. С другой стороны, если договориться понимать термин «математическая задача» в его сегодняшнем смысле, а «математический текст» определить как текст, посвящённый решению математических задач, то математических текстов времени Древнего царства у нас нет.

Начало папируса Ахмеса

Усиление региональных элит привело к распаду Древнего царства. В Египет пришли голод, разруха, гражданская война. К концу третьего тысячелетия до н. э. Египет объединился вновь. Этот, второй, период истории объединённого Египта мы называем *Среднее царство*. Сын простолюдина и, возможно, чужестранки, иммигрантки из Нубии, Аменемхет упорным трудом достиг высших должностей в государстве, взошёл на царский трон и основал Двенадцатую династию Египта.

Основанная Аменемхетом Первым Двенадцатая династия – наивысший расцвет Среднего царства. А древнейший из дошедших до нас египетских математических текстов – Московский математический папирус, – предположительно, копия, сделанная во время Три-

надцатой династии с оригинала времени Двенадцатой династии. Его купил в 1890 году в Египте великий первопроходец русской египтологии Владимир Семёнович Голенищев, и сегодня фрагмент этого папируса можно увидеть в зале № 2 Пушкинского музея в Москве.

Среднее царство распалось на рубеже XVIII – XVII веков до н. э., и к власти на севере Египта пришли иноземные цари-гиксóсы. Тридцать третьим годом правления гиксóсского царя Ааусерра Апопи датируется второй, более подробный, математический папирус. Найденный в Фивах, в 1858 году он был куплен шотландским археологом Александром Генри Райндом, а после смерти археолога продан в Британский музей. Написал этот папирус Ахмес – первый в мире математик, известный нам по имени[1]. После смерти царя Ааусерра Апопи тёзка[2] Ахмеса, царь Яхмос вновь объединил Египет и основал Новое царство. Началась эпоха построения огромной империи, но от времени Нового царства нам не известно пока ни одного математического текста.

ЕГИПЕТСКИЕ ДРОБИ

Что включил в свой папирус Ахмес? Оставив в стороне трудный и тонкий вопрос записи чисел в Древнем Египте[3], будем пользоваться современными обозначениями.

Определение. *Египетской дробью* будем называть конечную сумму дробей с числителем 1 и попарно различными знаменателями. Например,

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}.$$

Дробей общего вида $\frac{m}{n}$ египетская математика не знала. Использовались, за редкими исключениями, только дроби вида $\frac{1}{n}$ – сегодня мы называем их *аликвотными*. Специальный знак был для дроби $\frac{2}{3}$,

[1] Имя «Ахмес» в переводе означает «[бог Луны] Йах родился».

[2] В египетском языке, как, например, и в современных арабском и иврите, записываются только согласные. Огласовки египетских слов предположительны. Используя для одного и того же имени две разных огласовки, мы в обоих случаях следуем традиции.

[3] Отметим, что иероглиф, в Древнем царстве обозначающий «миллион», в более поздних текстах обозначает «бесконечность», а кроме того, что в египетском языке, как и в русском, в имена дробей входят не количественные, а порядковые числительные: «одна седьмая» и т. п.

встречающейся очень часто. Умножали целые числа методом последовательных удвоений: так, при решении задачи 32 из папируса[4] в качестве промежуточного шага Ахмес должен умножить 12 на 12; он последовательно удваивает: 12, 24, 48, 96, и находит ответ: $96 + 48 = 144$. Но при удвоении египетская дробь перестаёт быть египетской дробью. Папирус Ахмеса и открывается списком, в котором дроби вида $\frac{2}{n}$, для n вплоть до 101, представлены египетскими дробями.

Упражнение 1. Для любого натурального n представьте $\frac{2}{2n+1}$ как сумму двух аликвотных дробей с различными знаменателями.

Ахмес, однако, действует по-другому.

Упражнение 2. Дополните представления Ахмеса: а) $\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \ldots$; б) $\frac{2}{69} = \frac{1}{46} + \ldots$; в) $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \ldots$.

Упражнение 3. Любое ли рациональное число представимо египетской дробью? Сколькими способами?

За списком начинаются задачи. Сперва требуется разделить 2, 6, 7, 8, 9 караваев хлеба на 10 человек: например, $\frac{6}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ (иными словами, один каравай делим на 10 частей, остальные 5 – пополам). Далее идёт группа примеров на умножение и на вычитание дробей, например (задача 15): найти $\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{224}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ или (задача 23): найти $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}\right)$.

Упражнение 4. Решите эти задачи.

ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЛИЧЕСТВАМИ

Ахмес переходит затем к задачам на нахождение неизвестного количества. В современных терминах, речь идёт о линейных уравнениях с одним неизвестным. Вот, например, задача 28: к некоторому количеству прибавляются его $\frac{2}{3}$, потом из суммы вычитается $\frac{1}{3}$ суммы, получается 10 – найти исходное количество (ответ: 9). Историк математики Гиллингс предполагает, что речь идёт об игре на угадывание чисел. Попросите вашего знакомого загадать число, прибавить к нему $\frac{2}{3}$ этого числа, потом из суммы вы-

[4] Номера, с 1-го по 84-й, задачам папируса Ахмеса дали в XIX в.

честь треть суммы и результат сказать вам. Вы легко сможете отгадать исходное число: это $\frac{9}{10}$ от названного результата (и найдёте его, вероятно, даже быстрее, чем ваш знакомый выполнял требуемые операции).

Ещё задача: $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$ от некоторого количества дают 10. Как найти неизвестное количество?

Ахмес начинает удваивать: $2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$;

$$4\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)=3+\frac{1}{15};\quad 8\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)=6+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}.$$

Но тогда (пишет Ахмес) $13\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{30}=10$. Остаётся поделить $\frac{1}{30}$ на $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$, получается $\frac{1}{23}$. Итого ответ: $13+\frac{1}{23}$. Проверяя его, Ахмес пишет:

$\frac{2}{3}\left(13+\frac{1}{23}\right)=8+\frac{2}{3}+\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$; $\frac{1}{10}\left(13+\frac{1}{23}\right)=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{230}$.
Вместе: 10.

А вот задача 31: некоторое количество плюс $\frac{2}{3}$ его, плюс $\frac{1}{2}$ его, плюс $\frac{1}{7}$ его вместе дают 33. Найти исходное количество.

Не совсем простое вычисление даёт ответ:

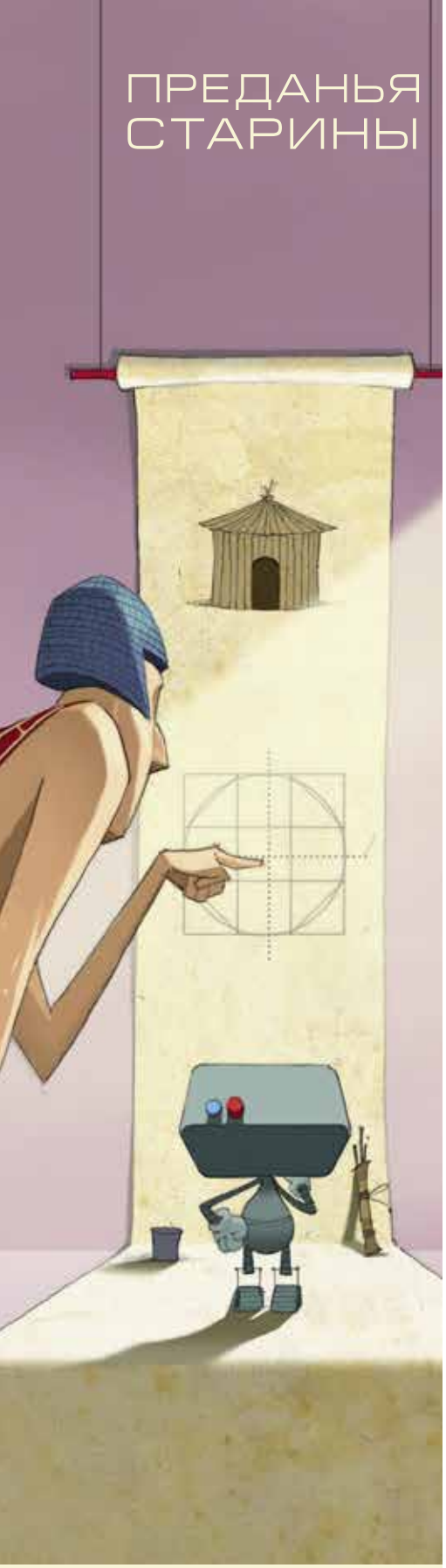
$$14+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

Да, арифметика египетских дробей тяжеловесна – а то, что Ахмес не сумел сделать шага к общим дробям, показывает, как труден этот шаг, каким огромным трудом людям достаётся математическое знание.

ПРОГРЕССИИ

Ахмес владеет как арифметическими, так и геометрическими прогрессиями. В задаче 40 требуется разделить 100 караваев хлеба в арифметической прогрессии на 5 работников, с тем, чтобы $\frac{1}{7}$ суммы трёх наибольших долей равнялась сумме двух наименьших.

Решение Ахмеса (в современных терминах) таково: если первый член прогрессии 1, а разность $5\frac{1}{2}$, то доли работников – 23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1, условие выполнено, а в сумме 60. Остаётся умножить каждое из чисел на $1\frac{2}{3}$ и получить такие доли: $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$ и разность прогрессии $9\frac{1}{6}$.



Следуя автору книги о египетском образовании Гельмуту Бруннеру, заметим, что эта задача вряд ли возникла из нужд практики: как бы ни были далеки египтяне от коммунизма, трудно представить себе реальную рабочую бригаду, в которой один работник получает $38\frac{1}{3}$ хлебов, а другой – $1\frac{2}{3}$.

КВАДРАТУРА КРУГА

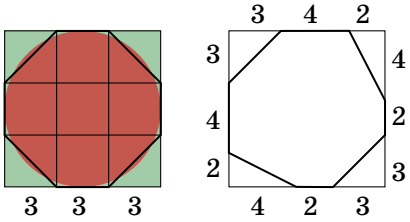
Дальше Ахмес переходит к задачам на вычисление объёмов, и читателя сразу встречает удивительное открытие. Находя объём хлебного амбара цилиндрической формы, Ахмес вычисляет площадь круга. Метод Ахмеса: возьми диаметр, вычти $\frac{1}{9}$ его часть, полученное число умножь само на себя – вот площадь круга. В современных терминах[5], Ахмес использует приближение $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

В десятичной записи приближение Ахмеса даёт $\pi = 3{,}16\ldots$ – то есть ошибку меньше шести промилле! Но как пришёл Ахмес к своему замечательному приближению? Обратимся к чертежу в задаче 48. Каким 8-угольником приближает круг Ахмес? Историки математики Фогель и Гиймо предложили каждый свою реконструкцию чертежа Ахмеса.

Задача 48 в папирусе Ахмеса

Упражнение 5. Найдите площади 8-угольников Фогеля и Гиймо.

Затем в папирусе идут задачи на пирамиды: даны основание и высота, найти наклон; обратно, по наклону и основанию найти высоту.



