№ 7 | июль 2025

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 7

ИЮЛЬ 2025

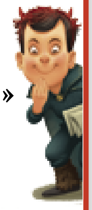
МОЛОЧНЫЙ ПАРАДОКС

КАРЛ ЛАНДШТЕЙНЕР. ЧУЖАЯ КРОВЬ

СТУПЕНЧАТЫЙ КРЕСТ

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!



Вышла в свет четвёртая книга из серии «Библиотечка журнала “Квантик”»

УПРЯМОУГОЛЬНИК. ГОЛОВОЛОМКИ ДЛЯ ВСЕЙ СЕМЬИ.

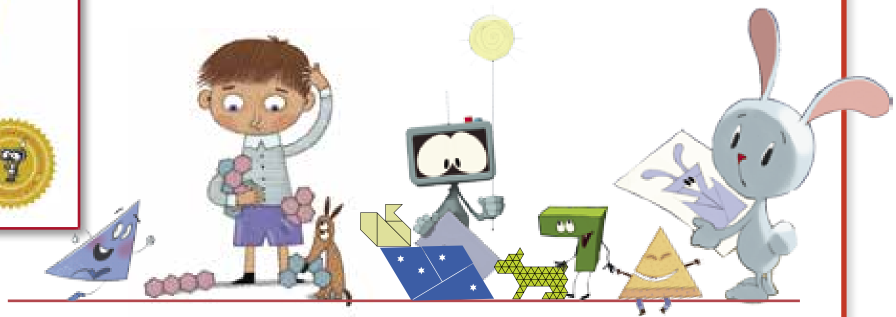
Автор – Владимир Иванович Красноухов,
знаменитый изобретатель логических игр и головоломок.

В сборник вошли его статьи из рубрики «Игры и головоломки» журнала «Квантик», опубликованные с 2013 по 2024 годы.

Познавательные и занимательные головоломки понравятся детям и взрослым, позволят весело провести досуг в семье и дополнят внеклассные занятия в школе.

Эта книга для всех, кто ценит необычные задачи и юмор, стремится развивать пространственное мышление и творческие способности.

ISBN 978-5-4439-1925-6
издательство МЦНМО, 2025 год



Купить новую книгу, а также другие издания «Квантика» можно в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, сайт: **biblio.mccme.ru**, а также в интернет-магазинах **ozon.ru, market.yandex.ru**, **wildberries.ru**, **my-shop.ru** и других.

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России **ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ** за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук **ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА** за лучшие работы в области популяризации науки

2024 — Победитель конкурса в номинациях **ЛУЧШИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СРЕДНЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА**, **ЛУЧШЕЕ ДИЗАЙНЕРСКОЕ РЕШЕНИЕ**

Журнал «Квантик» № 7, июль 2025 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, И.А. Маховая, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 30.05.2025
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Иван Русских

МОЛОЧНЫЙ ПАРАДОКС,
или холодное теплее горячего

Летом Миша поехал на дачу к бабушке. В том году лето выдалось не очень жарким, так что Миша старался побольше греться на солнышке. Вот и сейчас Миша загорал и читал книжку.

– Миша, булочки готовы! Приходи! – раздался голос бабушки.

Миша тут же вскочил и со всех ног помчался в дом. Спешка Миши была вполне резонна – бабушкины булочки с корицей были бесподобны, особенно с горячим молоком, которое Миша считал лучшим напитком на свете.

Вообще-то бабушка Миши была профессором математики и преподавала студентам в университете. Папа рассказывал, что студенты бабушку побаивались: всех, кто не хотел учиться, бабушка нещадно отправляла на пересдачу. Папа иногда ворчал, что бабушка слишком уж строга, – хотя сама она говорила, что просто не любит лентяев. Но на летних каникулах бабушка уезжала из города, и её занимали обычные бабушковые занятия: дача, огород – и любимый внук, которого непременно надо было вкусно накормить.

– Только сначала вымыть руки! – строго напомнила бабушка внуку, который уже было протянул руку к булочкам.

– Угу, – буркнул Миша, поплёлся к раковине и открыл кран – но вода из него не потекла.

– А что у нас с водой? – спросил Миша.

– Опять, что ли, электричество отключили? – всплеснула руками бабушка.

Насос для подачи воды на даче работал от электричества. Миша щёлкнул выключателем для проверки – лампочка не загорелась.

– Видимо, и правда отключили. Ой, а как же моё горячее молоко? – забеспокоился Миша. – Плита-то у нас электрическая...

– Не переживай, я как раз недавно кипяток в термос залила – сейчас я тебе молоко разбавлю, – сказала бабушка, открывая бутылку холодного молока, которую только что достала из погреба.

– Ну уж нет, разбавленное молоко ещё хуже холодного, – запротестовал Миша. В вопросах молока он был не менее принципиален, чем бабушка в вопросах математики.

– Ну и что же нам делать? – спросила бабушка.

– О, я знаю! Мы нальём молоко в стакан, а сам стакан погрузим в кипяток из термоса! Тогда молоко нагреется до температуры кипятка.

– Но ты же небось молока побольше хочешь? А кипятка у нас не так уж много. Молоко, конечно, нагреется, но и вода охладится – так что в конце температура молока будет не такая же, какая была вначале у кипятка.

Миша прикинул свои аппетиты. Молока, действительно, хотелось побольше, да и бабушку обделять этим прекрасным напитком Мише совесть не позволяла.

– И до какой же температуры можно так нагреть молоко? – задумался Миша.

– Это, конечно, зависит от того, сколько будет молока и сколько воды. Давай предположим, что у нас есть литр кипятка и литр молока, который мы хотим нагреть.

– Наверное, надо ещё знать, какие температуры вначале были у жидкостей?

– Давай считать, что вначале у молока температура 0 °C, а у кипятка 100 °C. И предположим для простоты, что у молока и воды одинаковые теплоёмкости – чтобы нагреть их на 1 °C, надо затратить одинаковое количество энергии.

– Ну тогда это просто! Если погрузить сосуд с молоком в кипяток, то они будут обмениваться теплом, пока у них температуры не сравняются. Если предположить, что вода отдавала тепло только молоку, а не окружающей среде, то в конце температура обеих жидкостей будет 50 °C.

– Всё так! А можно ли нагреть литр молока до температуры большей, чем 50 °C?

Миша призадумался.

– Наверное, тепло не может переходить от более холодного тела к более горячему? Что-то такое папа мне рассказывал, это даже как-то по-умному называется...

А, точно: второе начало термодинамики! Так что нагреть молоко больше, чем до 50 °C, не получится.

– Молодец. Однако, – хитро прищурилась бабушка, – нагреть молоко при таких условиях можно и до температуры большей, чем 50 °C!

– Это что же, можно законы физики нарушить? – недоверчиво уточнил Миша. – Это как?

– А вот смотри. Давай разделим молоко на две порции по пол-литра и сначала нагреем от кипятка первую, потом вторую, а затем смешаем их.

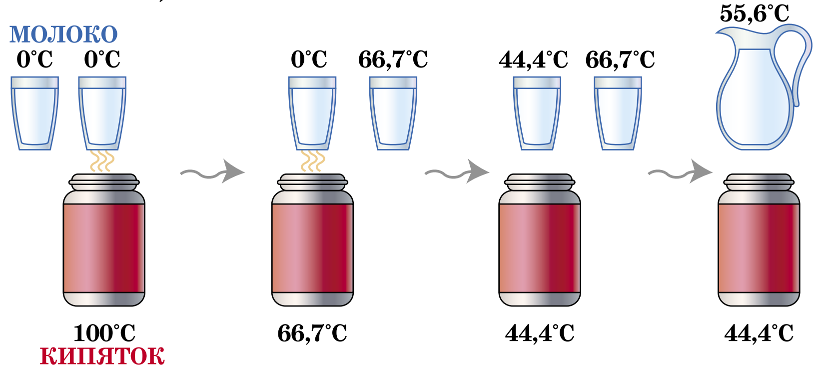
– Разве от этого что-то изменится? Надо подумать... В конце у воды будет такая же температура, как у второй порции молока. Но у первой порции молока температура будет больше, потому что её нагревали первой! Значит, итоговая температура молока будет больше, чем итоговая температура воды! Удивительно...

– Можно даже посчитать, какие температуры будут в конце.

– Можно, только надо ручку с бумажкой найти. Значит, вначале мы нагреваем пол-литра молока от литра воды...

Пряный запах булочек с корицей мешал сосредоточиться, но Миша собрал всю волю в кулак и продолжил рассуждать.

– Поскольку кипятка в два раза больше, итоговая температура будет в два раза ближе к 100 °C, чем к 0 °C. Значит, температура после нагрева первой порции будет $\frac{2}{3} \cdot 100\,°C \approx 66{,}7\,°C$. После нагрева второй порции молока температура воды будет равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 100\,°C \approx$ $\approx 44{,}4\,°C$. А после смешивания двух порций молока температура будет равна $\frac{66{,}7\,°C + 44{,}4\,°C}{2} \approx 55{,}6\,°C$. Действительно, больше 50 °C!

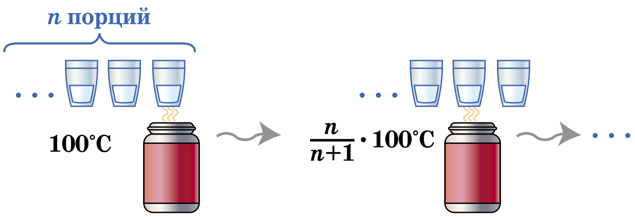


– Всё правильно. Кстати, посчитать финальную температуру воды можно было и по-другому: поскольку мы считаем, что тепло у нас не уходит во внешнюю среду, сумма температур воды и молока в конце должна остаться равной 100 °C. Поэтому температура молока 100 °C – 44,4 °C = 55,6 °C.

– Действительно, сошлось! А, наверное, если поделить молоко на большее число порций, можно же до ещё более высокой температуры её нагреть? Почти до 100 °C!

– Хорошая гипотеза! Давай посчитаем, какая температура будет у молока в конце, если поделить его на n порций.

– Ну, сначала посчитаем конечную температуру воды. Поскольку теперь каждая порция молока в n раз меньше порции кипятка, каждый раз температура воды будет умножаться на $\frac{n}{n+1}$. После n таких операций температура воды будет $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot 100\,^\circ\mathrm{C}$. Ну а у молока тогда $100\,^\circ\mathrm{C} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} = \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \cdot 100\,^\circ\mathrm{C}$. Да, какая-то не очень простая формула...

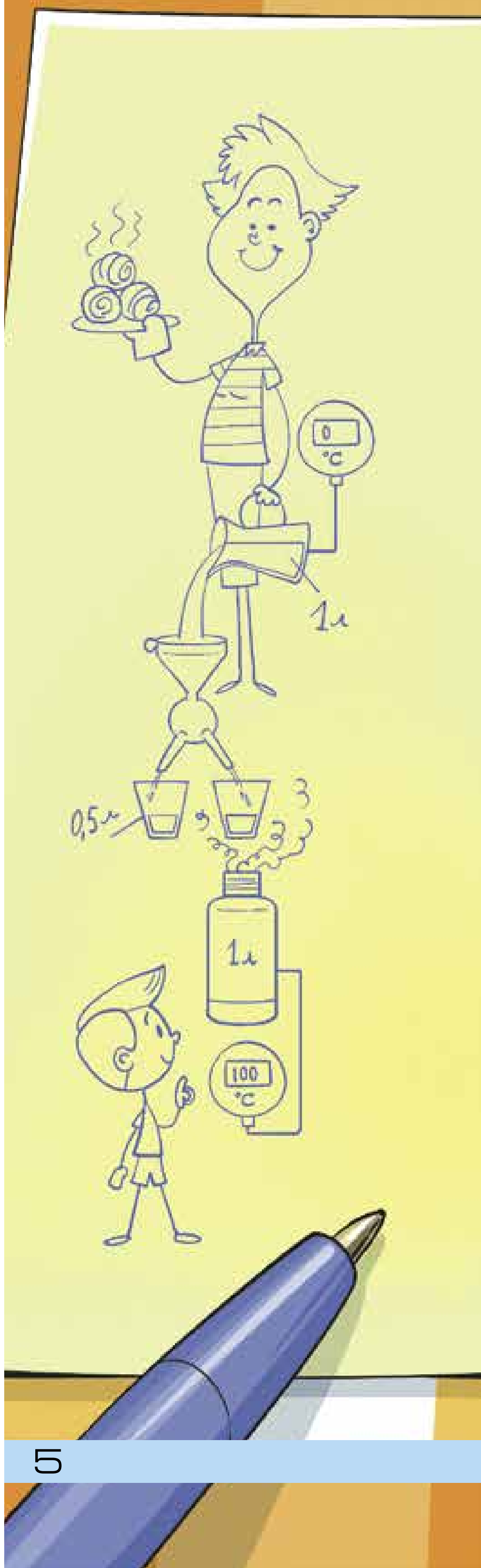


– Давай попробуем посчитать, чему это равно, например если делить молоко на 10 порций.

