1. “8 марта”

В одном классе учится 16 девочек и 16 мальчиков. Каждый мальчик позвонил некоторым девочкам из этого класса и поздравил с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке 2 раза). При этом оказалось, что можно единственным образом составить 16 пар так, чтобы в каждой паре были девочка с мальчиком, который её поздравил. Какое наибольшее общее число звонков могли получить девочки от мальчиков в этот день?

Решение.

Пусть (M_1, D_1), (M_2, D_2),…., (M_{16}, D_{16}) единственное разбиение на пары из условия задачи (буквами M_k обозначены мальчики, буквами D_k – девочки). Предположим, что каждый мальчик позвонил хотя бы двум девочкам. Нарисуем стрелки от каждой девочки D_k к мальчику M_k, с которым она находится в паре (синие стрелки на рисунке), а также от каждого мальчика M_k к ещё одной (отличной от D_k) девочке, которой звонил этот мальчик (красные стрелки на рисунке).

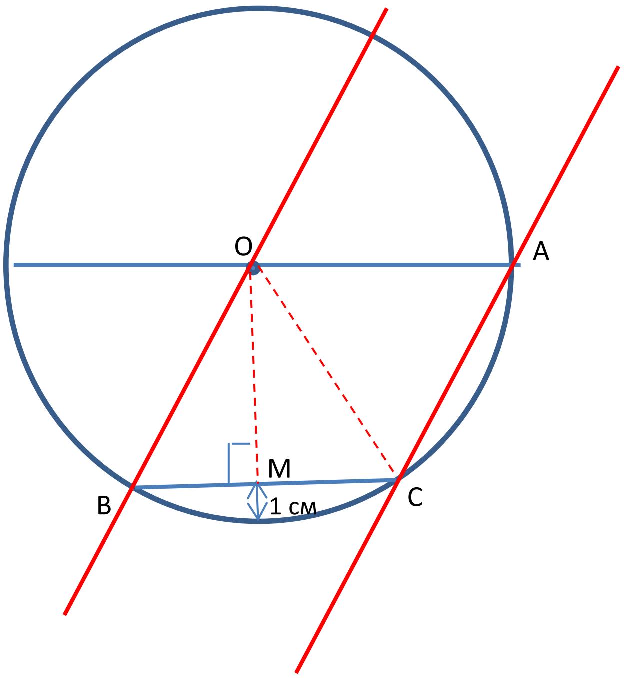
Тогда от каждого ребёнка ведёт по стрелке. Если мы будем двигаться по стрелкам (начав от произвольной девочки), то рано или поздно мы попадём к девочке, которая уже встречалась в строящейся цепочке. Если мы теперь в построенном цикле заменим исходные пары парами, которые соответствуют красным стрелкам, то получим другое разбиение на пары, что противоречит условию.

Поэтому найдётся мальчик, который звонил ровно одной девочке. Если отбросить эту пару, число звонков уменьшится не больше, чем на 16 – максимальное возможное количество звонков этой девочке. После этого снова найдется мальчик, сделавший ровно один звонок одной из оставшихся девочек. Отбросив эту пару, уменьшим количество звонков не более, чем на 15, и т. д. Итого, было сделано не более, чем $16 + 15 + ... + 2 + 1 = 16*17 / 2 = 136$ звонков. Ровно 136 звонков могло получиться, если каждой девочке D_k позвонили мальчики M_1, M_2, ..., M_k.

2. Радиус и хорда

OA - радиус круга диаметра 15 см с центром O. Хорда BC этого круга параллельна OA и отсекает от круга сегмент высоты 1 см (меньшая из дуг с концами A и B содержит точку C). На каком расстоянии от центра круга пересекаются прямые OB и AC?

Решение.



Кажется, что прямые OB и AC параллельны. На самом деле, длина хорды BC чуть-чуть меньше длины радиуса OA. Поэтому данные прямые пересекаются в некоторой точке X на луче OB. Давайте посчитаем. Пусть M – середина хорды BC. Из прямоугольного треугольника OMB по теореме Пифагора

$BM = \sqrt{(15/2)^2 - (13/2)^2} = \sqrt{14}$, поэтому $BC = 2\ BM = 2\sqrt{14} \approx 7.48 < 7.5 = OA$

Обозначим через x искомое расстояние OX. Треугольники OXA и BXC подобны, поэтому равны отношения их соответствующих сторон:

$x/7.5 = (x-7.5)/\ 2\sqrt{14} \Rightarrow x = 7.5^2 / (7.5 - 2\sqrt{14}) = 56.25*(7.5 + 2\sqrt{14}) / 0.25 \approx 225*15 =$ 3375 см или 33.75 метра !