Интерпретации Фогеля (слева) и Гиймо (справа) чертежа Ахмеса

ВСЕМОГУЩАЯ МАТЕМАТИКА

Наконец, задачи с 61-й по 84-ю – виртуозный фейерверк самых разнообразных задач, которые научится решать тот, кто разберёт предыдущие. Ахмес будто говорит читателю: «Смотри, как всемогуща матема-

[5] Символ π, от греческого περιφέρεια, предложил Эйлер в Санкт-Петербурге.

тика!» Тебе нужно рассчитать рационы работников? Пожалуйста! Стоимость сумки с драгоценными металлами? Пожалуйста! Рассчитать, сколько нужно гекат муки, чтобы накормить быков? Вот расчёт. Или требуется накормить птиц? Вот сколько съедает в день гусь, сколько утка, сколько голубь, сколько перепел: вот сколько гекат муки нужно смолоть для птиц. А вот задача 79: 7 домов, в них 49 кошек, 343 мыши, 2301 колос и 16807 гекат зерна. Сложи все эти числа!

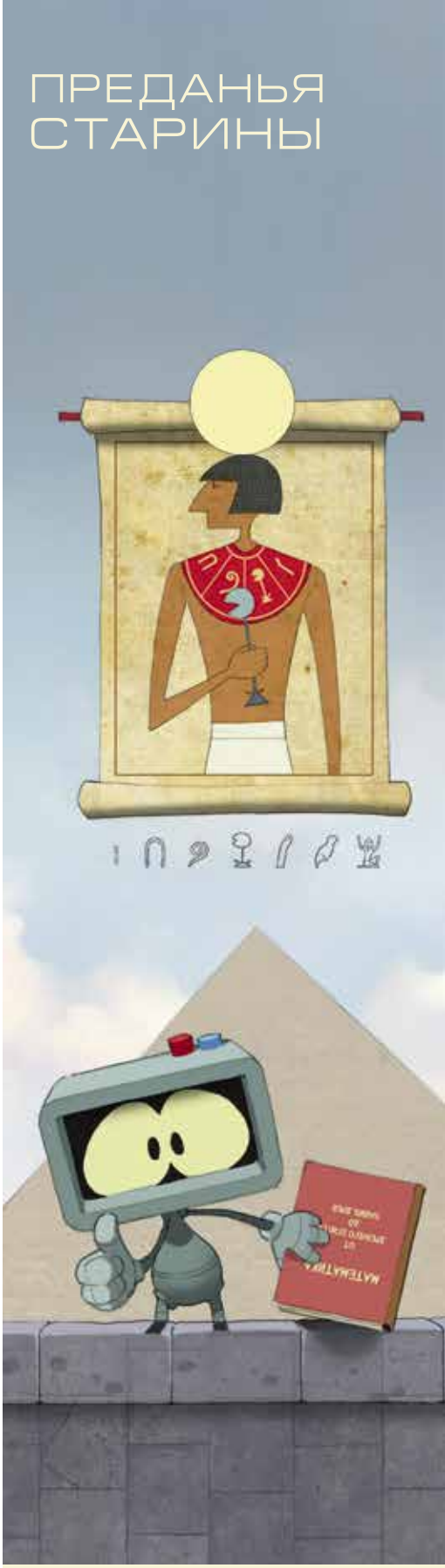
Упражнение 6. Какую ошибку допустил Ахмес в условии задачи 79? (Ответ, сумма геометрической прогрессии, найден им верно – найдите его и вы!).

Излагая решение некоторых задач, Ахмес использует слово, которое переводят как «проверка», «доказательство». Как понимает «доказательство» Ахмес? Если верно понял его я, то как «единство метода»: как процедуру, ведущую к правильному решению задачи, не только этой, конкретной, но и любой другой такого же типа – недаром в папирусе так много примеров, а тот, кто их проработает, будет готов к решению самых запутанных теоретических и практических задач.

Самое первое слово папируса Ахмеса попробуем приблизительно перевести «пример (причём смысл «мера» тоже включается), образец (понимаемый и как пример, и как эталон), руководство к расчётам» – где «расчёт» тут, как и по-русски, и прямой численный, и тот, что в стихе Твардовского «рассчитывать на святость их покоя». Может быть, именно так и понимали египтяне математику – и первое слово, таким образом, можно перевести как «математика» – математика по Ахмесу?

Задачи с неизвестными количествами, квадратура круга, суммирование геометрической прогрессии – как много сделано! Широта охвата, остроумие, общность математических конструкций – в мастерски построенном папирусе угадываю последовательную, многовековую работу многих математиков, решавших, один вслед другому, трудные, объёмные практические задачи – может быть, ещё со времён Древнего царства, – постепенным упорным трудом преобразовавших свой опыт в стройную систему. Папирус Ахмеса – сияющая вершина человеческого гения. Трепет охватывает меня. Кто ты, мой далёкий брат?

Окончание следует



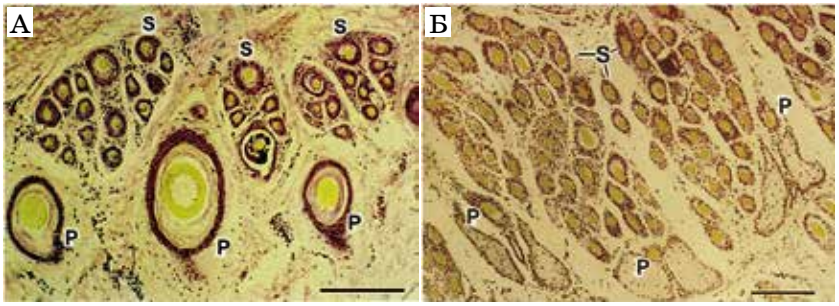
Художник Алексей Вайнер

Григорий Идельсон

ПРО ТОНКОРУННЫХ ОВЕЦ

Овцы и козы были одомашнены более или менее одновременно, примерно десять тысяч лет назад, судя по всему, на севере Месопотамии или на востоке нынешних Турции и Сирии. Вне всяких сомнений, они были приручены ради мяса и шкур, а не ради шерсти. Это ясно по очень простой причине: их шерсть не годится для производства одежды.

Дело в том, что шерсть диких муфлонов, как и у большинства других животных, состоит из двух типов волокон: волос и подшёрстка. Эти волокна значительно отличаются и длиной, и толщиной, и внутренним устройством. А для того, чтобы получалась хорошая шерсть, волосы должны быть одинакового малого диаметра и должны легко цепляться друг за друга (чтобы можно было их прясть).



Срез кожи дикого муфлона (А) и тонкорунных мериносов (Б) (из статьи *Jackson N.* и др., 2020 г.). У муфлонов диаметр первичных волокон, или волос (обозначеных на фотографии буквой P), в 4,5 раза больше, чем диаметр вторичных волокон, или подшёрстка (обозначенных на фотографии буквой S). У мериносов диаметр волокон подшёрстка (S) не отличается от диаметра волос (P). Кроме того, волокна значительно гуще, чем у муфлона.

Дикий муфлон, предок домашних овец

Фото: Susan E. Adams

Тонкорунные мериносы Фото: fir0002, commons.wikimedia.org

Иногда можно понять, насколько тонкошёрстными были овцы в древности, по археологическим памятникам или по древним изображениям.

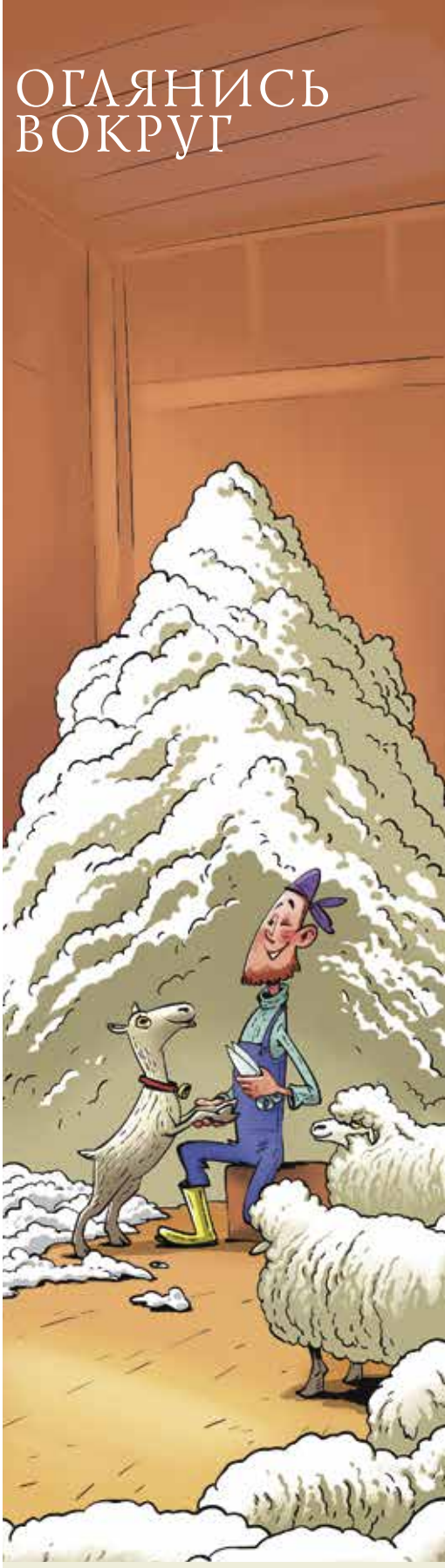
Вот этот бронзовый баран из Сиракуз (III век до н. э.), судя по растрёпанной шерсти, явно не тонкошёрстный

А вот у этого барашка на плечах у Гермеса (греческая статуя V в. до н. э.) шерсть более тонкая, хотя и не такая густая, как у мериносов

Новая порода тонкорунных овец – мериносы – появилась в Андалузии примерно в XII веке. Легенда связывает их название с берберской династией Бану Марин, или Маринидами, которые примерно тогда правили в Марокко, но генетики склонны считать, что их вывели в самой Испании.

Волокна мериносов не только тонкие – первичные волокна вообще не отличаются от вторичных. Кроме того, они намного гуще, чем у других пород овец.

Примерно к XIV веку Испания превратилась в крупнейшего производителя тонкой шерсти. Вывозить мериносов из страны запрещалось под страхом



смертной казни. Ещё до открытия Америки тонкая шерсть стала главным источником доходов королей.

Была создана специальная организация дворян-скотоводов под названием «Ме́ста», нечто вроде Ост-Индской компании или профсоюза знатных скотоводов. Представители «Месты» заседали в королевском совете.

Тогда считалось, что для хорошей тонкой шерсти нужно перегонять овец через всю страну: зимой они паслись в Андалузии, а летом их перегоняли на север Испании. Дороги, по которым их перегоняли, считались собственностью короны, их запрещено было распахивать или перегораживать. В некоторых местах в Испании их можно увидеть до сих пор.