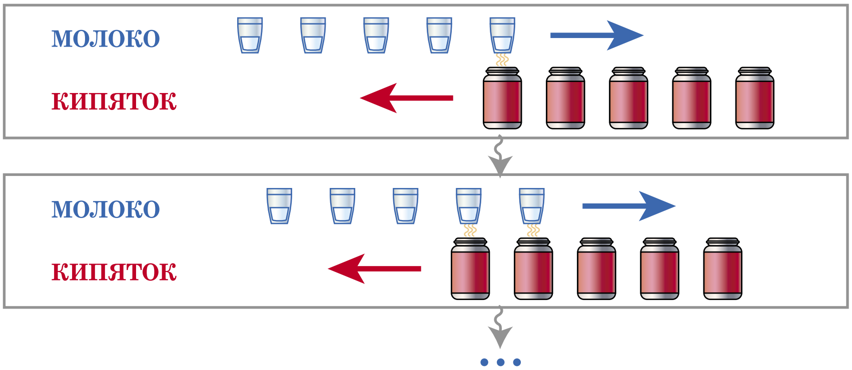
– Сейчас... – Миша потянулся за калькулятором. – Получается... примерно 61,4 °C. Да, до сотни пока далековато... А если на 100 порций молоко поделить? – Миша быстро застучал по кнопкам калькулятора. – Хм, всего 63 градуса... Не сильно-то она выросла.

– На самом деле, сильно больше эта формула дать и не сможет, – вмешалась бабушка. – Математики умеют доказывать, что при больших n наше выражение для температуры молока стремится примерно к 63,2 °C. А больше не получается!

– Да уж, обидно... Но, может, если делить не только молоко на порции, но и кипяток, можно достичь ещё больших температур?



– Хорошая идея! Предлагаю это нарисовать.



– Вот у нас будет цепочка из порций молока и такая же – из порций кипятка, – продолжила бабушка. – Мы будем сдвигать молочную цепочку вправо, и когда порция молока и порция воды оказываются рядом, будем считать, что они в этот момент обмениваются теплом, пока их температуры не сравняются. Когда вся молочная цепочка пройдёт мимо кипяточной, смешаем всё молоко и получим финальную температуру. Если порций станет очень много, можно думать, что у нас есть труба с молоком и труба с водой, лежащие рядом, а по ним текут жидкости в противоположные стороны и обмениваются теплом. Такой, можно, сказать, молокопровод...

Миша улыбнулся. Молокопровод, доставляющий горячее молоко прямо к столу... Мечта! Миша уже представлял себе сверкающие трубы, по которым бурлят молочные реки... но мечты прервал внезапно загудевший насос. Где-то в соседней комнате зазвучал радиоприёмник.

– Ура, электричество дали! – закричал Миша и унёсся греть свой любимый напиток.

– Эх, молодёжь... – добродушно покачала головой бабушка, убирая со стола бумажки и ставя в центр поднос с пышными булочками.

Вопрос. А всё-таки, удастся ли нагреть молоко выше 63,2 °C, если разделить на порции и молоко, и кипяток?

Попробуйте для начала посчитать, что получится при делении на 2 и на 3 части. Проверить ответ и узнать о разных применениях этой идеи можно, прочитав статью А. Бердникова «Из пустого в порожнее» в «Квантике» №6 за 2013 год.

Художник Мария Усеинова

Игорь Акулич

Школьные проблемы

Никто не станет отрицать, что среди множества школьных текстовых задач (про путешественников из пункта A в пункт B, вспашку полей тракторами и др.) особую прелесть имеют задачи *про школу*, потому что это, во-первых, близко знакомо, а во-вторых, очень педагогично. Кто ж откажется решать задачу про самого себя!

Здесь читателю предлагается пара как раз таких задач. Только учтите: они содержат «маленькие хитрости», из-за которых может показаться, что решения нет. Но оно есть!

Задача 1 (*автор А. Ворошилов*).

После проверки контрольных работ оказалось, что половина учеников класса получила «4», а все остальные получили «3». Недовольный результатами, учитель решил дать этому классу повторную контрольную работу. Отметки и во второй раз не отличались разнообразием: каждый ученик получил либо «4», либо «3», но всё же четверть учеников класса улучшила свой результат. 13 учеников получили «4» хотя бы на одной из этих контрольных. Известно также, что в этом классе больше 20 учеников, причём обе контрольные писали все ученики класса.

Сколько учеников в классе?

Задача 2. Учитель вызвал последовательно Петю, Колю, Васю, Мишу, Стёпу и Гришу и задал им по одному примеру из таблицы умножения. Каждый из учеников, начиная с Коли, размышлял над ответом в полтора раза дольше предыдущего, причём затраченное им число секунд было в точности равно полученному произведению.

Какие числа перемножал Стёпа?

Художник Александр Новосельцев

Николай Андреев

МАГНИТЫ НА ХОЛОДИЛЬНИК

Бывает ли постоянный магнит с одним полюсом? А что будет, если постоянный магнит с двумя полюсами разрезать пополам? Наверняка любознательный читатель «Квантика» задумывался над этими вопросами и знает, что магнита с одним полюсом не бывает, а если магнит разрезать пополам – у двух получившихся магнитов снова будет по два полюса. Одинаковые полюса магнитов отталкиваются, а разные – притягиваются. А к железу, например, магнит притягивается, каким из полюсов его к металлу ни поднеси.

А у вас на холодильнике есть магниты? В основе тонких магнитов для холодильника чаще всего винил, одинаково выглядящий по всей поверхности. А где же у него северный и южный полюсы?

Возьмите два тонких прямоугольных магнитика с холодильника и приложите их друг к другу виниловыми поверхностями. Покрутите один магнит относительно другого. Вначале они будут взаимодействовать слабо, но в некотором положении как будто что-то щёлкнет, и магниты прилипнут друг к другу. Обычно это происходит, когда стороны прямоугольных магнитов параллельны. Попробуйте сдвинуть один магнит относительно другого вначале вдоль одной стороны, а потом вдоль другой. В одном случае магнит едет «как по рельсам», а вот чтобы сдвинуть магнит в перпендикулярном направлении, придётся приложить усилие, и он сразу перепрыгнет на некоторое расстояние.

После этого эксперимента вы наверняка догадались, что разные магнитные полюса в виниловых магнитах че-

редуются тонкими полосками. Вдоль этих полосок второй магнит сдвигается легко. При попытке сдвинуть второй магнит в перпендикулярном направлении вначале его держат силы притяжения, а потом ему приходится перепрыгнуть на полоски нужной полярности.

Одно из достоинств такого устройства винилового магнита в том, что «правильной» стороной он притягивается к холодильнику сильнее, чем обычный магнит того же размера, а другой стороной практически не притягивается.

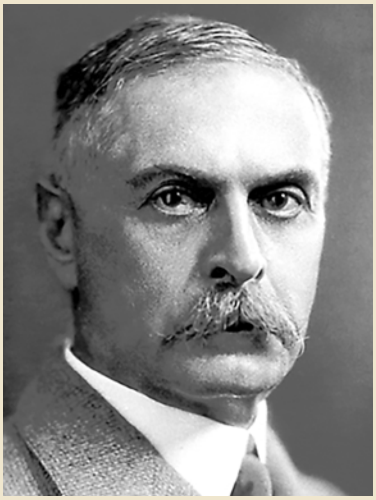
Виниловый магнит и вид на него через плёнку, визуализирующую магнитные поля

Фото: Валентина Асташкина

Художник Алексей Вайнер

КАРЛ ЛАНДШТЕЙНЕР

Марина Молчанова



Карл Ландштейнер (Carl Landsteiner) 1868 – 1943

Уильям Гарвей (William Harvey) 1578 – 1657

Джеймс Бланделл (James Blundell) 1790 – 1878

С древних времён люди знали, насколько кровь важна для жизни. Но её настоящее изучение началось гораздо позже. Так, английский физиолог Уильям Гарвей впервые описал систему кровообращения в XVII веке. И вскоре после этого врачи и учёные стали задаваться вопросом: что будет, если перелить кровь от одного организма другому? Так зародилась наука о переливании крови – *трансфузиология*.

На первых порах это были попытки переливания от животных человеку. Но вскоре такие эксперименты были запрещены в самых разных странах: и из-за их результатов, и из религиозных соображений.

Следующий важный шаг сделал уже в начале XIX века другой британский врач и учёный – Джеймс Бланделл. Он был убеждён, что кровь можно переливать только от человека к человеку. И также был убеждён, что кровь иногда *нужно* переливать. Ведь он был акушером, и порой его пациентки гибли из-за послеродовых кровотечений: тогдашняя медицина не умела справляться с этим осложнением. В 1818 году переливание получила первая пациентка Бланделла: донором для только что родившей женщины стал её муж.

Постепенно переливания стали проводиться и другими врачами – так, в 1832 году петербургский врач Андрей Вольф, знакомый с методикой Бланделла, провёл первое успешное переливание крови в России, опять-таки роженице. Об этом известно не так много, мы не знаем даже портретов Вольфа, но история гласит, что женщина была спасена. И теперь 20 апреля – день этого переливания – отмечается в России как Национальный день донора крови. О международном дне донора мы скажем позже…

Однако в те годы переливания всё же не стали частью обычной медицинской практики. И это было связано не только с техническими трудностями, но и, в первую очередь, с грозными рисками этой процедуры. Часть людей, получивших чужую кровь, действительно удавалось спасти, но многие быстро погибали. И неизвестно было, почему переливания в одних случаях оказывались спасительными, а в других губительными.

Только на рубеже XIX и XX веков стало ясно, что переливать кровь надо не просто от человека к человеку – нужно уметь выбирать, *от какого* человека её переливать. И это знание, с которого и началось победное шествие трансфузиологии, связано с именем австрийского учёного Карла Ландштейнера.

* * *

Ландштейнер родился в курортном городке Бадене рядом с Веной в семье преуспевающего журналиста. С юности он интересовался медициной, закончил медицинский факультет Венского университета, затем несколько лет серьёзно занимался химией. Начиная с 1898 года он работал на кафедре патологической анатомии Венского университета. И вскоре, будучи ещё молодым ассистентом, совершил своё самое знаменитое открытие. Оказалось, что у разных людей разная кровь!

На самом деле такие наблюдения были ещё до Ландштейнера. Врачи знали, что если слить в пробирке образцы крови разных людей, то иногда ничего не происходит, а иногда вдруг выпадают в осадок мелкие красные комочки – они состоят из слипшихся клеток крови. Но мало ли... может, это связано с болезнью? Тем более что такое происходит не всегда.

Но Ландштейнер решил провести детальную проверку – а что, если смешивать в пробирках образцы крови здоровых людей и попытаться установить какую-то закономерность? Кстати, первыми добровольцами, сдавшими кровь для этого исследования, были он сам и его сотрудники.

Сначала Ландштейнер разделил каждый образец крови на компоненты. Если оставить кровь в пробирке (а быстрее и надёжнее – прокрутить в центрифуге), кровь расслаивается. Вниз опускаются красные клетки крови, которые также называют *эритроцитами*[1], а вверху остаётся желтоватая жидкость – *плазма крови*.

[1] В крови есть и другие виды клеток, но для нашего рассказа они неважны.

Венский университет
Фото: Thomas Ledl, wikimedia.org

THE LANCET.

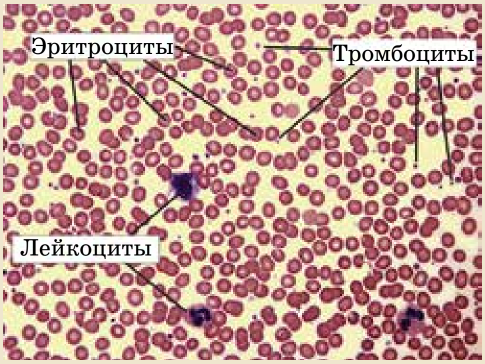
Vol. II.] LONDON, SATURDAY, JUNE 13. [1828-9.

OBSERVATIONS ON TRANSFUSION OF BLOOD, By Dr. Blundell. With a Description of his Gravitator.

Британский медицинский журнал «The Lancet», 1828 год, статья о переливаниях крови

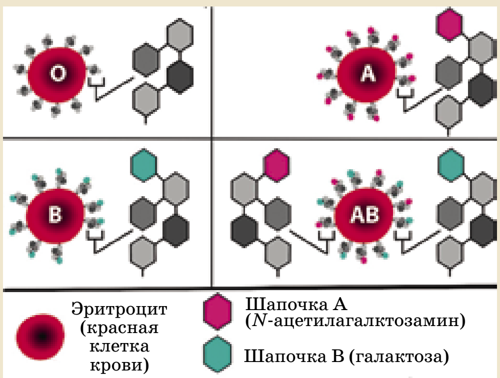
Кровь, разделённая на компоненты

КАРЛ ЛАНДШТЕЙНЕР



Кровь под микроскопом. Видны многочисленные красные клетки и некоторые другие

Ян Янский (Jan Janský) 1873–1921



Эритроциты разных групп крови

И затем были проведены исследования по смешиванию. А что будет, если вот эти красные клетки смешать вот с этой чужой плазмой? А вот эти – вот с этой?

В результате удалось выделить три группы образцов крови, которые Ландштейнер назвал A, B и C. Внутри каждой группы можно было смешивать что угодно с чем угодно, ничего плохого не происходило. А вот при смешивании между группами всё было совсем не так. Скажем, никак нельзя было смешивать плазму из группы A и эритроциты из группы B – выпадал тот самый красный осадок. И плазму из группы B нельзя было смешивать с эритроцитами группы A. Интереснее всего было с группой C: её эритроциты можно было смешивать с плазмой любой другой группы, а вот её плазму нельзя было смешивать ни с эритроцитами A, ни с эритроцитами B!

Совсем скоро произошли и другие события. Сотрудники Ландштейнера открыли ещё одну группу, довольно редкую, которая позже получила название AB. Потом группу C переименовали в O. Чешский учёный Ян Янский ввёл другие обозначения для групп крови (в нашей стране они используются и сейчас) – вместо O, A, B и AB он использовал римские цифры, соответственно I, II, III и IV.

Но самое главное – через некоторое время учёные выяснили, почему кровь разных групп ведёт себя именно так!

* * *

Оказывается, на красных клетках крови присутствуют определённые молекулы, которые в организме человека могут видоизменяться: на них навешиваются особые «шапочки». И есть два вида этих «шапочек» – A и B. Соответственно, возможны четыре вида эритроцитов: совсем без шапочек (O), с шапочкой A, с шапочкой B и с обеими (A и B). У каждого человека красные клетки одинаковы, у разных людей могут быть разными.

Далее, в плазме крови могут присутствовать *антитела* к таким эритроцитам. Напомним: антитела – это белки *иммунной системы*[2], нужные для нейтрализации чужаков. Для молекул с шапочкой А есть своё антитело – назовём его анти-А. Для молекул с шапочкой В – анти-В. Естественно, у одного и того же человека не может быть одновременно и эритроцитов А, и антител анти-А: ведь тогда антитела будут атаковать его собственные клетки, а это не дело, так не должно быть. И то же самое с В и анти-В.

В результате получаем как раз четыре группы!

Группа O, она же первая **(I):** на клетках нет ни А, ни В, но зато в плазме есть анти-А и анти-В.

Группа A, она же вторая **(II):** на клетках есть только А, в плазме есть только анти-В.

Группа B, она же третья **(III):** на клетках есть только В, в плазме есть только анти-А.

Группа AB, она же четвёртая **(IV):** на клетках есть и А, и В, в плазме нет ни анти-А, ни анти-В.

И теперь ясно, что происходит при попытке слить вместе компоненты крови разных групп! Всё нормально, пока не встречаются между собой А и анти-А или же В и анти-В. А вот если они встречаются, то антитела атакуют эритроциты, в результате клетки слипаются, выпадают в осадок (те самые комочки) и погибают. Происходит именно то, чего во что бы то ни стало надо избегать при переливании крови.

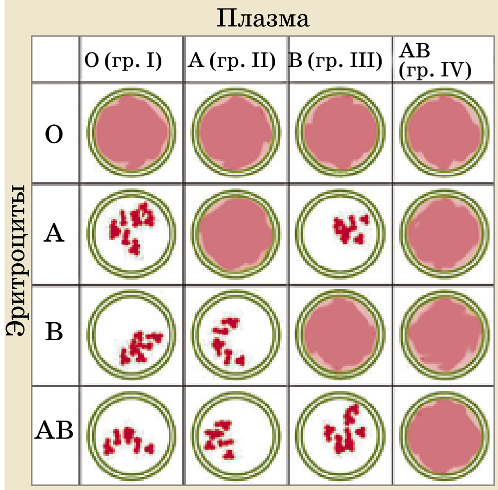
И как же этого избежать? Очевидно, правильным подбором группы крови в каждом случае переливания.

* * *

После открытия Ландштейнера переливания крови наконец-то стали в основном успешными и начали применяться намного шире. Уже медицину времён Первой мировой войны невозможно представить себе без службы переливания. И Ландштейнер в 1930 году получил за своё открытие Нобелевскую премию по физиологии и медицине.

[2] См. статью М. Молчановой «Сусуму Тонегава. Такие разные защитники» в «Квантике» № 8 за 2024 год.

Ландштейнер в лаборатории

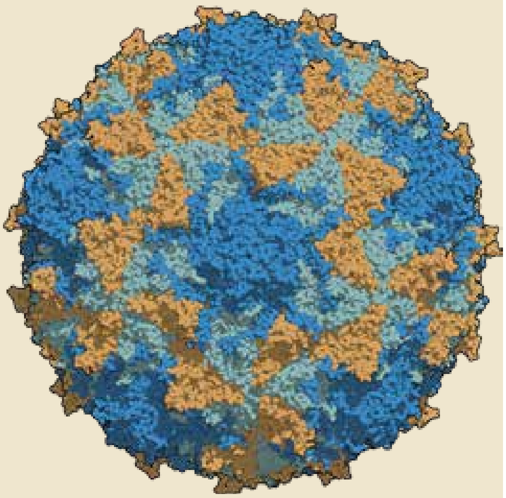


Совместимость разных групп крови (красные комочки на белом фоне – несовместимость)

Группа	**O** (I)	**A** (II)	**B** (III)	**AB** (IV)
Клетки	O	A	B	AB
«Шапочки» на клетках	Нет	A	B	A и B
Антитела в плазме	анти-А и анти-В	Только анти-В	Только анти-А	Нет

Таблица групп крови

КАРЛ ЛАНДШТЕЙНЕР



Схематическое изображение вируса полиомиелита

Впрочем, открытием групп крови его заслуги далеко не исчерпываются. Так, в 1909–1911 годах Ландштейнер стал одним из первооткрывателей вируса полиомиелита – одной из самых грозных детских инфекций. Сейчас полиомиелит уже почти побеждён благодаря вакцинации, но в первой половине XX века это было ещё совсем не так.

После Первой мировой войны многие европейские страны бедствовали. Ландштейнер понимал, что в его родной Вене денег на исследования нет и не будет. Он уехал в Нидерланды, но там было ненамного лучше. Затем в Соединённые Штаты Америки. И там, в Рокфеллеровском институте в Нью-Йорке, продолжил работу по изучению крови.

Это была продуктивная работа. Но для нас сейчас важно то открытие, которое было совершено при участии Ландштейнера, когда ему было уже около семидесяти. Причём, пожалуй, важность этого открытия сравнима с важностью первого открытия групп крови. Речь идёт о резус-факторе.

* * *

Эритроциты разных людей могут быть чрезвычайно разнообразными. Кроме А и В, есть и другие молекулы, которые могут – совершенно независимо от А и В! – присутствовать или отсутствовать на красных клетках крови. Некоторые из них играют огромную роль в медицине. И одну из них открыли и изучили, начиная с 1939 года, несколько учёных: кроме Ландштейнера, это также Филип Левин, Александр Винер (кстати, оба они – потомки эмигрантов из Российской империи) и Руфус Стетсон.

Прежде всего Ландштейнер и Винер обнаружили на эритроцитах ранее неизвестную молекулу, которую назвали *резус-фактором*[3]. Это странное название связано с тем, что аналогичную молекулу впервые обнаружили у макаки-резус, популярного лаборатор-

Макака-резус
Фото: sharpphotography.co.uk

[3] На самом деле система классификации крови по резус-принадлежности включает в себя учёт не одной, а нескольких молекул. Просто с точки зрения медицины одна из них намного важнее других.

ного животного. Потом выяснилось, что у людей эта молекула не совсем такая, как у обезьяны, но было поздно: термин прижился...

Выяснилось, что примерно у 85% людей на эритроцитах есть резус-фактор, а у остальных 15% нет, и это не зависит от их принадлежности к той или иной группе системы АВО, описанной выше. У людей, имеющих резус-фактор, то есть резус-положительных, в крови нет антител к нему (естественно)! А вот если резус-фактора нет, то у таких людей (резус-отрицательных) после контакта с резус-положительной кровью могут выработаться антитела. Это тоже очень важно учитывать при переливаниях крови.

Но самая важная находка, сделанная примерно тогда же, – что наличие или отсутствие резус-фактора связано с так называемой *гемолитической болезнью новорождённых*. Это опасное состояние, которое может возникнуть, когда у резус-отрицательной мамы должен родиться резус-положительный ребёнок. Ведь если у мамы есть антитела к резус-фактору, они могут во время беременности проникать в кровеносную систему плода и разрушать его клетки крови. Когда люди поняли причины этого состояния, они научились с ним справляться, и это дало возможность родиться – без преувеличения! – миллионам здоровых детей.

* * *

Ландштейнер, награждённый всеми мыслимыми премиями, работал до последних дней жизни. 24 июня 1943 года прямо в лаборатории ему стало плохо с сердцем, и через два дня он умер в больнице того же Рокфеллеровского института, в котором проработал двадцать лет.

А вот день его рождения, 14 июня, знает немало доноров. Дело в том, что 20 лет назад Всемирная организация здравоохранения объявила этот день Международным днём донора крови. Это праздник всех людей, которые сдают кровь, чтобы спасти жизни других. И это благодарная память о человеке, который дал нам такую возможность.

Александр Винер
1907–1976

Филип Левин
1900–1987

Александр Фишман,
Андрей Скворцов

СТРАННЫЕ ТЕНИ

Возьмите карандаш и тарелку с водой. Осветите тарелку сверху небольшой лампочкой. Пока карандаш находится над водой, на дне тарелки видна ровная тень от карандаша (рис. 1).