Королевская дорога в Старой Кастилии

Фото: Luis Fernández García, commons.wikimedia.org

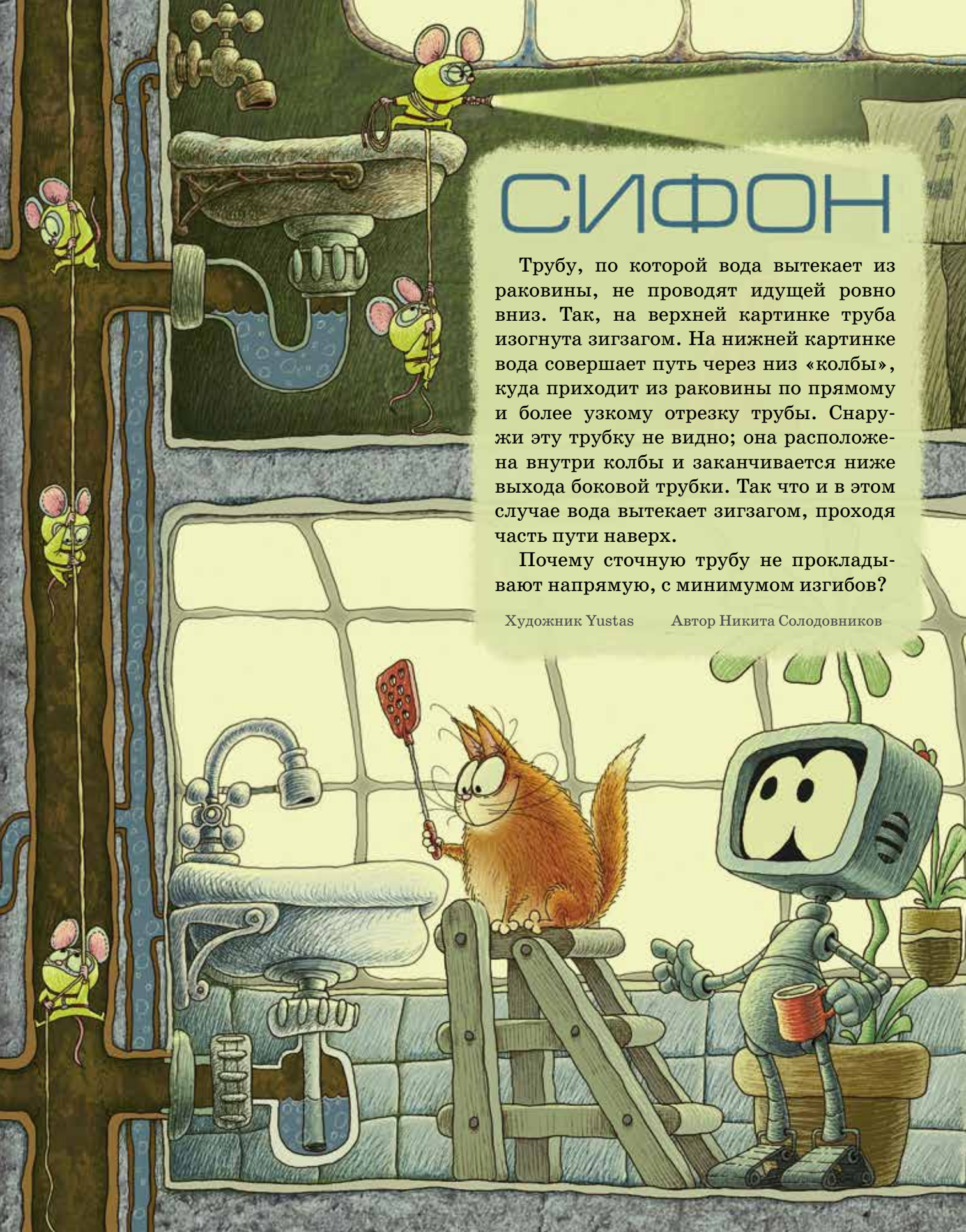
Если «Места» объявляла, что ей нужен какой-то участок земли, корона могла его конфисковать.

Испанцы только стригли шерсть – дальнейшую тонкую пряжу производили в других местах: во Флоренции, во Фландрии или в Англии. В шерстяную монополию вмешивалась большая политика.

К XVIII веку ценность испанской монополии сошла на нет. Сначала корона продала мериносов Швеции, а оттуда они быстро распространились по всей Европе и Америке. За границей оказалось, что перегонять овец вовсе не обязательно, шерсть и так получается тонкая.

К XIX веку «Места» ещё сохранилась и прочно ассоциировалась со средневековьем. Под давлением либералов она была упразднена только в 1836 году.

Художник Мария Усеинова



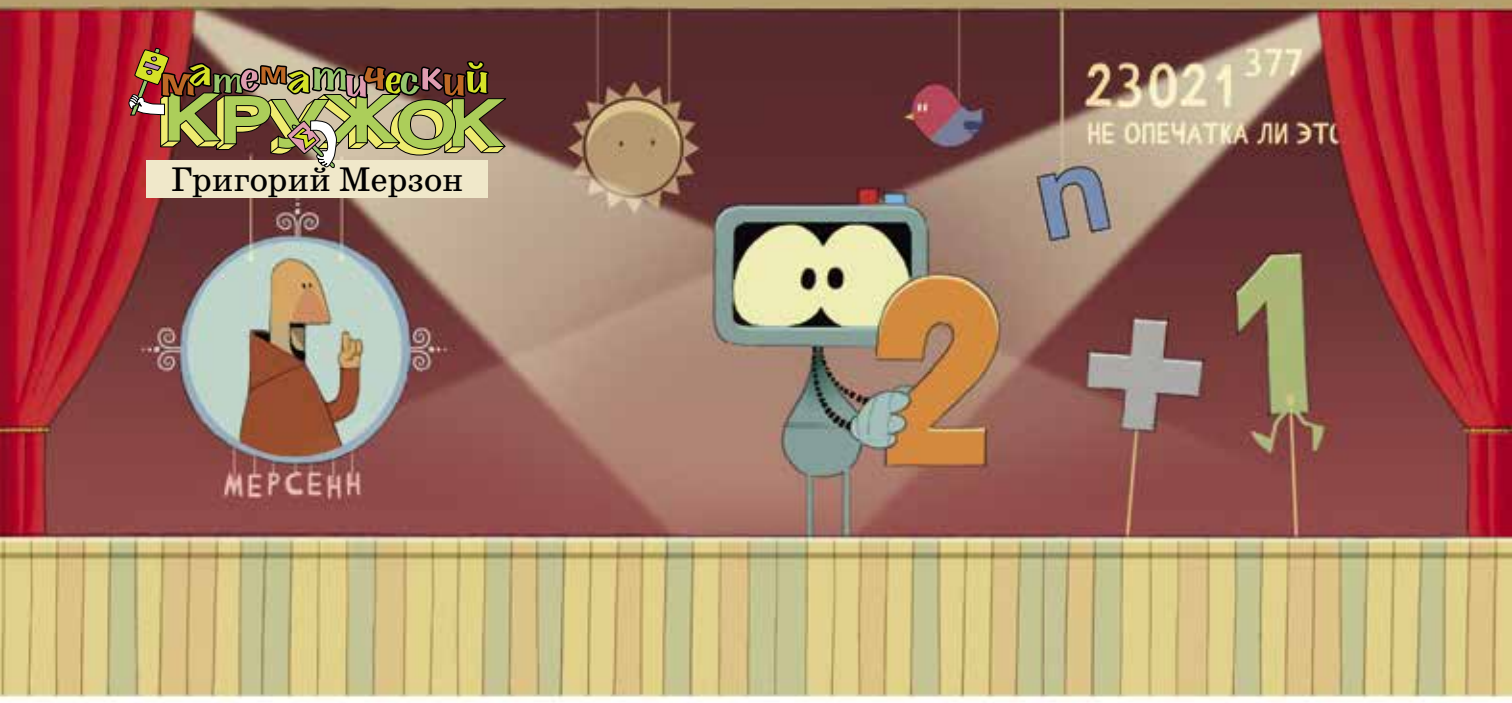
СИФОН

Трубу, по которой вода вытекает из раковины, не проводят идущей ровно вниз. Так, на верхней картинке труба изогнута зигзагом. На нижней картинке вода совершает путь через низ «колбы», куда приходит из раковины по прямому и более узкому отрезку трубы. Снаружи эту трубку не видно; она расположена внутри колбы и заканчивается ниже выхода боковой трубки. Так что и в этом случае вода вытекает зигзагом, проходя часть пути наверх.

Почему сточную трубу не прокладывают напрямую, с минимумом изгибов?

Художник Yustas Автор Никита Солодовников

Григорий Мерзон



ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕННА

На XII Математическом празднике в 2001 году предлагалась такая задача Сергея Маркелова:

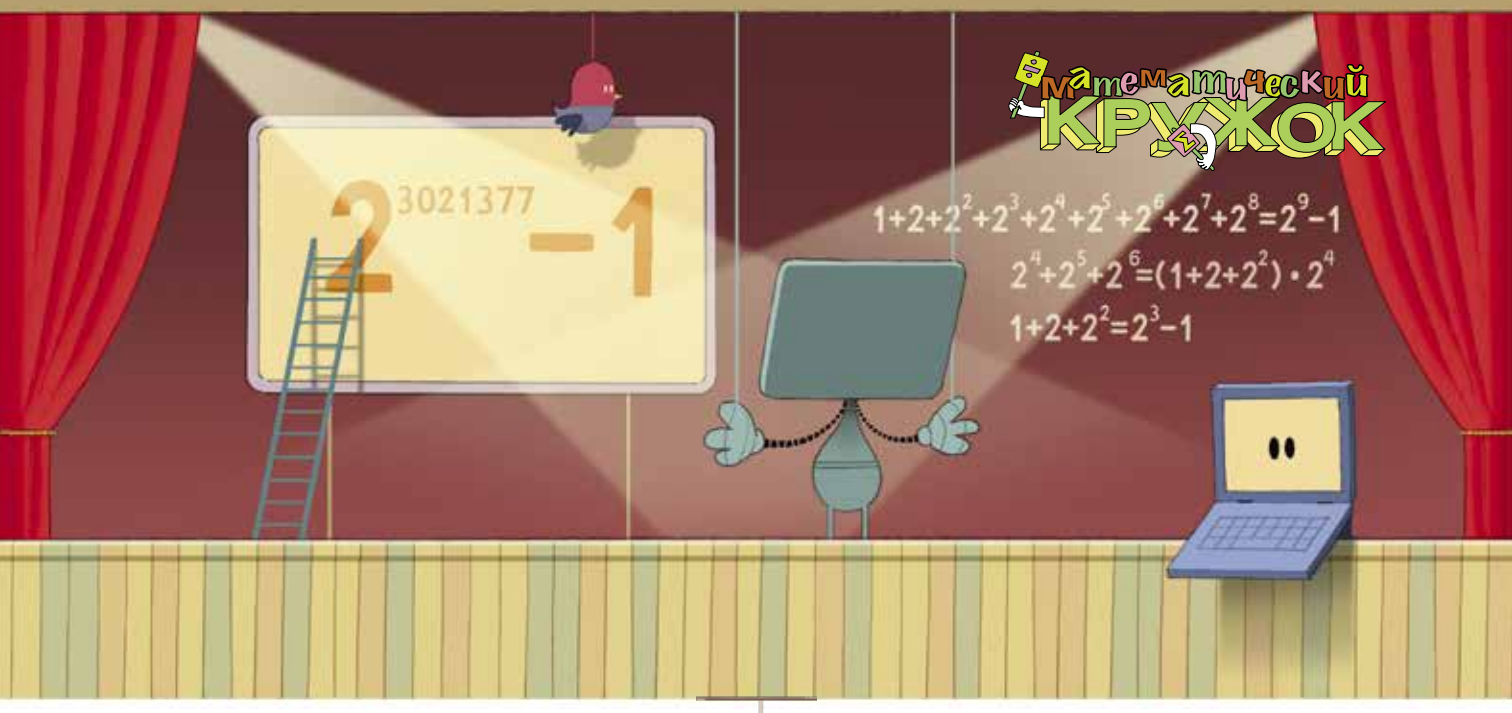
В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. *Не опечатка ли это?*

Чтобы решить задачу, достаточно заметить, что это число чётное... и даже оканчивается на 0 (то есть делится и на 10). Так что простым оно быть не может.