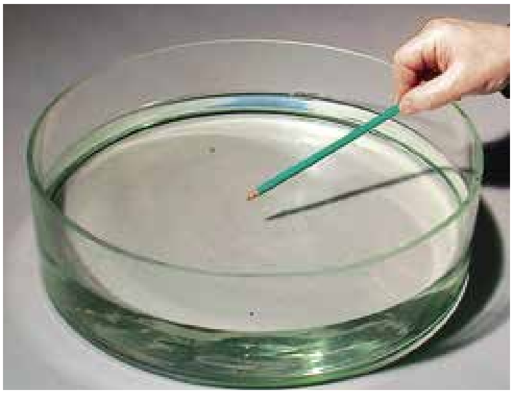


Рис. 1

Погрузите карандаш в воду и понаблюдайте за тенью на дне тарелки. При погружении карандаша тень меняется: образуется тёмный круг (рис. 2), а при подъёме – круг исчезает, и тень разрывается (рис. 3).

Рис. 2

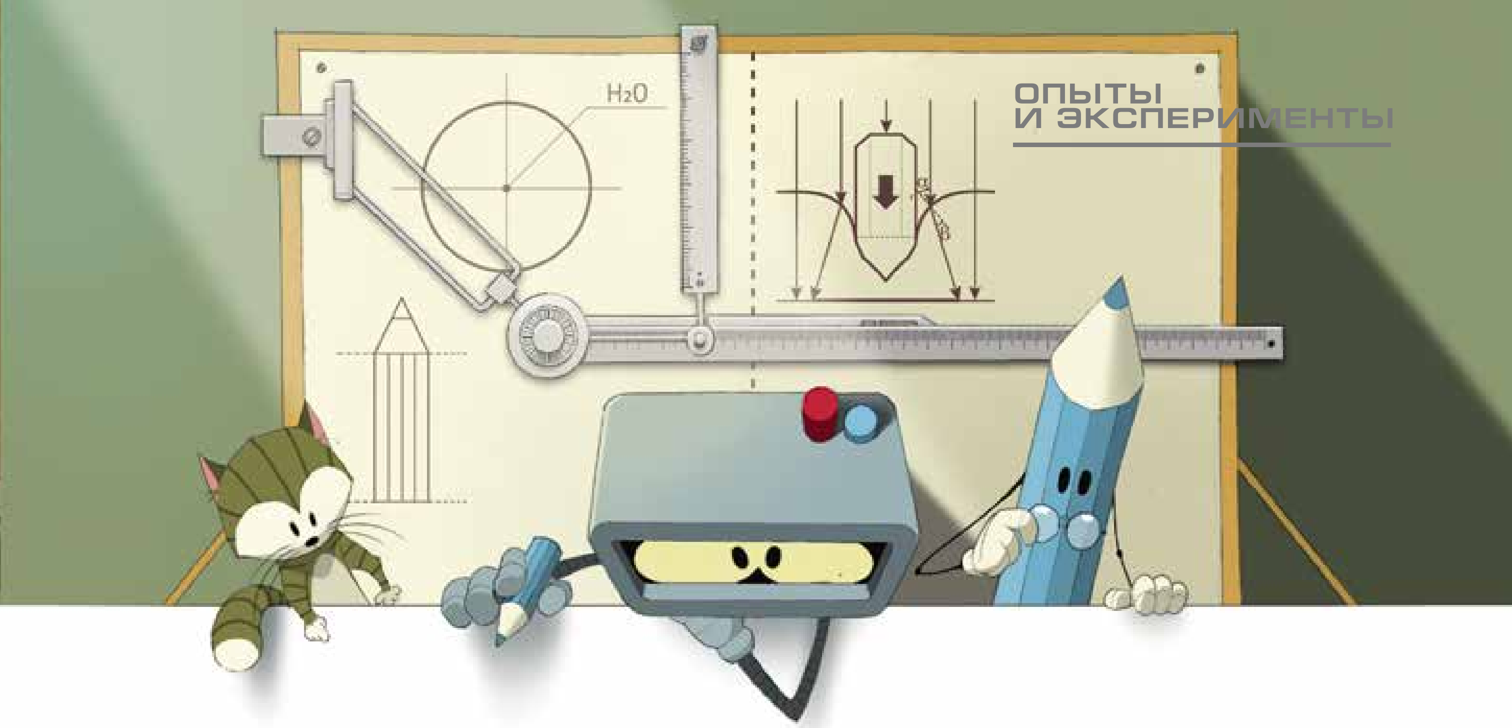
Рис. 3

Как объяснить такие странные изменения теней?[1]

Когда карандаш находится над водой, световые лучи от фонарика не могут попасть на те участки дна, которые находятся под карандашом (рис. 4). Здесь образуются неосвещённые места, тень.

Вспомним, как распространяются лучи света при переходе из воздуха

[1] Задача взята из книги: А.И. Буздин, В.А. Ильин, И.В. Кривченков, С.С. Кротов, Н.А. Свешников. Задачи московских физических олимпиад. Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1988.



в воду. Если световой луч падает под углом к поверхности, то его направление меняется. Говорят, что луч преломляется. При этом угол падения α всегда больше угла преломления β (углы отсчитываем от перпендикуляра к поверхности) (рис. 5).

Изменение теней связано с тем, как карандаш смачивается водой.

Когда карандаш входит в воду, поверхность воды около него немного вдавливается (рис. 6). В данном случае ситуация похожа на ту, когда вы пытаетесь проткнуть карандашом тонкую резиновую плёнку. Лучи света, падающие на такую поверхность под углом α, преломляются и отклоняются от карандаша (рис. 6). В этом случае под карандашом образуется большое тёмное пятно.

Когда карандаш поднимают, прилипшая к карандашу вода поднимается вместе с ним, образуя вогнутую поверхность (рис. 7). Световые лучи преломляются такой поверхностью так, что они отклоняются к оси карандаша. Свет попадает под карандаш, и под ним образуется светлое пятно.

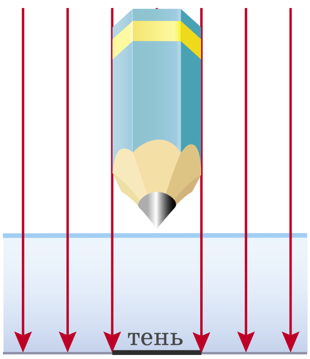


Рис. 4

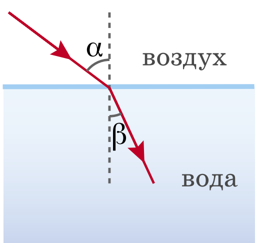


Рис. 5

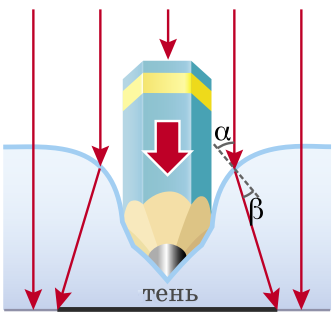


Рис. 6

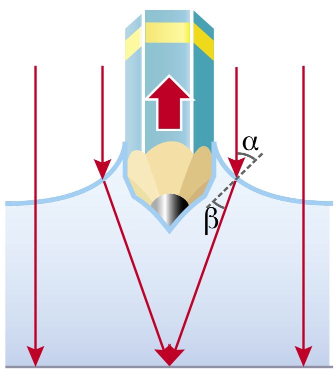


Рис. 7

Художник Алексей Вайнер

Николай Авилов

Ступенчатый крест

На школьной олимпиаде участникам предлагалась задача: *разрежьте изображённую на рисунке 1 фигуру на пять частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат без наложений и пробелов.*

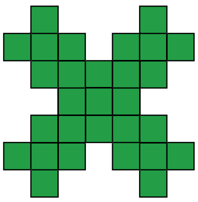


Рис. 1

Рис. 2

Первое, что приходит в голову, – фигура похожа на крест, состоящий из пяти квадратов. Такой крест иногда называют *греческим*. Его можно увидеть на эмблеме Международного Комитета Красного креста (рис. 2) – эта организация оказывает помощь людям в чрезвычайных ситуациях.

Существует известное разрезание греческого креста (рис. 3). Отрезанные жёлтые треугольники занимают место синих (убедитесь, что они равны), и получается зелёно-синий квадрат, составленный из пяти частей.

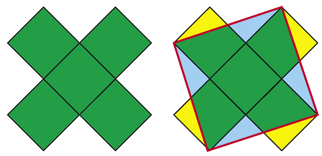


Рис. 3

Со ступенчатым крестом из олимпиадной задачи можно поступить примерно так же. Чтобы увидеть равенство жёлтых и синих фигур, крест удобно расположить в квадрате 7×7 (рис. 4). Площадь креста равна 29, а сторону «наклонного» квадрата можно вычислить по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 2 и 5, она как раз равна $\sqrt{29}$. В этом разрезании ступенчатый крест разрезан на 5 частей.

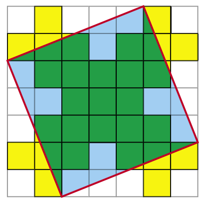
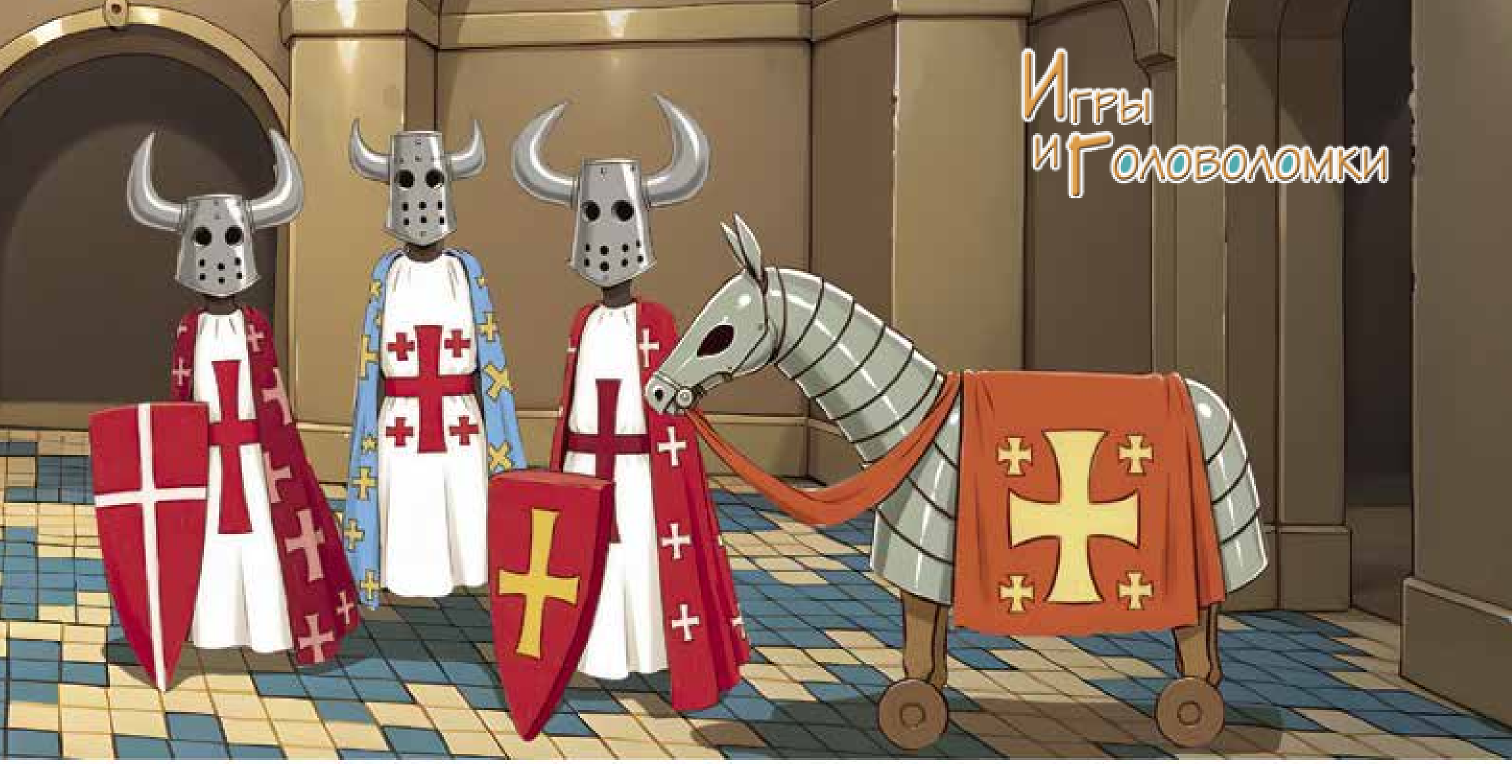


Рис. 4

Оказывается, имеется разрезание на 4 части! Нарисуем ступенчатый крест



на клетчатой бумаге. На него можно разными способами накладывать сетку из наших «наклонных квадратов» (сдвигая её параллельно, но не поворачивая). Среди этих способов есть такой, когда крест разрезается сторонами квадратов на 4 части (рис. 5). Покажем, что это и есть нужное разрезание на 4 части.