А как на самом деле выглядят самые большие[1] известные нам простые числа? Оказывается, большинство из них имеют вид «два в какой-то степени минус один». В частности, число

Французский монах Марен Мерсенн (1588–1648) занимался не только философией и богословием, но и физикой, математикой, теорией музыки. Но, возможно, самая важная его роль – это роль организатора научного общения. Научных журналов тогда ещё не существовало, вместо этого учёные обменивались письмами. Мерсенн был одним из центров этой переписки. Среди его регулярных корреспондентов и гостей – Галилей, Гюйгенс, Декарт, Б. Паскаль, Э. Паскаль, Роберваль, Торричелли, Ферма... можно сказать, целая неформальная «Парижская академия наук» (официально Академия наук появилась во Франции во второй половине XVII века, тогда же появились первые научные журналы).

[1] Вопрос может показаться странным – ведь уже Евклид приводит доказательство того, что простых чисел бесконечно много. Но одно дело знать, что их в принципе бесконечно много, а другое дело – найти конкретные примеры больших простых чисел!



$2^{127}-1$ было самым большим известным простым числом с 1876 года аж до середины XX века (когда для поиска начали использовать компьютеры), а в 1998 году самым большим известным простым числом было число $2^{3021377}-1$ (с ним и связана задача выше). Такие простые числа называют *простыми числами Мерсенна* в честь Марена Мерсенна, который изучал их в XVII веке.

Числа вида 2^n-1 – это суммы степеней двойки. Например,

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8=2^9-1.$$

(Если не сразу понятно, почему это так – прибавьте к левой части единицу! Первое слагаемое превратится в 2, вместе со вторым слагаемым это даст $2\cdot 2=2^2$, вместе со следующим $2\cdot 2^2=2^3$... В итоге получится удвоенное последнее слагаемое, $2\cdot 2^8=2^9$.)

Теперь можно (без всяких вычислений!) сообразить, что число 2^9-1 не простое. Ведь слагаемые в левой части равенства можно разбить на группы по три, и каждая группа делится на первую – например,

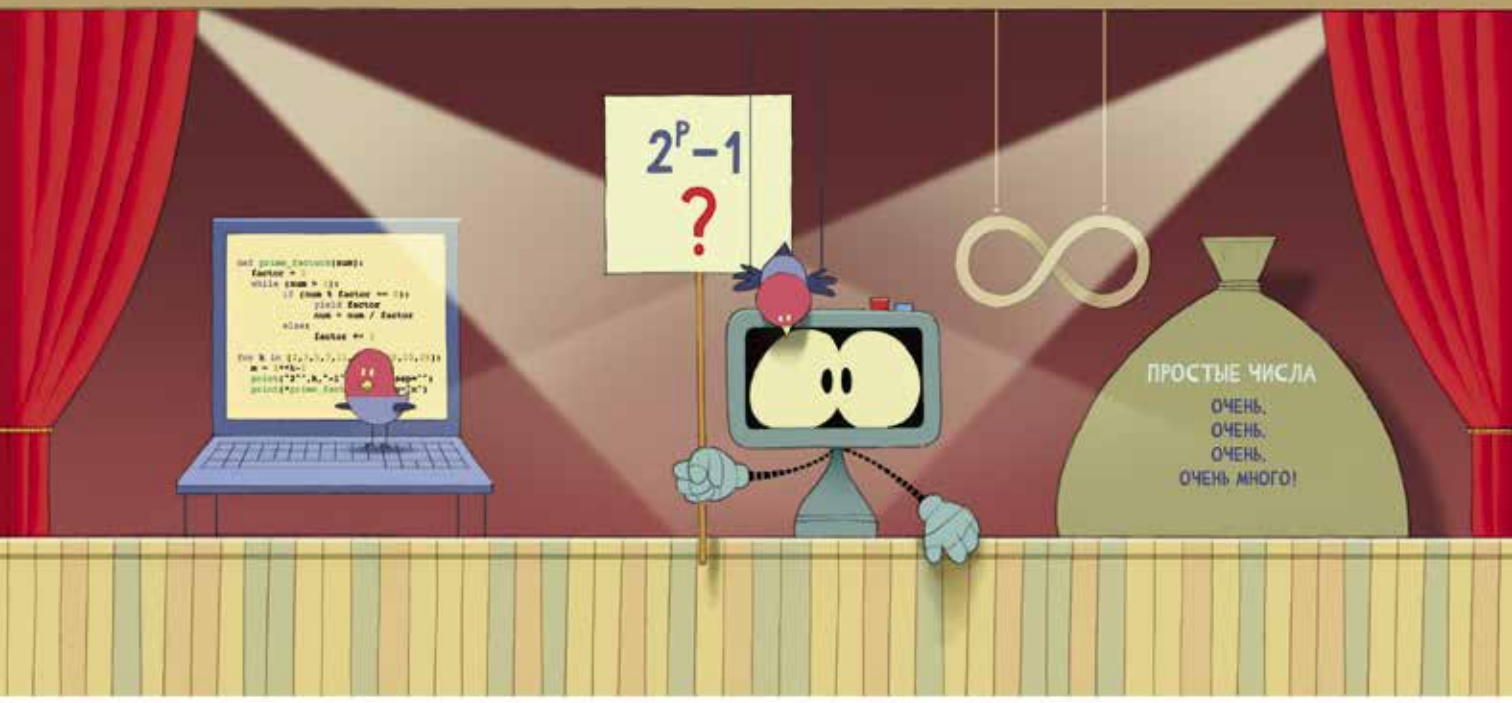
$$2^4+2^5+2^6=(1+2+2^2)\cdot 2^4.$$

То есть 2^9-1 делится на

$$1+2+2^2=2^3-1.$$

Точно так же можно доказать, что если n делится на m, то 2^n-1 делится на 2^m-1.

Итак, если число n составное, то число 2^n-1 простым быть не может. А если число n простое? Начнём с эксперимента. Для $n=2$, 3, 5 действительно получаются простые числа... но хотелось бы изучить чуть больше примеров, а числа быстро становятся довольно большими – так что удобно воспользоваться небольшой программой.



Художник Алексей Вайнер

Например, на Питоне:

```
def prime_factors(num):
   factor = 2
   while (num > 1):
         if (num % factor == 0):
               yield factor
               num = num / factor
         else:
               factor += 1

for k in [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29]:
   m = 2**k-1
   print("2^",k,"-1",end="=",sep="")
   print(*prime_factors(m),sep="x")
```

Если запустить эту программу, то сразу видно, что число $2^{11}-1=23\cdot 89$ не является простым, как не являются простыми и числа $2^{23}-1$ и $2^{29}-1$.

Так что и числа вида 2^p-1 приходится проверять на простоту. Для этого есть специальные методы, но для чисел из миллионов цифр и они требуют много времени. Поэтому найденное в 2018 году простое число $2^{82\,589\,933}-1$ довольно долго оставалось самым большим известным простым. Но в октябре 2024 года этот рекорд был побит: теперь рекордсмен – это число $2^{136\,279\,841}-1$ из более чем 40 миллионов цифр. Уже известно полсотни простых чисел Мерсенна и мало кто сомневается, что их бесконечно много... – но всё же это не доказано.

Напомним, что число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от этого числа. Например, число 6 совершенное: $6=1+2+3$.

Задача. Пусть число 2^p-1 простое. Докажите, что число $2^{p-1}(2^p-1)$ совершенное.

Решение этой задачи можно найти уже у Евклида. А Эйлер доказал, что так получаются *все* чётные совершенные числа. Нечётных совершенных чисел, вероятно, не существует, но это до сих пор не доказано.

ВЕСЁЛЫЙ КУБИК

Квантик изобразил один и тот же кубик с трёх разных сторон. Что нарисовано на грани, на которой сидит птица? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Автор Георгий Караваев
Художник Татьяна Долгая

Сергей Полозков

ФОКУС С ДВУМЯ СКРЕПКАМИ

Для простой версии фокуса возьмите две большие канцелярские скрепки (длиной 50 мм, рис. 1) и полоску офисной бумаги 20×5 см.

Рис. 1

Вместо бумаги можно использовать кусок прозрачной плёнки такого же размера, вырезав её из прозрачной папки-конверта (рис. 2) или обложки для дневника. Бумагу для прочности можно проклеить скотчем. В статье для наглядности используется полоска из синей полупрозрачной пластиковой обложки А4 для переплётных работ.

Рис. 2

Сложите полоску втрое, чтобы средняя часть была 6 см, а боковые части – 7 см (с концов остаются хвосты по 1 см). Затем наденьте скрепки. Как сложить полоску и надеть скрепки, показано на рисунке 3. Скрепки надеваются снизу. Обе скрепки держат по два слоя: средний слой – своим длинным концом, а один из наружных слоёв – своим коротким концом. На рисунке 4 показан вид сверху.

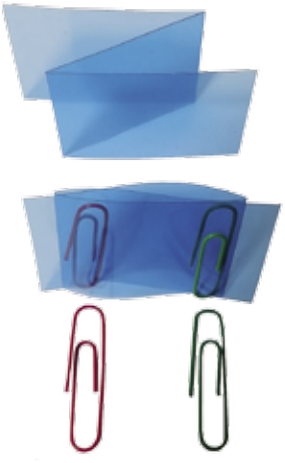


Рис. 3

Рис. 4

Взявшись за хвосты, потяните концы полоски в противоположные стороны.

Полоска раскроется, а скрепки полетят вниз, соединённые вместе. Если делать фокус медленно, вы поймёте, как скрепки соединяются.

Потренируйтесь и сделайте фокус более наглядным. Добавьте канцелярскую резинку диаметром 60 мм. Резинка находится между ближним и средним слоем над красной скрепкой (рис. 5). Положение скрепок и полоски такое же, как в простой версии фокуса.

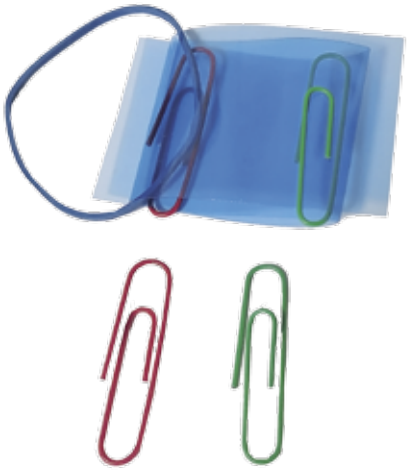


Рис. 5

Потяните хвосты полоски в стороны. Скрепки соединятся, повиснув на резинке (рис. 6). Важно крепко держаться за хвосты, чтобы резинка не упала.

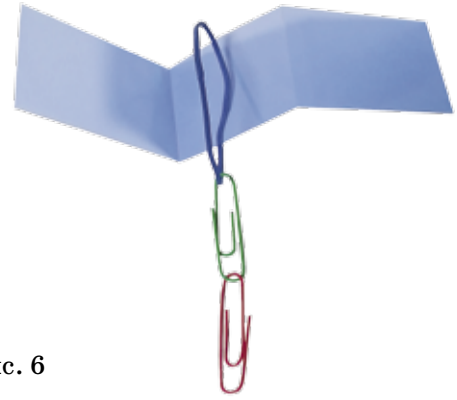


Рис. 6

Поэкспериментируйте с материалами полоски и размерами скрепок. Слишком плотная бумага (и плёнка) деформирует скрепки, а офисная бумага (не усиленная скотчем) часто рвётся. В книге «Фокусы и трюки. Большая иллюстрированная энциклопедия» (автор Марк Вильсон) в качестве полоски используется купюра в 1 доллар.

Художник Yustas Фото автора

КОНКУРСНЫЙ ЭКЗАМЕН (ПО М. ТВЕНУ)

Иногда на олимпиадах или конкурсах встречаются замечательные задачи, иногда школьники пишут к ним отличные решения. Но... бывает и иначе.

В своём романе «Янки из Коннектикута при дворе короля Артура» Марк Твен привёл прекрасный пример для составителей олимпиад – какие задачи лучше не давать, а если дали – что получили бы в ответ, если бы школьники не переживали за результаты. Хотите убедиться? Тогда прочитайте один из вопросов, который задал главный герой рыцарю, экзаменуя того на офицерский чин, и ответ рыцаря.

«– Если *A* уступил *B* бочонок луку ценою по два пенса за бушель в обмен на овцу ценою в четыре пенса и собаку ценою в один пенни, а *C* убил собаку, прежде чем она была доставлена покупателю, ибо она укусила его, приняв за *D*, какую сумму *B* должен *A*? и кто обязан оплатить стоимость собаки – *C* или *D*? и кому должны достаться эти деньги? и если деньги эти должны достаться *A*, то должен ли он удовольствоваться одним пенни, составляющим стоимость собаки, или имеет право потребовать дополнительного возмещения за тот доход, который могла бы принести ему собака, став его собственностью?

– Поистине, премудрое и неисповедимое божественное провидение, таинственно управляющее миром, никогда не стало бы предлагать человеку подобных вопросов, единственная цель которых – сбить с толку и помутить сознание. А потому я прошу вас предоставить собаке, луку и этим людям со странными языческими именами выпутываться из своих удивительных и жалости достойных затруднений самим, без моей помощи, ибо, если бы я попытался им помочь, я только ещё больше запутал бы все дело и, возможно, не пережил бы и сам того отчаянья, в которое они были бы повергнуты».

Художник Артём Костюкевич

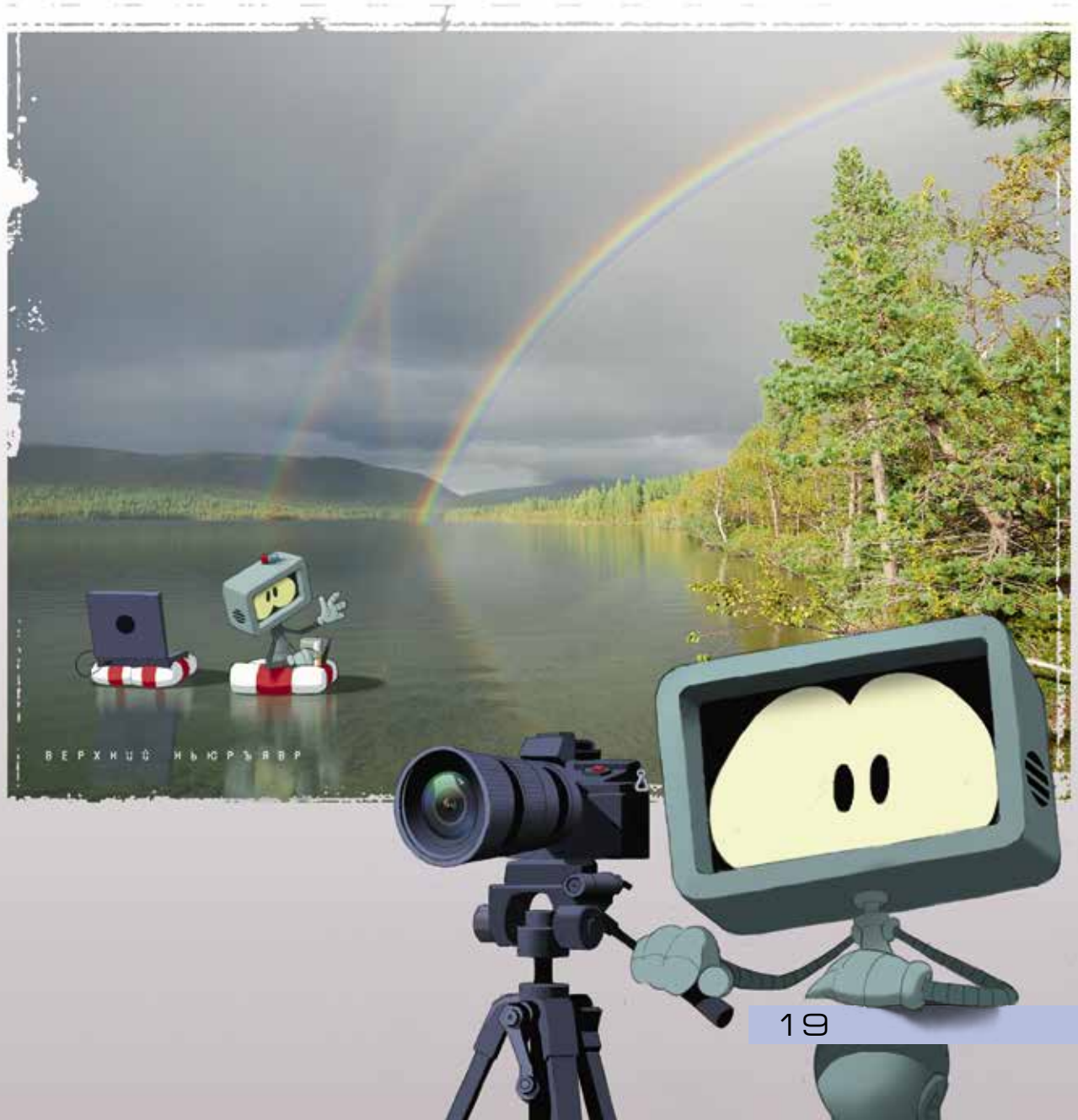
ЛИШНЯЯ РАДУГА

На этой фотографии, сделанной на озере Верхний Ньюръявр в Хибинах, очень хорошо видны все характерные признаки радуги.

А именно, видна первая радуга; видна вторая радуга с обратным расположением цветов, она большего размера, чем первая. Видна полоса Александра – тёмная область неба между двумя радугами. Видны также зеленовато-розоватые полосы на внутренней стороне первой радуги. Эти явления хорошо известны и описаны в многочисленной литературе про радугу.

Подумайте, как можно объяснить наличие ещё одной радуги, которая пересекает обе первые и тёмную полосу между ними.

Автор Никита Панюнин



Художник Алексей Вайнер Фото автора

Риад Ханмагомедов

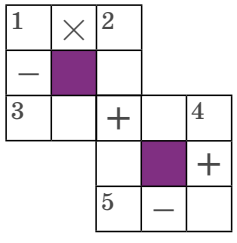
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРОССВОРДЫ

Наверняка вы уже сталкивались с классическими кроссвордами. Разгаданные слова там вписывают по горизонталям слева направо и вертикалям сверху вниз. Но играть можно не только словами. Как шеф-редактор газеты «777» и ведущий рубрик в нескольких изданиях отмечу, что числовые кроссворды тоже довольно распространены. В них решателям предлагается заполнить сетку числами, приведёнными вперемешку. А вот математические кроссворды встречаются намного реже.

Два из шести математических кроссвордов, которые вы видите, я предложил участникам IV Открытого турнира ДТДМ «Неоткрытые острова» по решению головоломок.

Правила математического кроссворда. Заполните белые клетки цифрами из диапазона от 1 до 9. В каждом арифметическом выражении в сетке все цифры должны быть различны. Результаты выражений по горизонтали и вертикали приведены ниже.

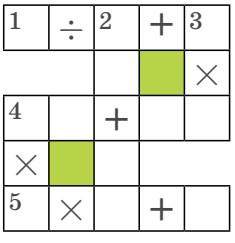
1.



По горизонтали:
1. 42
3. 57
5. 3

По вертикали:
1. 5
2. 172
4. 3

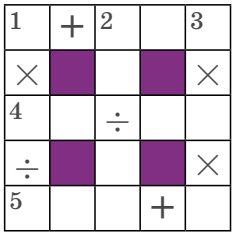
2.



По горизонтали:
1. 12
4. 127
5. 32

По вертикали:
2. 43
3. 56
4. 18

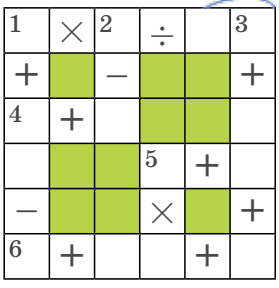
3.



По горизонтали:
1. 278
4. 3
5. 274

По вертикали:
1. 10
2. 2
3. 18

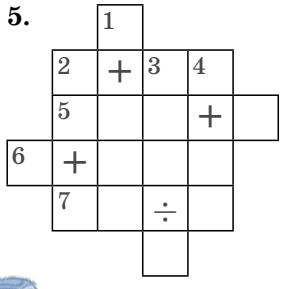
4.



По горизонтали:
1. 1
4. 3
5. 13
6. 20

По вертикали:
1. 18
2. 1
3. 70
5. 8

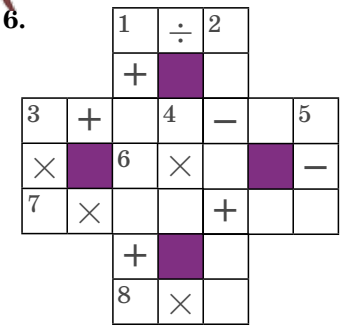
5.