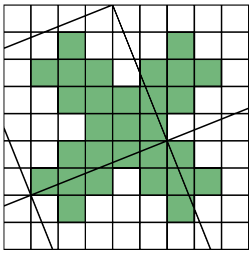


Рис. 5

Действительно, если кресты сдвигать вдоль сторон квадратов (например, на 5 клеток вправо и 2 клетки вверх или на 2 клетки влево и 5 клеток вверх), то они заполнят всю плоскость (рис. 6). Соответственно если взять части одного креста и сдвинуть их такими сдвигами внутрь одного квадрата – они как раз заполнят его без пустот и наложений.

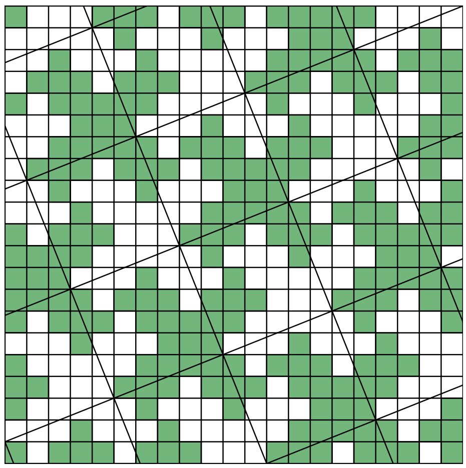


Рис. 6

Можно нарисовать целую серию ступенчатых крестов, всё больше похожих на греческий крест. Попробуйте разрезать крест на рисунке 7 на 4 части, из которых можно сложить квадрат.

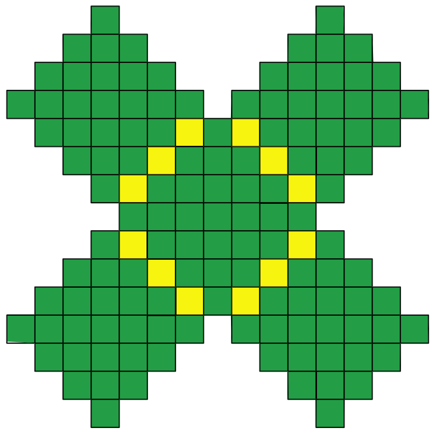


Рис. 7

Ответ в следующем номере

Художник Татьяна Долгая

Смотри!

По материалам сайта «Математические этюды»

ПЕРЕКРАИВАНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ:
МОЗАИКИ

В задачах на разрезание иногда требуется разрезать данную плоскую фигуру на несколько частей и сложить из них другую данную фигуру. А как понять, когда такое разрезание вообще возможно? Как минимум, должны быть равны площади фигур. Но есть ли ещё какие-то требования? Оказывается, если обе фигуры – многоугольники, ответ давно известен математикам. Замечательная теорема Бойяи – Гервина утверждает, что в этом случае других требований нет: если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то первый можно перекроить во второй.[1]

А как найти нужное разрезание? И можно ли обойтись небольшим количеством частей? Теорема Бойяи – Гервина этого не объясняет. При этом мы знаем много красивых примеров конкретных разрезаний.

Так, чтобы перекроить равносторонний треугольник в квадрат, достаточно 4 частей (рис. 1) – это разбиение опубликовал в начале XX века известный популяризатор и математик Генри Дьюдени (см. также сюжет etudes.ru/models/dudeney-dissection/ на сайте «Математические этюды»). Недавно было доказано, что меньшим числом частей обойтись нельзя.

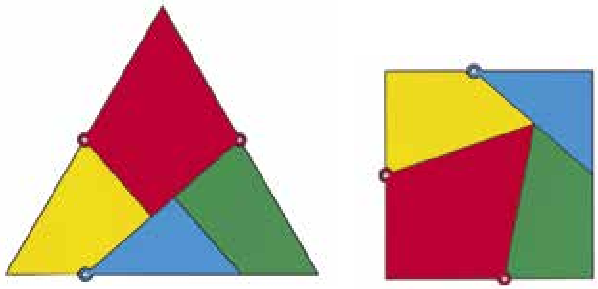


Рис. 1

А чтобы перекроить правильный восьмиугольник в квадрат той же площади, хватит 5 «несложных частей» (рис. 2). Это разбиение стало популярным в первой половине XX века, когда Дьюдени опубликовал работу кембриджского профессора Джеффри Томаса Беннетта.

[1] Доказательство можно прочитать в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры»: kvantik.com/short/boltyanski (см. также книгу: С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011).

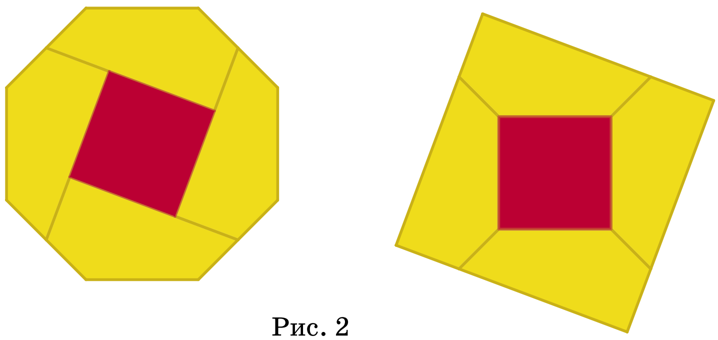


Рис. 2

Но как такое разрезание можно было бы придумать? Есть две известные мозаики: можно замостить плоскость правильными восьмиугольниками и маленькими квадратами, а можно – квадратами двух размеров. Оказывается, если наложить эти мозаики одну на другую, как на рисунке 3, – сразу видно нужное разрезание! (Маленькие квадраты в мозаиках одного размера, восьмиугольник первой мозаики имеет такую же площадь, как большой квадрат второй.)

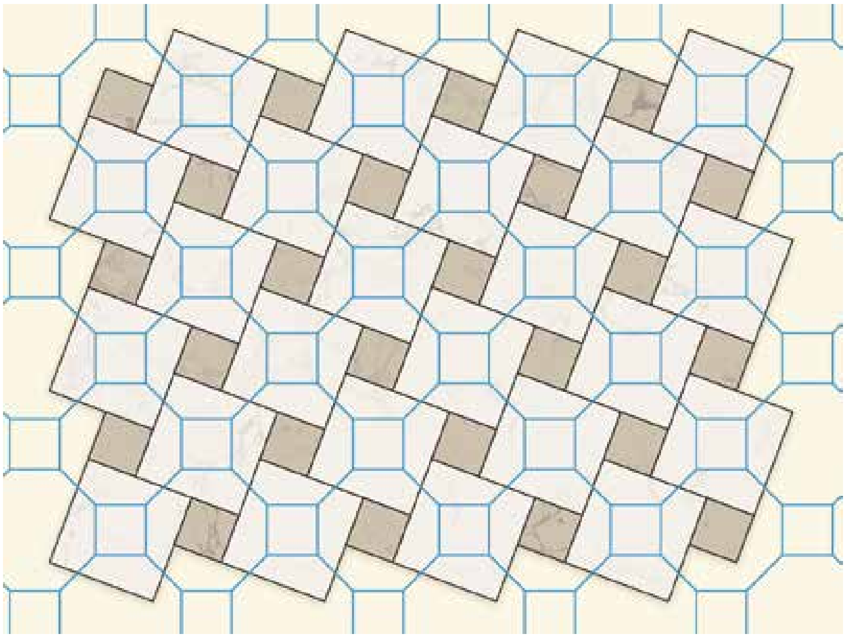
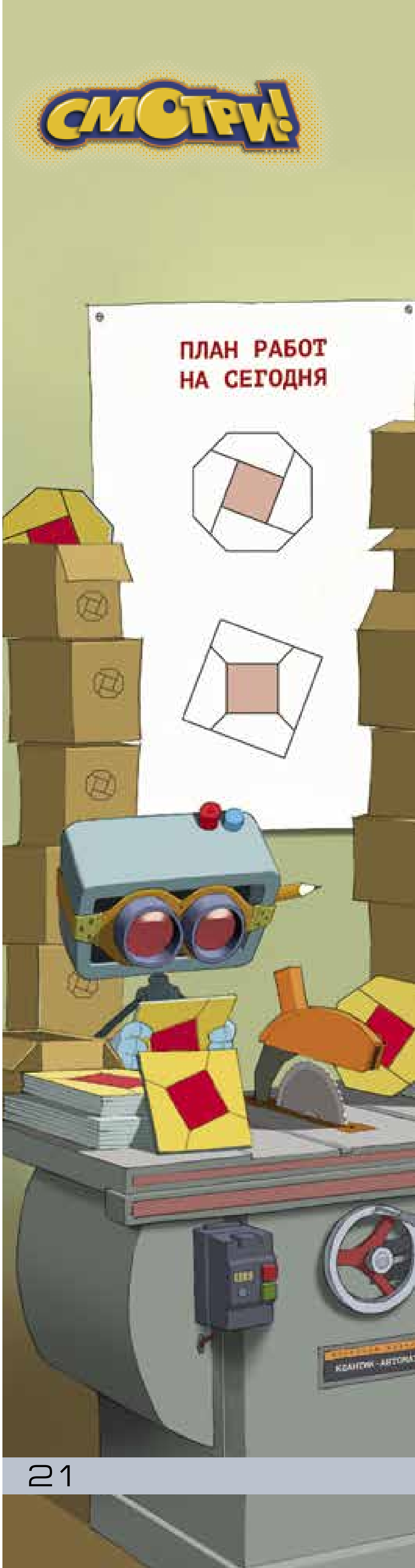


Рис. 3

Такой приём помогает при решении разных задач на разрезание. Мы уже видели это в заметке Н. Авилова «Ступенчатый крест» в этом номере. Другой пример см. в заметке Г. Мерзона «Как разрезать верблюда» в «Квантике» №5 за 2020 год. Там обсуждается и то, как при помощи замощения квадратами двух



размеров доказать теорему Пифагора. Наконец, и перекраивание правильного треугольника в квадрат, с которого мы начинали, можно увидеть, наложив одну мозаику на другую (рис. 4).