По горизонтали:
2. 103
5. 857
6. 728
7. 32

По вертикали:
1. 579
2. 87
3. 228
4. 59

6.



По горизонтали:
1. 5
3. 91
6. 27
7. 273
8. 16

По вертикали:
1. 950
2. 40
3. 24
4. 20
5. 1

Художник Анна Рацкевич

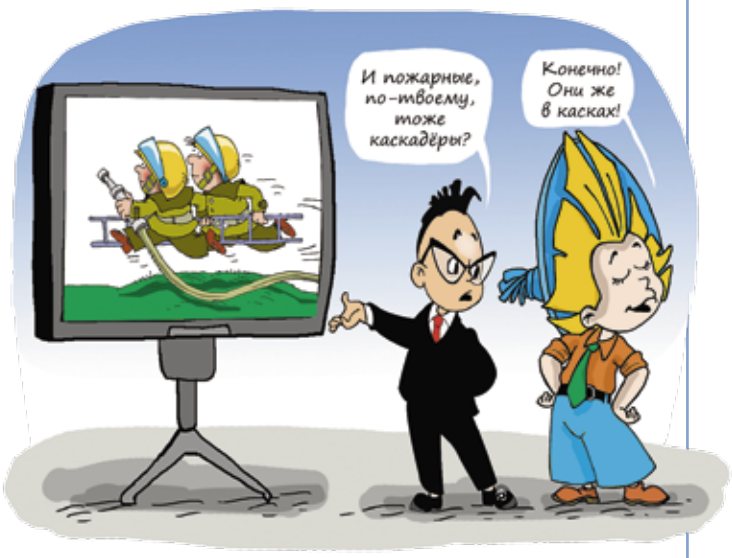
КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Приглашаем всех желающих принять участие в конкурсе по русскому языку. Он состоит из 6 туров; задания будут опубликованы в №№ 1, 3, 5, 7, 9 и 11. Победителей ждут призы. Для победы вовсе не обязательно решить всё – присылайте то, что получится. За лучшее решение отдельных туров предусмотрены специальные премии. Желаем успеха!

Решения I тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 февраля.** Не забудьте указать в письме ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь.

Предлагайте задачи собственного сочинения: лучшие будут опубликованы. Так, автор задачи № 2 – семиклассница Софья Гамаюнова.

I ТУР



1. – Знаешь, Знайка, кто такие каскадёры? Это люди, которые со всех сдирают каски!

– Дурень ты, Незнайка! – отмахнулся Знайка. – Каскадёры – это люди, которые на съёмках фильмов всякие сложные трюки исполняют.

– Сам ты дурень, да ещё и зануда! – обиделся Незнайка. – Совсем шуток не понимаешь.

– Шутить тоже надо уметь! – стоял на своём Знайка. – Если бы слово «каскадёры» означало то, что ты говоришь, …

Закончите мысль Знайки.

В. Н. Авраменко, И. Б. Иткин

2. В существительном X чётное число букв. Буква, стоящая на первом месте, встречается в нём n раз, буква, стоящая на втором месте, $n-1$ раз и так далее, пока буквы не начнут повторяться. Найдите X.

С. А. Гамаюнова

3. Чтобы часы тебя не НАДУВАЛИ, их иногда бывает нужно НАДУВАТЬ. Какой глагол мы заменили на НАДУВАТЬ?

Я. С. Елисеева,
М. А. Ушаков,
В. М. Ушакова

4. Если этот коротенький глагол в повелительном наклонении произнести задом наперёд, получится другой глагол в повелительном наклонении. Напишите оба глагола.

С. И. Переверзева

5. В одном научном сочинении для некоторого знака предлагается использовать название «плинус». Нарисуйте этот знак.

А. Ч. Пиперски

Художник Николай Крутиков

XLVI ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

6 и 20 октября 2024 года состоялся осенний тур XLVI Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [4]. Дан описанный пятиугольник $ABCDE$. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC. Докажите, что $AB+BC>CD+DE+EA$.

Егор Бакаев

2 [4]. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, …, чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?

Егор Бакаев

3 [4]. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N кратно M. Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N.

Александр Грибалко

4 [5]. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?

Александр Шаповалов

5 [5]. Набор состоит из одинаковых трёхклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?

Александр Грибалко

Сложный вариант

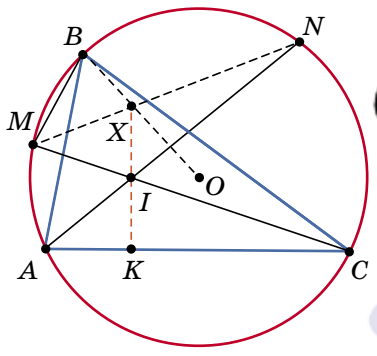
1 [4]. Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?

Максим Дидин

2 [6]. Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога – это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

Александр Перепечко

3 [7]. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и BO пересекаются в точке X. Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.



Фёдор Ивлев

4. У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось – округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,

а) [5] если мешков всего 8;

б) [3] если мешков всего 9?

Алексей Глебов

5 [8]. На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого – пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.

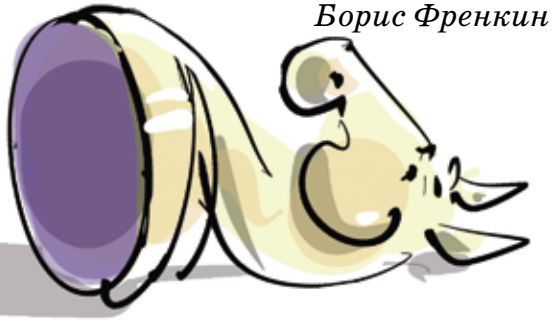
Егор Бакаев

6 [10]. Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, *горизонтальными*, а остальные – *вертикальными*. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

Александр Грибалко

7 [10]. Даны две строго возрастающие бесконечные последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?

Борис Френкин



Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, VI тур («Квантик» № 11, 2024)

26. *Хулиган Вовочка в кои-то веки сделал домашнее задание по русскому языку и попросил маму его проверить. Дойдя до словосочетания «_____ лица», мама остановилась:*

– Вовочка, здесь ошибка!

– Но почему?! – изумился мальчик. – Проверочное слово – «___», синоним к слову «лицо»!

Мама не выдержала и расхохоталась.

Заполните пропуски.

Какой синоним к слову *лицо* первым пришёл в голову хулигану Вовочке? Разумеется, ***рожа***. Вот Вовочка и «проверил» им безударный гласный в слове *выр_жение*, у него получилось ***выражение*** *лица*. Проверил бы лучше словом *безобразничать*: оно как раз того же корня, что слово *выражение*, и для проверки подходит.

27.

аадЗч

Ккнорсу

авИкорфШ

Всё понятно? Тогда прочитайте:

аекст

клноу

В начале всё и правда понятно: загаданы слова *задача*, *конкурс* и *шифровка*. Но хитрость в том, что из букв *а*, *е*, *к*, *с*, *т* и *к*, *л*, *н*, *о*, *у* можно составить по несколько слов: *секта*, *сетка*, *тесак*…; *клоун*, *колун*, *кулон*… С помощью первых трёх слов устанавливаем принцип: читать буквы нужно от самой большой по размеру к самой маленькой. Получаются слова ***аскет*** и ***уклон***.

28. *Скорее всего, ОНА получила своё название за способность стремительно менять форму поверхности, в том числе выгибаться вверх. Назовите ЕЁ.*

Попробуем понять, от какого корня образовано искомое слово. Если поверхность выдаётся над горизонтальной плоскостью, она называется *выпуклой*. *Выпучить* глаза – это словно бы выдвинуть их вперёд, навстречу чему-то удивительному. Весной, прежде чем окончательно расколоться, лёд на реке трескается и *вспучивается*, образуя небольшие холмики. До правильного ответа остался один шаг: ОНА – это ***пучина***, глубокая толща воды. Слово *пучина* родственно всем приведённым словам и действительно указывает на способность воды стремительно выгибаться вверх, то есть идти волнами.

29. *Этими мини-версиями не копают и не черпают: две из них расположены сзади, а одна – спереди. Назовите эти мини-версии.*

Эти мини-версии – ***лопатки*** (буквально «маленькие лопаты»), две симметричные треугольные кости в верхней части спины, и ***ложечка*** (буквально «маленькая ложка»), впадина под рёбрами. Этими лопатками и этой ложечкой уж точно не копают и не черпают.

30. *– Как всё сложно, – вздохнула Настя. – Вроде бы слово X_2 получается, если добавить приставку к слову X_1. Но разве они связаны между собой? Слово X_2 означает «судьба», а слово X_1 – совсем другое…*

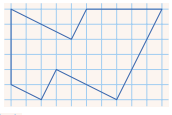
– Конечно, связаны, – отозвалась отличница Маша. – Вот, например, слово Y может быть синонимом и к слову X_1, и к слову X_2.

Какие слова мы заменили на X_1, X_2 и Y?

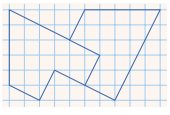
X_1 – это ***часть***, X_2 – ***участь***, Y – ***доля***. Нетрудно убедиться, что слово *доля* может быть синонимом как к слову *часть* (*Каждый получил свою долю пирога*), так и к слову *участь* (*Плохая им досталась доля*, – вздыхает старый солдат о своих товарищах в знаменитом стихотворении М. Ю. Лермонтова «Бородино»). Ответ *удел* подходит к условию задачи существенно хуже: хотя в некоторых словарях *удел* объясняется как «часть территории, находившаяся во владении одного князя», назвать это слово синонимом слова *часть*, конечно, нельзя.

НАШ КОНКУРС, III тур («Квантик» № 11, 2024)

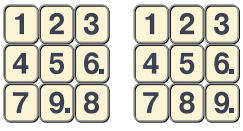
11. *Разрежьте фигуру на рисунке на 2 равные (и по форме, и по размеру) части.*



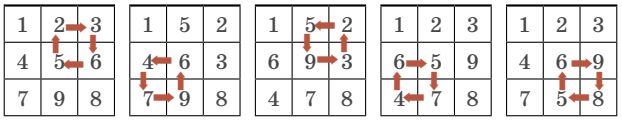
Ответ: см. рисунок.



12. *Квадрат 3×3 сложен из квадратных фишек 1×1, пронумерованных числами от 1 до 9. Изначально фишки лежат так, как на рисунке слева. Любые четыре фишки, образующие квадрат 2×2, можно поворачивать вокруг его центра на угол, кратный 90°. Можно ли с помощью нескольких таких поворотов получить расположение, в котором фишки расположены так, как на рисунке справа?*



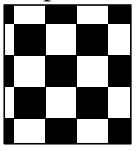
Ответ: да, см. рисунок.



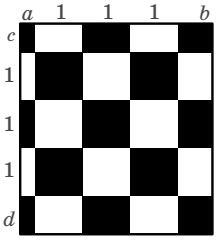
13. *Квадраты последовательных натуральных чисел* 13 *и* 14 *записываются одними и теми же цифрами, но в разном порядке:* 169 *и* 196. *Существуют ли три последовательных натуральных числа, обладающих тем же свойством?*

Ответ: нет. Ровно одно из трёх последовательных чисел кратно 3, значит, среди их квадратов ровно один кратен 3. Тогда и сумма цифр лишь у одного квадрата кратна 3. Но квадраты записаны одними и теми же цифрами, значит, сумма цифр у них одинакова – противоречие.

14. *Из клетчатой скатерти со стороной клетки* 1 *вырезали прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам клеток, как на рисунке. Суммарная площадь белой части прямоугольника равна* 10. *Найдите его периметр.*



Ответ: 18. Обозначим стороны неполных клеток как a, b, c, d (см. рисунок). Периметр прямоугольника равен $2\cdot(a+3+b+c+3+d)=2a+2b+2c+2d+12$. А белая площадь, равная 10, составлена из прямоугольников $1\times a$, $1\times b$, $1\times c$, $1\times d$, взятых по два раза, и четырёх клеток 1×1, то есть равна $2a+2b+2c+2d+4$. Значит, периметр на 8 больше и равен $10+8$.



15. *Миша смотрел «Что? Где? Когда?» и выписывал счёт, начиная с* 0:0 *и до конца игры (в каждом раунде разыгрывается одно очко; игра заканчивается, когда зрители или знатоки наберут 6 очков). Если у зрителей было больше очков, Миша делал запись синей ручкой, если очков было больше у знатоков – красной ручкой, а если была ничья – зелёной. Могло ли оказаться, что красных, синих и зелёных записей было поровну?*

Ответ: да. Так как записей трёх цветов поровну, их общее количество кратно 3. Но записей на одну больше, чем было раундов. Значит, одна из команд победила со счётом 6:2 или 6:5. В первом случае проигравшая команда может лидировать не более двух раз, а нужно $(6+2+1):3=3$ раза. Второй случай возможен: 0:0, 0:1, 0:2, 1:2, 2:2, 2:3, 3:3, 4:3, 5:3, 5:4, 5:5, 6:5.

ТЕПЛО И ХОЛОД («Квантик» № 12, 2024)

1. Ночи в пустыне холодные, в океане значительно теплее! У песка теплоёмкость (способность сохранять, накапливать тепло) намного меньше, чем у воды. А способность передавать тепло (теплопроводность) заметно ниже, в том числе из-за неплотного прилегания песчинок друг к другу; к тому же в океане тепло передаётся не за счёт теплопроводности, а за счёт гораздо более быстрых механизмов, связанных с движением воды (конвекция и перемешивание из-за течений). Поэтому за день вода прогревается на бóльшую глубину, а в песке нагревается, хоть и очень сильно, лишь тонкий слой. Из-за низкой теплопроводности он «запасает» мало энергии и ночью быстро остывает.

2. В отсутствие сильного «крупномасштабного» ветра, больших циклонов и т. п., ветер дует оттуда, где холоднее, туда, где теплее. Нагревающийся воздух менее плотный, значит – «более лёгкий». Он поднимается вверх, и его место внизу заполняет более плотный холодный воздух. Наверху, где нагретый воздух остывает, движение происходит в обратную сторону, так что воздух «циркулирует» над границей море-суша, движется по кругу. Утром суша нагревается быстрее, чем море, и до вечера остаётся теплее; вечером же она быстрее остывает. Поэтому днём бриз дует с прохладного моря на нагретый берег, а ночью – наоборот.

3. Причина – насыщение воздуха водяным паром, точнее – зависимость плотности насыщенного пара от температуры. В замкнутом объёме (закрытой крышкой посуде или салоне машины) водяного пара помещается ограниченное количество. Причём тёплого пара в тот же объём «влезает» намного больше, чем холодного. Если насыщенный паром воздух остывает, то «лишний» пар превращается в воду. Стёкла запотевают, когда снаружи холодно, а внутри влажно. Обычно это происходит зимой, когда стёкла машины холодные, а люди внутри своим дыханием сильно повышают влажность воздуха. Контактируя со стеклом, воздух остывает, содержащийся в нём пар «перестаёт в него помещаться», сконденсировавшаяся вода остаётся на стёклах. Чтобы этого не было, можно включить печку и направить поток тё-

плого воздуха на лобовое стекло. А на заднем стекле для обогрева обычно натянуты специальные проволочки-нагреватели (см. фото).

Чтобы предотвратить или хотя бы уменьшить замерзание стекла во время стоянки, можно после поездки, выходя из нагретого автомобиля, проветрить его и протереть насухо стекло, пока оно тёплое и не заледенело.

4. Сухая земля плохо проводит тепло. Поэтому осенью, во время первых холодов, остывает лишь верхний слой почвы, а под ним температура остаётся заметно выше нуля. Снизу идёт поток тепла, он растапливает выпавший снег. Если же почва «пролита» дождями, теплопроводность её возрастает, и тепло быстрее уходит из глубоких слоёв; земля остывает равномернее.

ИЗБА БЕЗ ТРУБЫ («Квантик» № 12, 2024)

Если из трубы выходит горячий дым – он уносит тепло. Так что в «чёрной» избе при прочих равных теплее. Особенно существенно это на Севере, где зимой сильные морозы.

АХМЕС

1. *Указание.* Попробуйте вычесть как можно бóльшую аликвотную дробь.

3. *Указание.* Попробуйте вычесть как можно бóльшую аликвотную дробь из данного рационального числа. Каков числитель разности? Заметьте также, что $\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$.

ЧИСЛА МЕРСЕННА

Если число $M=2^p-1$ простое, то все делители числа $2^{p-1}M$ – это $1, 2, \ldots, 2^{p-1}$ и $M, 2M, \ldots, 2^{p-1}M$. Сумма этих степеней двойки, как обсуждалось в статье, равна 2^p-1, то есть M. А сумма $M+(M+2M+\ldots+2^{p-2}M)$ как раз равна $2^{p-1}M$.

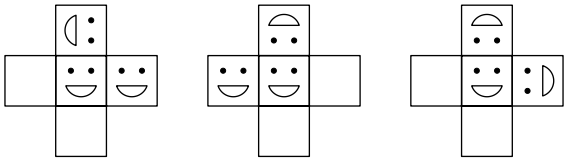
СИФОН

Сточная труба соединяет раковину с канализацией. Грязный воздух из канализации мог бы свободно подниматься по трубе в жилище. Но в нижней части сифона (так называют изогнутую трубу) образуется водяной затор, который препятствует движению воздуха — из-за него воздух в доме остаётся чистым. Вторая функция сифона: он помогает не засорять сточную трубу, задерживает мелкий мусор, попадающий в трубу из раковины. Колба позволяет легко убирать засоры, достаточно открутить её нижнюю часть.

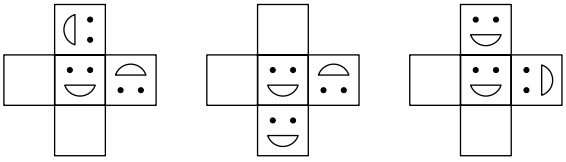
ВЕСЁЛЫЙ КУБИК

Заметим, что у кубика 6 граней, на хотя бы одной из которых рисунок отличается (она запечатлена на правой картинке). Значит, на первых двух картинках хоть одна грань – общая.

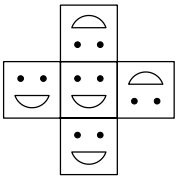
Для левой, правой и верхней граней кубика с первой картинки нарисуем часть развёртки, содержащую эту грань и все, прилегающие по стороне. Грани, которые на этой картинке не видно, оставим пустыми.



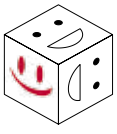
Сделаем то же самое для второй картинки.



Раз одна из граней на двух картинках общая, её развертки должны наложиться без пересечений. Легко проверить, что единственная подходящая пара таких развёрток – вторая из первого набора и вторая из второго, а значит, на 5 гранях кубика рисунок одинаковый. Наложим эти развёртки друг на друга, чтобы получить развёртку кубика без грани с другим рисунком.



Теперь видно, что правой гранью на третьей картинке может быть либо верхняя, либо нижняя грань развёртки. Вне зависимости от того, какая из них окажется на третьей картинке правой, рисунок на верхней грани будет повёрнут одним и тем же образом, как показано справа.

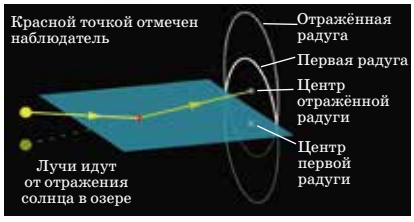


ЛИШНЯЯ РАДУГА

Чтобы лучше понимать, что происходит, советуем вспомнить, как образуется радуга, прочитав статью Л. Свистова «Фотография радуги» в «Квантике» № 11 за 2021 год.

Можно заметить, что «лишняя» радуга как будто продолжает отражение первой радуги, видимое на поверхности озера (см. рисунок), или будто является отражением «подводной» части первой радуги. Логично тогда, что первая и «лишняя» радуги создаются источниками света, тоже симметричны-

ми относительно поверхности озера. А раз первая радуга создаётся солнцем, «лишняя», значит, создаётся отражением солнца в воде, как на схеме.



При желании можно разглядеть и отражённую радугу, получающуюся таким же образом из второй, если знать, что она продолжает вверх отражение второй радуги, и обращать внимание не столько на яркость, сколько на оттенки.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРОССВОРДЫ

1.

16	×	27		
−		8		
31	5	+	4	42
		9		+
		54	−	1

2.

15	÷	21	+	37
		4		×
46	9	+	5	8
×		2		
53	×	9	+	5

3.

15	+	22	7	33
×		6		×
44	8	÷	1	6
÷		1		×
52	7	3	+	1

4.

16	×	23	÷	1		38
+		−				+
41	+	2				5
7				54	+	9
−				×		+
65	+	1	2	+		3

5.

		13			
	27	+	39	46	
	58	5	1	+	6
63	+	7	2	5	
	79	6	÷	3	
			4		

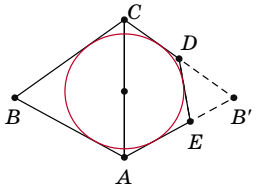
6.

		15	÷	21		
		+		7		
38	+	9	45	−	1	52
×		63	×	9		−
73	×	7	4	+	5	1
		+		3		
		88	×	2		

XLVI ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

1. При симметрии относительно диаметра AC касательные AB и CB перейдут в касательные AE и CD соответственно, поэтому лучи AE и CD пересекутся в точке B', симметричной B. Тогда $AB + BC = AB' + B'C$, и требуемое неравенство принимает вид



$$AB' + B'C > CD + DE + EA.$$

Вычитая из обеих частей $AE + CD$, сводим его к $EB' + B'D > DE$, а это неравенство треугольника!

2. Ответ: нет. Назовём *блоком* наибольшую группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. Сначала все блоки нечётны (длины 1). Тогда и далее они всегда нечётны: операция «склеивает» три нечётных блока в один! Поэтому никогда не появятся два чётных блока.