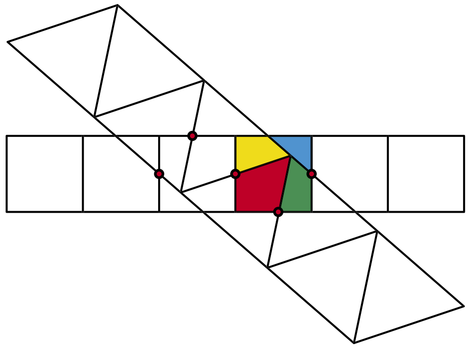
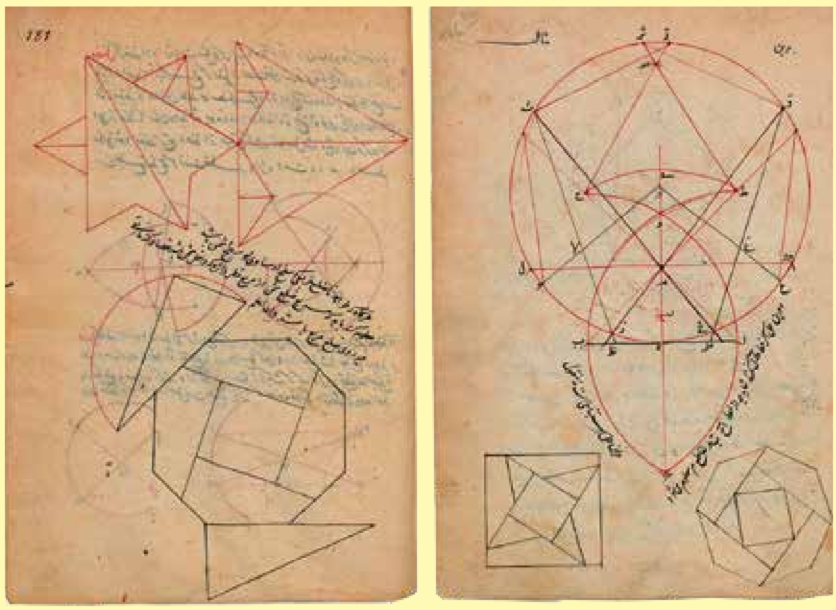


Рис. 4

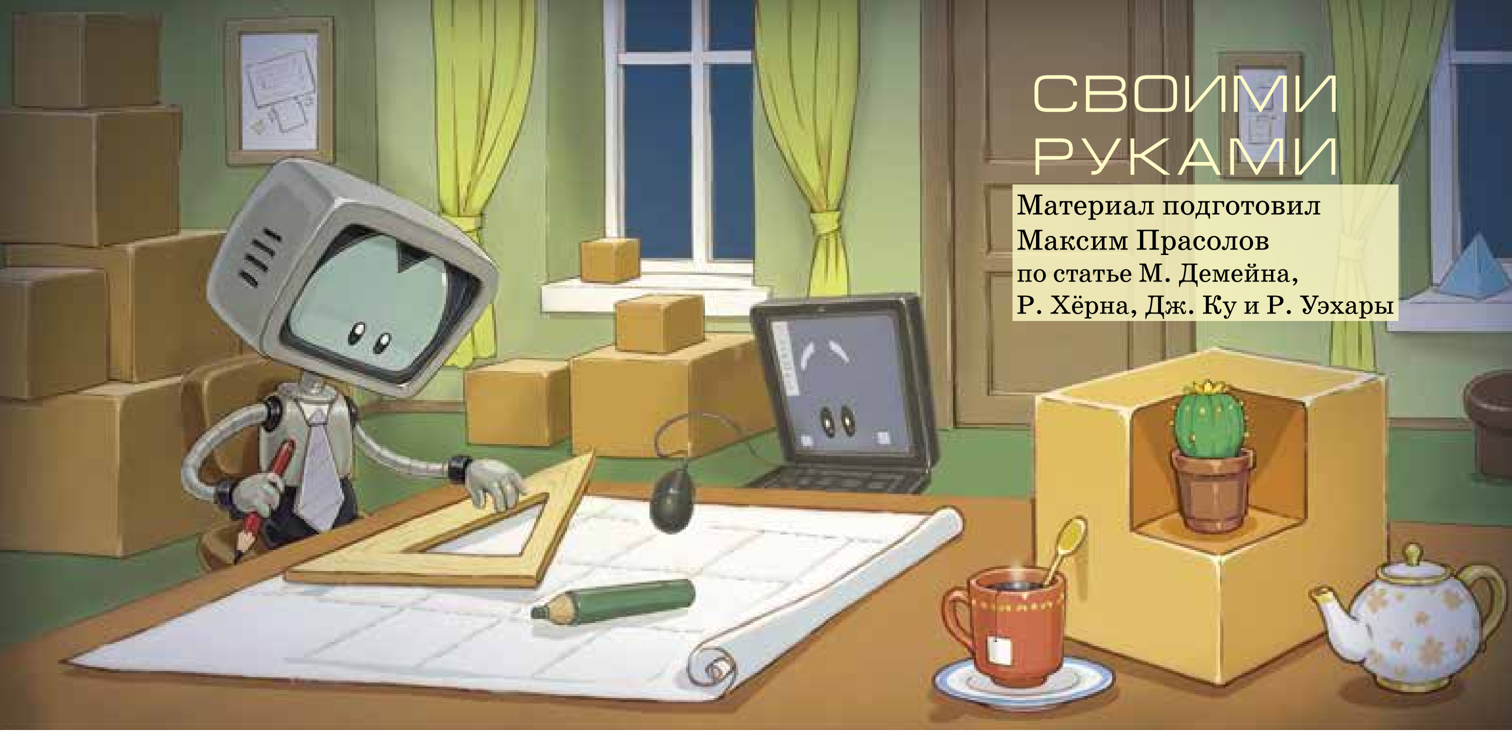
Много других красивых примеров и более подробное обсуждение применений мозаик к задачам на разрезание можно найти в книге Гарри Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание». Но, конечно, мозаики помогают не всегда, да и малым количеством частей при перекраивании одной фигуры в другую не всегда получается обойтись.

Интересно, что в 1970 году в Национальной библиотеке Франции нашлась персидская рукопись неизвестного автора, датируемая примерно XIV веком, где разрезание восьмиугольника, как на рисунке 2, уже приведено.



Иллюстрации: etudes.ru/models/square-octagon/

Художник Алексей Вайнер



СВОИМИ РУКАМИ

Материал подготовил
Максим Прасолов
по статье М. Демейна,
Р. Хёрна, Дж. Ку и Р. Уэхары

Сложи из прямоугольника, разрежь на кубики

Поверхность куба можно разрезать по некоторым рёбрам и развернуть на плоскость (получится развёртка куба). Это можно сделать разными способами – например, может получиться фигура на рисунке 1.

Возьмём большой куб, составленный из одинаковых кубиков. Его поверхность разбита на одинаковые квадраты. Можно ли разрезать поверхность по некоторым сторонам этих квадратов так, чтобы поверхность не развалилась на несколько кусков и чтобы её можно было развернуть в прямоугольник?

Оказывается, нет (желающие могут попробовать это доказать). Но есть другая фигура из кубиков, которую можно сложить из прямоугольника! Разрежьте прямоугольник на рисунке 2 по сплошным линиям и подумайте, как согнуть его по некоторым пунктирным линиям так, чтобы получилась фигура на рисунке 3.

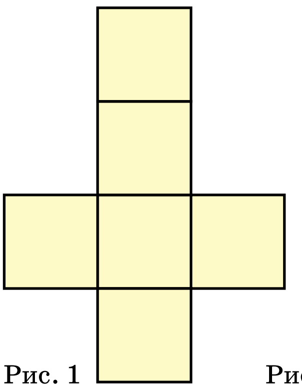


Рис. 1

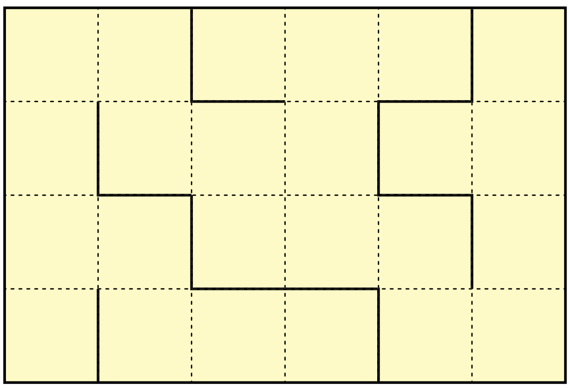


Рис. 2

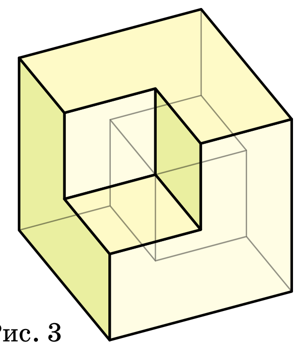


Рис. 3

Художник Татьяна Долгая

Ответ в следующем номере

XCI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил
Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Второй (городской) тур очередной олимпиады для 6–8 классов прошёл 9 февраля 2025 года, на него приглашались победители районного тура.

Избранные задачи II тура

1 (6 класс). Ковбой, выйдя из салуна, движется вдоль прямой с постоянной скоростью. Одну минуту он идёт вперёд, затем две минуты назад, потом три минуты вперёд и т. д. В некотором месте на прямой стоит фонарный столб. Между первой и второй встречей ковбоя со столбом прошла одна минута. Сколько времени прошло между 2025-й и 2026-й встречей?

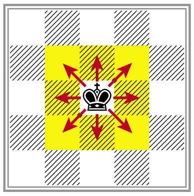
Александр Кузнецов

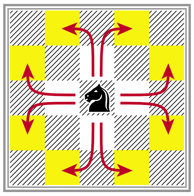
2 (6 класс). В очереди на медосмотр стоят 100 пациентов со справками. Раз в минуту врач подходит к какому-то из пациентов и говорит ему: «У вас мало справок!» От этого пациент огорчается и идёт в конец очереди, попутно раздавая по одной справке всем, кто стоял позади него. Если же у пациента не хватает справок, чтобы это сделать, медосмотр отменяется для всех. Сегодня врач сумел отменить медосмотр за 19 минут. Докажите, что он мог бы отменить медосмотр и за одну минуту. (Врач всегда знает, сколько справок имеется у каждого пациента, и сам выбирает, к кому подходить.)

Федор Никитин

3 (6 класс). Клетчатый квадрат 23×23 разрезали по клеточкам на прямоугольники и пронумеровали их. Могло ли так оказаться, что площадь первого прямоугольника равна 1 или 2, площадь второго – 2 или 3, площадь третьего – 3 или 4 и т. д?

Константин Кохась





4 (6 класс). Шахматные фигуры «конь» и «король» умеют делать ходы восьми разных видов (см. рисунки). Сергей изобрёл новую фигуру «кузнечик», которая умеет делать ходы k разных видов. Поставив кузнечика на одну из клеток доски 100×100, Сергей последовательно сделал им 10000 ходов, обойдя кузнечиком все клетки доски по одному разу и в результате вернувшись в исходную клетку. При каком наименьшем k такое могло произойти?

Сергей Берлов

5 (7 класс). На доске написаны числа 101, 102, ..., 200. За одну операцию можно совершить одно из трёх действий:

1) увеличить на 1 наименьшее число (любое одно из наименьших, если их несколько) и уменьшить на 1 наибольшее (тоже любое);

2) стереть с доски одно наибольшее и одно наименьшее числа (тоже по одному, если какое-то из них встречается несколько раз);

3) умножить все числа на доске на 3.

Можно ли за несколько операций сделать все числа на доске равными (разумеется, не стирая их все)?

Александр Голованов

6 (7 класс). На доске 2025×2025 стоит несколько фигур «косоглазая полуладья». Каждая из них бьёт одну линию (столбец или строку), но не ту, на которой стоит, а соседнюю. Ни одна из стоящих фигур не бьёт никакую другую. Какое наибольшее количество фигур может стоять на доске?

Андрей Солынин

Художник Сергей Чуб

Решения IV тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 августа.** Не забудьте указать в письме ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь.

Предлагайте задачи собственного сочинения: лучшие будут опубликованы!

IV ТУР

16. Дедушка Владимир Михайлович занимается разведением пчёл. Многие его знакомые, которые не слишком хорошо разбираются в пчеловодстве, зовут Владимира Михайловича не пасечником, а попросту __________. «Съесть они меня хотят, что ли?» – смеётся дедушка. Заполните пропуск.

Т. А. Амбарцумова

17. *Вчера Вася прогулял полчаса.*
Вчера Вася прогулял час.
Вчера Вася прогулял полтора часа.
Вчера Вася прогулял два часа.
Вчера Вася прогулял полдня.

Какое прилагательное надо добавить в одно из этих сообщений, чтобы поступок ученика шестого «А» Васи Кошкина стал безусловно заслуживающим порицания?

И.Б. Иткин

18. (*Из личной переписки.*)

Вовочка: Маша, я всё никак не решусь сказать тебе, что очень хочу тобой увидеться, потому что…

Отличница Машенька:

_______________!

Вовочка (в восторге): Да, именно это я и имел в виду!

Восстановите сообщение Машеньки из двух слов.