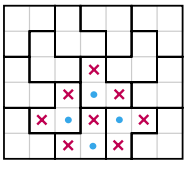
Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба надо перекрасить. Один из них перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией перекрашивается какой-то блок целиком). Значит, сделать их чёрным и белым нельзя.

3. *Решение 1.* Если N делится на M, то разложение M на простые множители – часть разложения N. После того, как мы увеличим на 1 каждый сомножитель из разложения N, все входящие в него простые множители числа M увеличатся на 1 и дадут в произведении N.

Решение 2. Разложим M на простые множители, пусть p – наибольшее из них. Число N получается увеличением всех простых множителей у M на 1, и так как N делится на M, один из этих множителей, скажем $q+1$, должен делиться на p. Поскольку $q \leqslant p$, это возможно лишь в случае $q+1=p$, и так как p и q простые, получаем, что $q=2$, $p=3$. Значит, M – это произведение двоек и троек, то есть имеет вид $M = 2^l 3^m$. Тогда $N = 3^l 4^m = 2^{2m} 3^l$, причём $m \leqslant l \leqslant 2m$. Значит, новое число равно $3^{2m} 4^l$ и делится на $N = 3^l 4^m$.

4. Ответ: сын. Уменьшим все массы в 20 раз: у сына станет 15 г сыра, у матери 14 г масла. Сын делит сыр на куски в 1, 2, 4 и 8 г. Пусть на одной тарелке не больше k г, но больше $k-1$ г масла, где k – целое. Тогда на второй тарелке масла меньше $15-k$ г. Сын кладёт на первую тарелку k г (из чисел 1, 2, 4, 8 можно составить любую целую сумму от 1 до 15), а на вторую $15-k$ г.

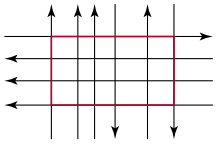
5. Ответ: нет. На рисунке дано разбиение прямоугольника 6×7 на уголки. Отразим фигуру из четырёх отмеченных уголков относительно её вертикальной оси симметрии. Фигура перейдёт в себя, следы – в следы, а разбиение поменяется.



Сложный вариант

1. Ответ: могут. Годятся цифры 2 и 6. Напишем, например, числа 6, 22, 26, 26, 62, 66. Приведём для каждой цифры от 1 до 9 сумму с этой первой цифрой: $\mathbf{128} = 62 + 66$; $\mathbf{28} = 22 + 6$; $\mathbf{32} = 26 + 6$; $\mathbf{48} = 22 + 26$; $\mathbf{52} = 26 + 26$; $\mathbf{68} = 62 + 6$; $\mathbf{72} = 66 + 6$; $\mathbf{88} = 62 + 26$; $\mathbf{92} = 66 + 26$.

2. Ответ: всегда. Пусть, пока все дороги параллельны, Вася сохраняет это, следя за тем, чтобы крайние дороги были разных направлений. Когда Петя проведёт пересекающую их дорогу, Вася с одной из сторон от неё проводит

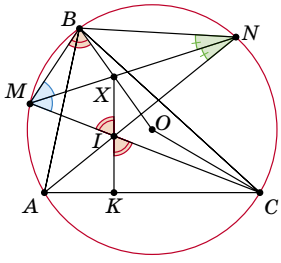


дорогу противоположного направления так, чтобы возник *большой цикл* (цикл из четырёх крайних дорог, красный на рисунке).

Далее Вася следит только за крайними дорогами – если они по-прежнему образуют цикл, он проводит любую не крайнюю дорогу (и большой цикл сохраняется), а если Петя испортил большой цикл, проведя крайнюю дорогу, Вася восстанавливает его, проводя рядом с Петиной новую крайнюю дорогу нужного направления.

Докажем, что так Вася добьётся своей цели. Рассмотрим произвольные перекрёстки A и B. Выедем из A на большой цикл, по нему доедем до дороги, которая ведёт к B, и проедем в B.

3. Заметим, что M и N – середины дуг AB и BC. Поэтому треугольники MBN и MIN равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Значит, треугольники MBX и MIX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle KIC=\angle MIX=\angle MBX=\angle MBA+\angle ABO=\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle C)=90^\circ-\angle KCI$, откуда $\angle IKC=90^\circ$.



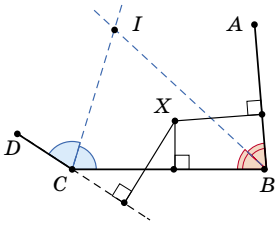
4. а) Ответ: нет. Если из одного мешка убрать 10 конфет, то каждый получит из этого мешка на одну конфету меньше, что не скажется на различии результатов. Поэтому можно считать, что в каждом мешке меньше 10 конфет.

Рассмотрим какой-либо мешок. Если в нём изначально было r конфет, то первые $10-r$ детей ничего не возьмут из этого мешка. После этого число детей станет равным r, и далее каждый ребёнок заберёт из мешка ровно по одной конфете.

Значит, каждый получит из каждого мешка не более одной конфеты, а всего – от 0 до 8 конфет. Но среди 10 чисел от 0 до 8 найдутся равные.

б) Ответ: да. Пусть число конфет в мешках равно 9, 8, ..., 1. Так как детей 10, первый ребёнок уйдёт, ничего не взяв. Останется 9 детей. Второй ребёнок заберёт только одну конфету из первого мешка. Останется 8 детей, а в мешках – 8, 8, 7, ..., 1 конфет. Третий заберёт лишь по одной конфете из первых двух мешков. Останется 7 детей, а в мешках – 7, 7, 7, 6, ..., 1 конфет. И так далее: i-й ребёнок заберёт по одной конфете из первых $i-1$ мешков, где $i=2, 3, \ldots, 10$. В частности, когда очередь дойдёт до 10-го ребёнка, в каждом мешке останется по одной конфете, и он заберёт их все. Итого, дети получат 0, 1, 2, ..., 9 конфет.

5. Рассмотрим любую точку X внутри многоугольника и опустим из неё перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Выберем сторону BC, для которой такой перпендикуляр самый короткий. Докажем, что треугольник BCI, построенный на этой стороне, содержит точку X.



Биссектриса состоит из точек угла, равноудалённых от его сторон, и делит угол на две части: в каждой из них до одной из сторон ближе, чем до другой. (Это верно для углов, меньших 180°, а у выпуклого многоугольника все углы такие). Поэтому X лежит по ту же сторону от биссектрис BI и CI, что и сторона BC, а значит, лежит внутри BCI.

6. Можно считать, что первый ход горизонтальный (иначе повернём доску). Разделим доску на 23 вертикальные полосы ширины 2 клетки и раскрасим каждую в белый или чёрный цвет, чередуя цвета полос. Крайние полосы будут одного цвета, пусть чёрного. Тогда белых клеток всего $11\cdot 2\cdot 46=1012$. Заметим, что горизонтальный ход всегда меняет цвет клетки. Пусть всего ходов хотя бы 2025. Тогда конь посетил 2026 клеток (включая начальную), которые разбиваются на 1013 пар соседних. В каждой паре клетки связаны горизонтальным ходом, то есть они разного цвета. Тогда белых клеток пройдено минимум 1013, что невозможно.

7. Ответ: 2. Правило построения последовательностей назовём просто *правилом*. Пусть два совпадения в последовательностях нашлись, рассмотрим второе. Если предыдущие члены тоже равны, то по правилу одна из последовательностей содержится в другой (так как они бесконечны), что запрещено. Пусть они не равны. Будем считать, что последовательности начинаются с них, и докажем, что теперь совпадение ровно одно. Итак, первая последовательность – $a_1, a_2, \ldots$, вторая – $b_1, b_2, \ldots$, причём

$$a_1<b_1<a_2=b_2<a_3.$$

Складывая первое и третье сравнения, получаем, что $a_1+a_2<b_1+b_2$, то есть, по правилу, $a_3<b_3$. Складывая второе и четвёртое, получаем, что $b_1+b_2<a_2+a_3$, то есть $b_3<a_4$, и т.д. Совпадений далее не будет, так как мы можем шаг за шагом «достраивать» неравенства:

$$a_1<b_1<a_2=b_2<a_3<b_3<a_4<b_4<a_5<\ldots$$

Пример. 1, 2, 3, 5, ... и 1, 3, 4, ...

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 5 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

V ТУР

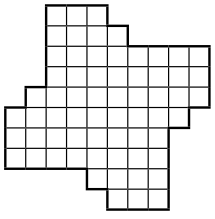
21. Замок имеет форму правильного треугольника. Барон хочет расставить часовых на стенах замка так, чтобы каждая точка вне замка была в поле зрения часовых. Хватит ли шести часовых, если часовой видит всё в пределах угла 60°, причём замок не должен загораживать обзор? В одной точке можно располагать несколько часовых.

22. Вася в течение 7 дней подряд решал задачи (не меньше чем по одной), причём в каждый следующий день он решал на 1 задачу больше, с единственным исключением: в воскресенье Вася решил столько же задач, сколько и в субботу. Всего он решил 24 задачи. Сколько задач Вася решил в среду?

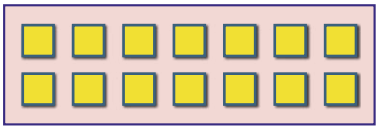
Авторы задач: Максим Прасолов (21), Борис Френкин (22), Александр Грибалко (23), Николай Авилов (24), Сергей Костин (25)

23. Набор домино состоит из 28 различных прямоугольников 1×2, в клетках которых поставлено от 0 до 6 точек. Петя сложил все доминошки в произвольном порядке в кольцо так, что получилась прямоугольная рамка толщиной в клетку доминошки. Затем Вася склеил все доминошки по соседним сторонам, а потом разрезал каждую доминошку на две половинки. Могло ли оказаться, что полученные Васей доминошки тоже образуют полный набор?

24. Фигуру-«вертушку», изображенную на рисунке, разрежьте на четыре равные (и по форме, и по размеру) части так, чтобы из них можно было сложить квадрат, без наложений и просветов.



25. На столе лежат шкатулки – 7 вверху и 7 внизу так, как на рисунке. В одной из шкатулок находится Волшебный цветок. Если открыть эту шкатулку, то начинает играть вальс. Если открыть шкатулку, в которой нет Волшебного цветка, но он находится в одной из соседних шкатулок (слева, справа, сверху или снизу), то звенит колокольчик. Какое наименьшее количество шкатулок надо открыть, чтобы точно понять, в какой шкатулке находится Волшебный цветок?



Художник Николай Крутиков

ОШИБКА МАГЕЛЛАНА

Первая кругосветная экспедиция Магеллана за два месяца до конца плавания зашла за провиантом на острова Зелёного Мыса. Мореплаватели 3 года сами безошибочно вели подсчёт дней. Но, узнав у местных жителей, что сегодня четверг, изумились – согласно корабельным записям, в тот день была среда. Почему так получилось?

Автор Дмитрий Житницкий
Художник Yustas

ISSN 2227-7986 25001
9 772227 798251