С. И. Переверзева

19. Миша шёл из магазина, положив ЗУБЧИК в СУПЧИК. Какие слова мы заменили на ЗУБЧИК и СУПЧИК?

М. А. Ушаков

20. Одно из значений слова X – «круг, этап».

Одно из значений слова Y – «круг, этап».

Найдите 6-буквенный XY.

М. Р. Ханмагомедова

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, III тур
(«Квантик» № 5, 2025)

11. *Для занятия одной отраслью хозяйства, возникшей в глубокой древности, раньше часто использовалось пространство, специально очищенное от леса. Назовите это пространство словом с редкой приставкой.*

Эта отрасль хозяйства – пчеловодство. Площадка, предназначенная для размещения пчелиных домиков – ульев, называется ***пасека***. Это слово происходит от того же корня, что и, например, слова *просека* и *дровосек*, и содержит редкую приставку *па-*, которую можно найти в таких существительных, как *падчерица* или *паводок*.

12. *В некоторых языках этот географический термин начинается с части, означающей «почти». А с какой части он начинается в русском?*

Латинское слово *paeninsula*, как и французское *presqu'île*, буквально означает «почти остров». Так на этих языках называется часть суши, с трёх сторон окружённая водой. Русское название такой части суши – *полуостров* – содержит явное «преуменьшение», поскольку элемент ***полу-*** как бы предполагает, что соответствующий объект окружён водой лишь процентов на пятьдесят.

13. *Лёва пишет рассказ:*

«Автобус быстро вернулся, громыхая дверями. Его (ёлки!) живо заполонили ________, которых любой может назвать обманщиками, порочащими родину слонов, танцовщиц, ушлых факиров...»

Заполните пропуск двумя словами.

Лёвин рассказ написан по алфавиту: «Автобус быстро вернулся...» и т. д. Тогда после слова *заполонили* идут слова на И и Й. Родина слонов и факиров – это, очевидно, Индия, а значит, автобус забили под завязку **индийские йоги**.

14. *АЛЬФУ удобно исполнять в БЕТАХ, а в ГАММАХ – не очень. АЛЬФА, БЕТА и ГАММА могут встретиться, например, на конкурсе «Мисс Вселенная». Назовите АЛЬФУ, БЕТУ и ГАММУ в правильном порядке.*

Польку (как и другой, менее распространённый сейчас танец – венгерку) удобно исполнять в эластичных, облегающих ногу чешках и совсем неудобно – в пляжных вьетнамках. **Полька** (или **венгерка**), **чешка** и **вьетнамка** действительно вполне могут встретиться на конкурсе «Мисс Вселенная», в котором принимают участие победительницы национальных конкурсов красоты из разных стран.

15. *Квантик организовал в школе турнир по настольному теннису. В школьной стенгазете потом писали, что турнир был организован хорошо и прошёл без НИХ. На переменах школьники иногда играют в настольный теннис прямо ладонями – конечно, без НИХ. Назовите ИХ.*

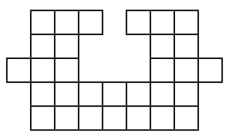
Хорошо организованный турнир проходит без недоразумений, досадных сбоев в расписании... одним словом, без **накладок**. Специальные накладки есть на ракетках для настольного тенниса (они помогают придавать шарику нужные скорость и вращение), но на наших ладонях никаких накладок, конечно, нет.

НАШ КОНКУРС, IX тур
(«Квантик» № 6, 2025)

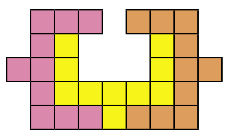
41. *Натуральное число сложили с суммой его цифр и получили* 2025. *Найдите все такие числа и докажите, что других нет.*

Ответ: 1998 и 2016. У числа, меньшего 2025, сумма цифр не больше 29: в разряде тысяч может стоять 0, 1 или 2, а остальные цифры не больше 9. Значит, такое число не меньше, чем $2025 - 29 = 1996$. Если число меньше 2000, то оно равно $1990 + n$, а сумма его цифр равна $1 + 9 + 9 + n$, то есть по условию $(1990 + n) + (19 + n) = 2025$, и тогда $n = 8$. Если число равно $2000 + 10a + b$, то $(2000 + 10a + b) + (2 + 0 + a + b) = 2025$, откуда $11a + 2b = 23$. Поскольку $2b$ чётное, цифра a может равняться только 1, и тогда $b = (23 - 11) : 2 = 6$.

42. *Разрежьте фигуру на 3 равные (по форме и по размеру) части.*



Ответ: см. рисунок.



43. *У Васи есть несколько деталей в форме буквы «Г» из четырёх единичных кубиков и на одну меньше деталей вида* $1 \times 2 \times 2$. *Он сложил большой куб без дырок и внутренних полостей. Докажите, что осталась хотя бы одна неиспользованная деталь.*

Так как в каждой детали всего 4 кубика, в большом кубе чётное число кубиков, откуда его сторона делится на 2. Тогда количество кубиков в нём (объём куба) делится на 8. Но если бы все детали были использованы, их было бы нечётное количество (так как деталей одного вида на одну меньше), и общее количество кубиков не делилось бы на 8, противоречие.

44. *Хирург оперирует вслепую по рентген-снимкам. Операция состоит из 20 действий, и каждое действие совершается либо сверху, либо сбоку, либо спереди. Снимок можно сделать в любой момент опять же либо сбоку, либо сверху, либо спереди. Снимок можно использовать только во время двух следующих действий после того, как он был сделан. Для дальнейших действий он считается негодным.*

Чтобы совершить очередное действие, нужен годный снимок со стороны, отличной от стороны действия (скажем, для действия сверху подойдёт снимок сбоку или спереди). Какого наименьшего числа снимков хирургу гарантированно хватит, если

а) он будет узнавать до операции всю последовательность предстоящих 20 действий;

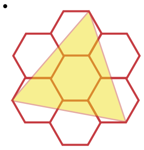
б) он будет узнавать, какое следующее действие понадобится, только после выполнения предыдущего?

Ответ: а) 10; б) 20.

а) Какими бы ни были два последовательных действия, годный снимок с незадействованной стороны подойдёт для обоих действий (например, для действий сверху и сбоку подойдёт снимок спереди). Значит, зная всю последовательность действий заранее, хирург сможет подобрать подходящую сторону снимка для 1-го и 2-го действия, для 3-го и 4-го, для 5-го и 6-го и т.д. – для каждой из 10 пар. Обойтись менее чем десятью снимками не получится: каждый снимок можно использовать только для двух действий, поэтому нужно по крайней мере $20:2=10$ снимков.

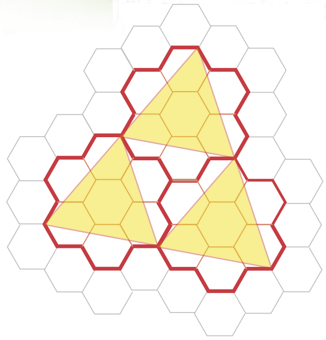
б) В момент, когда хирург узнаёт следующее действие, у него есть единственный годный снимок (сделанный на предыдущем шаге), и, возможно, он сделан с неподходящей стороны для следующего действия. Поэтому на каждое новое действие может потребоваться новый снимок, и менее чем 20 снимков может не хватить (а ровно 20 хватит: перед каждым действием хирург будет делать новый снимок).

45. *Аня раскрасила ромашку из семи равных правильных шестиугольников в два цвета – жёлтый и белый. Какой краски потребовалось больше?*



Ответ: белой и жёлтой красок нужно поровну.

Три белые части вокруг жёлтого треугольника назовём лепестками. Положим рядом с ромашкой ещё две такие же, как на рисунке.

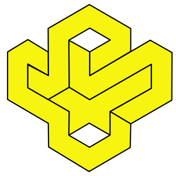


Между тремя жёлтыми треугольниками образуется белый треугольник, все его стороны равны сторонам жёлтых – то есть белый треугольник равен жёлтому. Но белый треугольник составлен в точности из трёх белых «лепестков» ромашки – значит, на три белых лепестка и жёлтую серединку краски ушло поровну.

СТРАННЫЕ ИЕРОГЛИФЫ

(«Квантик» № 5, 2025)

Ответ: см. рисунок.



ВЕЛОСИПЕДНЫЕ СЛЕДЫ

(«Квантик» № 6, 2025)

Нам помогут два соображения. Первое: у велосипеда заднее колесо не поворачивается и потому всегда смотрит на переднее. Второе: расстояние между колёсами всегда одно и то же (для следов это верно только приблизительно, но мы пока будем считать, что точно). Тогда между следами можно нарисовать «велосипедные рамы» (рис. 1): отрезки, которые касаются заднего следа (потому что заднее колесо смотрит вдоль рамы и вдоль своего следа) и имеют постоянную длину (потому что рама жёсткая).

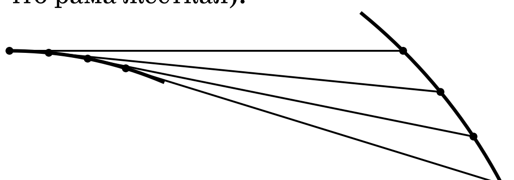


Рис. 1

В нашей задаче мы сразу видим, что синий след не мог быть от заднего колеса: на рисунке 2 отмечена точка, из которой касательная-рама, куда её ни выпускай, не упирается в другой след.

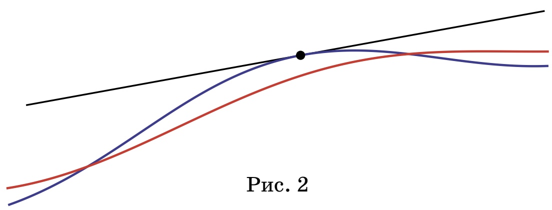


Рис. 2

Значит, касательные-рамы нужно выпускать из красного следа. Выпуская их направо, мы получаем совершенно разные длины (рис. 3), а если выпускать рамы влево, они выходят одинаковыми (рис. 4). Значит, велосипед ехал влево.

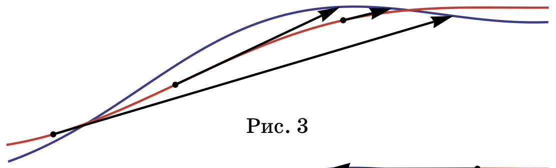


Рис. 3

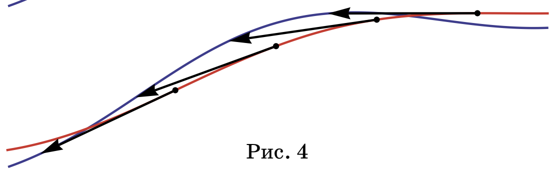


Рис. 4

ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ЛИ ЛУЧИ?
(«Квантик» № 6, 2025)

Оба правы: лучи параллельны, но при взгляде на них с той стороны, куда они направлены, они кажутся расходящимися в разные стороны. Посмотрите на каркас пешеходного моста на фото. Он состоит из множества арок и соединяющих их длинных балок. Балки параллельны друг другу, но на фото кажется, будто они сходятся в конце перехода. Этот эффект связан с тем, как мы видим окружающий мир: чем дальше от нас удаляется предмет, тем он кажется меньше. Например, шпалы вблизи кажутся бóльшими, чем вдали, поэтому рельсы будто пересекаются на горизонте. Так же ведут себя любые параллельные прямые, в том числе солнечные лучи.

Фото: Dmi2002, wikimedia.org

ШКОЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Задача 1. По условию половина учеников получила «4» сразу, а четверть — сначала получила «3», а потом улучшила оценку до «4». Значит, получили «4» хотя бы на одной контрольной ровно 3/4 учеников класса. Но 3/4 класса не могут составлять 13 человек ($13 \cdot 4/3$ число не целое). Выходит, условие противоречиво?

На самом деле – нет. В некоторых странах (например, в Германии) высшей считается оценка «1», оценка «2» – несколько хуже, «3» – ещё хуже и так далее. Тогда улучшившими свой результат будут ученики, написавшие первую работу на «4», а вторую – на «3».

Подойдём к решению по-другому. Ясно, что в классе не больше 26 человек, раз уже на первой работе «4» получили полкласса, а всего четвёрок было 13. А ещё число человек в классе делится на 4 (раз четверть улучшила результат) и больше 20 (по условию). Такое число ровно одно – это 24.

Осталось заметить, что в германской школе ситуация возможна: сначала по 12 человек получили «4» и «3», потом 6 улучшили результат с «4» до «3», а один ухудшил с «3» до «4».

Ответ: в классе 24 ученика.

Задача 2. Наименьшее произведение в таблице умножения равно $1 \times 1 = 1$, а наибольшее – $10 \times 10 = 100$ (возможно, некоторые считают, что умножение на 1 и на 10 не входит в таблицу, но, поскольку это вопрос спорный, придётся учесть и эту возможность). Пусть Петя обдумывал ответ X секунд. Коля размышлял в полтора раза дольше, то есть $3X/2$ секунд; Вася – ещё в полтора раза дольше, то есть $9X/4$ секунд и т. д. Последний, Гриша, думал $243X/32$ секунд. Отсюда следует, что X делится на 32, то есть равняется 32, 64 или 96. Тогда Гриша соответственно думал 243, 486 или 729 секунд, но все эти произведения не входят в таблицу умножения! Вывод однозначен: условие противоречиво.

Но это не так. Причина в следующем: подсознательно почему-то возникает мысль, что число X непременно должно быть целым. Но ведь в условии ничего об этом не сказано! Из условия лишь следует, что все числа: $3X/2$, $9X/4$ и т. д. вплоть до $243X/32$ должны быть произведениями из таблицы умножения, то есть действительно целыми, а к Пете это не относится (см. слова «начиная с Коли»). Поэтому на самом деле не X, а $3X$ обязано быть целым числом и делиться при этом на 32. Поэтому $3X$ может быть равно 32, 64, 96 и т. д., то есть X равно 32/3 или 64/3 и т. д. Но если $X \geqslant 64/3$, то $243X/32 \geqslant 243 \cdot (64/3)/32 = 162$, что явно не входит в пределы таблицы умножения. Поэтому подходит единственный вариант: Петя думал над ответом 32/3 секунд, а последующие за ним ученики: Коля – 16, Вася – 24, Миша – 36, Стёпа – 54 и Гриша – 81 секунду.

Число секунд у Стёпы – 54 – единственным образом раскладывается на произведение двух сомножителей из таблицы умножения: это 6 и 9 (или наоборот, но от их перестановки произведение не меняется). И, кстати сказать, кроме него, только для Гриши можно однозначно определить сомножители.

Ответ: Стёпа перемножал числа 6 и 9.

XCI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ. Избранные задачи II тура

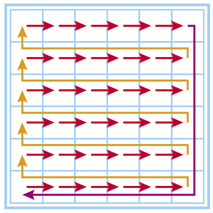
1. Ответ: 2025 минут. Пусть за минуту ковбой проходит одну единицу длины. Тогда ковбой разворачивается в целых точках: $0 \to 1 \to -1 \to \to 2 \to -2 \to 3 \to \ldots$ Пусть перед первой встречей со столбом в точке F ковбой двигался вправо. Двигаясь дальше вправо, ковбой дошёл до точки k, развернулся, пошёл влево до точки F и далее по маршруту. По условию путь $F \to k \to F$ между первой и второй встречами со столбом занял одну минуту. Тогда между третьей и четвёртой встречами со столбом ковбой пройдёт путь $F \to (k+1) \to F$, который займёт три минуты. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что путь между 2025-й встречей и 2026-й займёт 2025 минут.

2. Когда пациент A, покидая своё место в очереди, отдаёт справку стоящему прямо за ним пациенту B, можно считать, что они просто меняются местами. При этом B приближается к началу очереди, то есть его номер очереди уменьшается на 1, и у него становится на одну справку больше. В то же время у A на 1 увеличивается номер в очереди, а справок становится на 1 меньше. Таким образом, сумма «номер в очереди + количество справок» у каждого пациента сохраняется. Закрытие медосмотра означает, что у последнего огорчившегося пациента сумма номера в очереди и количества справок меньше, чем число человек в очереди. Поскольку эта сумма не менялась в процессе перестановок, медосмотр завершился бы в первую же минуту, если бы врач сразу подошёл к этому пациенту.

3. Ответ: не могло. Заметим, что $2+3+\ldots+32= =527<529=23^2<1+2+3+\ldots+33$. Значит, разрезание из условия задачи даёт 32 прямоугольника (если бы получился 31 прямоугольник, то их суммарная площадь была бы не больше $2+3+\ldots+ +32<529$, а если бы получилось 33 прямоугольника, то их суммарная площадь больше 529).

Из равенства $1+2+3+\ldots+32=528=529-1$ следует, что при вырезании прямоугольников для всех k, кроме одного, выполняется правило «площадь k-го прямоугольника равна k». Тогда площадь 29-го прямоугольника равна 29 или площадь 31-го прямоугольника равна 31. Так как эти числа простые, такие прямоугольники имеют вид полосок 1×29 и 1×31, но тогда их невозможно вырезать из квадрата со стороной 23.

4. Ответ: при $k=3$.

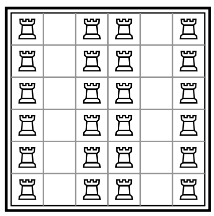


Пример. Пусть первый вид хода перемещает кузнечика на одну клетку вправо, второй вид хода перемещает кузнечика на 99 клеток влево и на 1 вверх, третий – на 99 влево и на 99 вниз. Маршрут, позволяющий обойти доску, очевиден (справа приведён аналогичный рисунок для меньшей доски).

Оценка. Двух векторов не хватит – всегда есть угол доски, из которого кузнечик не сможет выйти. Пусть, например, первый вектор направлен немного вверх, тогда таким ходом кузнечик не может уйти с верхнего края доски. Посмотрим на второй вектор: если он, скажем, направлен вправо, то кузнечик не может сделать ход из верхнего правого угла. Аналогично перебираются другие случаи.

5. Ответ: нельзя. В исходном наборе все числа располагаются симметрично относительно числа 150,5. При выполнении операций первого и второго вида эта симметрия сохраняется. При выполнении третьей операции все числа утраиваются и располагаются симметрично относительно утроенного старого центра симметрии, но эти центры симметрии – $3\cdot150{,}5$; $3\cdot3\cdot150{,}5$, ... всё равно останутся полуцелыми. Значит, если все числа сравнялись, то они стали равны числу, относительно которого их набор был симметричен, то есть все числа стали полуцелыми. Но это невозможно, так как при любой операции числа остаются целыми.

6. Ответ: $2025\cdot1350$.



Пример. Заполним полуладьями все столбцы, кроме тех, у которых номера дают остаток 2 при делении на 3 (см. рисунок). И пусть полуладьи бьют именно незаполненные столбцы (с номерами 2, 5, ..., 2024).

Оценка. Сопоставим каждой полуладье соседнюю по стороне свободную клетку – ту, которую она бьёт. Ясно, что каждая свободная клетка сопоставлена не более чем двум полуладьям. Поэтому полуладей не более чем в два раза больше, чем свободных клеток, а значит, полуладьи занимают не больше двух третей доски.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

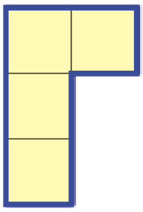
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

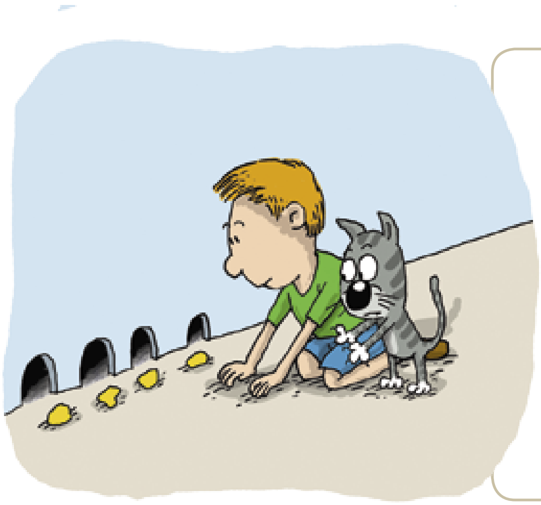
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. Когда Глебу исполнилось 9 лет, папа задал ему хитрую математическую задачу: разрезать фигуру в виде первой буквы его имени (см. рисунок) на 9 равных частей. Помогите Глебу справиться с этой задачей.





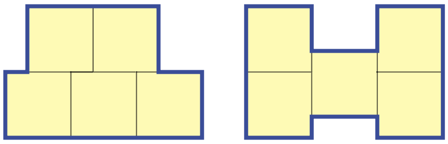
52. Белая, Серая, Чёрная и Рыжая мышки живут в четырёх норках, расположенных в ряд, причём соседи Белой – Серая и Чёрная. Каждая мышка предпочитает свой вид сыра: Белая – сыр «Б», Серая – сыр «С», Чёрная – сыр «Ч», Рыжая – сыр «Р». Если вечером перед норкой мышки положить кусочек сыра, она съест его к утру, только если это её любимый сыр.

У Феди есть по одному кусочку сыра каждого вида. Помогите Феде разложить вечером перед норками его 4 кусочка так, чтобы наутро однозначно определить, кто где живёт. (Сыр у чужих норок мыши не едят.)

наш КОНКУРС

олимпиады

Авторы задач: Сергей Костин (51), Татьяна Казицына (52), Георгий Караваев (53), Михаил Мурашкин (54), Константин Кноп и Александр Грибалко (55)



53. Маша сложила из пяти одинаковых квадратов фигуру, нарисованную слева. Измерив её периметр (в сантиметрах) и площадь (в сантиметрах квадратных), она с удивлением обнаружила, что число получилось одно и то же. Петя сложил из этих же квадратов фигуру, нарисованную справа. Найдите её периметр.

54. Можно ли расставить а) числа от 1 до 16 в таблице 4×4; б) числа от 1 до 100 в таблице 10×10 так, чтобы в каждом квадрате 3×3 суммы чисел в столбцах совпадали? (В разных квадратах 3×3 эти суммы могут различаться.)

55. Из шести внешне одинаковых монет три весят по 9 г, а три – по 10 г. Они лежат в вершинах правильного шестиугольника. За какое наименьшее число взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно гарантированно выяснить, лежат ли 10-граммовые монеты в вершинах равнобедренного треугольника?

Художник Николай Крутиков

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ТРЕТЬЕГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Алтайская Антонина, Голятин Артём, Гончаров Арнольд, Дайловская Дарья, Даранчук Максим, Лопатин Семён, Мошкович Мария, Мурин Константин, Николаев Михаил, Селютин Степан, Слясская Диана, Токарева Дарина, Ханмагомедова Мелек, Ханмагомедова Зумруд, Ярыгин Нестор, а также кружки «Занимательная математика», «Маг5-6», кружок МурНВМУ.

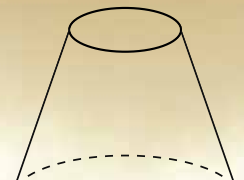
Призёры: Башкиров Александр, Белозерцев Илья, Бычков Валерий, Варакин Никита, Горячев Виктор, Емельянов Олег, Ильин Андрей, Лизогубов Яромир, Лиясова Ксения, Мирошников Валерий, Николаевский Иван, Печёнов Андрей, Порошин Арсений, Салдаева Алиса, Соломина Марина, Тимошкова Дарья, Федяков Михаил, Фиалковский Максим, а также команда «Горизонт», команда КФМЛ, кружки «Минерва» (Белград), «Озарчата», «По стопам Лобачевского», «Школа Юных Математиков».

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ В НОВОМ КОНКУРСЕ!

ВЕДРО И ТЕНЬ

На плоском полу стояло обычное ведро с круглыми основаниями (верхнее больше нижнего). Ведро перевернули. Уменьшилась или увеличилась площадь его видимой тени?

Видимая тень – это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными друг другу.



Задача предлагалась на XLVI Международном математическом Турнире городов

Автор Максим Дидин

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986