Заметим, что в вычислениях мы помножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение $7.5 + 2\sqrt{14}$ с целью уменьшить ошибку округления.

3. Три охотника

Три охотника сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй – одну, третий – ни одной, но он расплатился семью патронами. Как должны поделить патроны первые два охотника, если все ели поровну?

Решение.

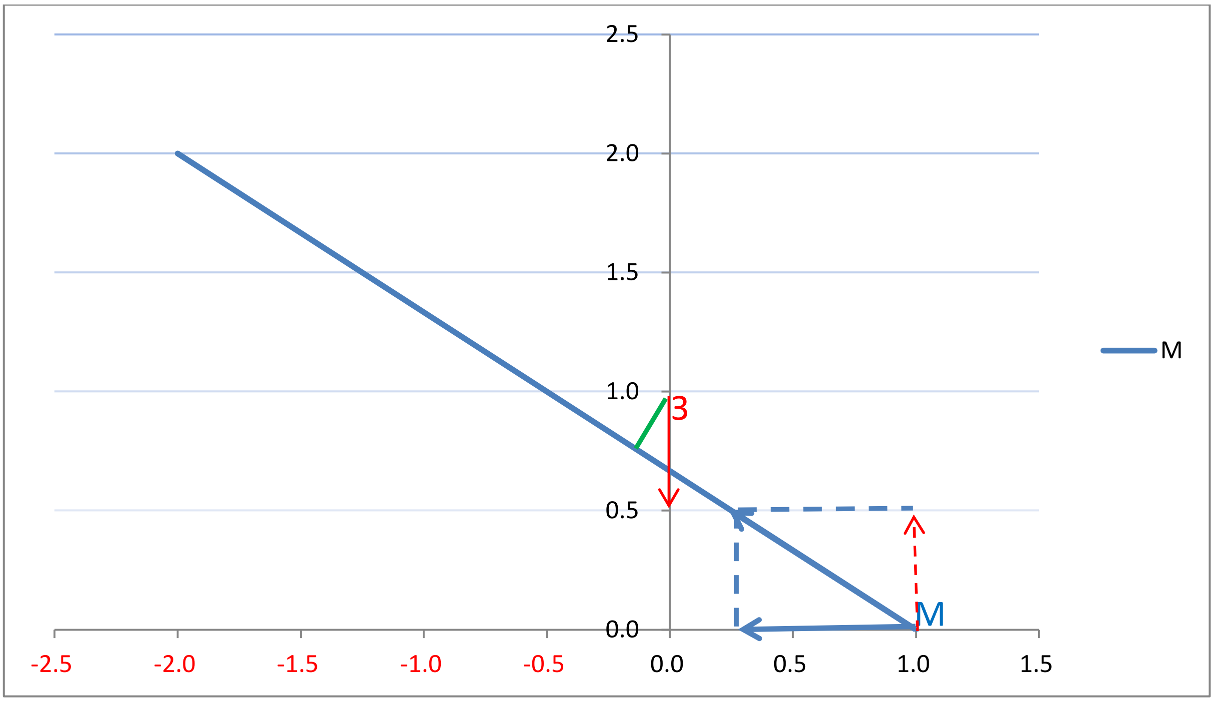
Так как всего было 3 кружки крупы и предполагается, что все охотники ели поровну, то на каждого охотника приходится по одной кружке крупы. Получается, что второй охотник одну из своих кружек крупы отдает третьему. Взамен он должен получить все семь патронов!

4. “Проезд перекрёстка”

"Запорожец" и "Мерседес", находящиеся в 1 км от одного и того же перекрестка (дороги пересекаются под прямым углом), движутся по разным дорогам со скоростями 60км/ч и 90км/ч соответственно в сторону перекрестка и проезжают его не останавливаясь. Чему было равно наименьшее расстояние по прямой между автомобилями (размерами автомобилей можно пренебречь)?

Решение.

Обозначим "Запорожец" и "Мерседес" буквами З и М соответственно и посмотрим на их взаимное расположение. Пусть точка пересечения дорог соответствует началу координат. Выберем систему координат так, что (1км, 0) и (0, 1км) координаты М и З соответственно. Время t, за которое "Запорожец" смещается на некоторый красный вектор на рисунке ниже, соответствует времени, за которое "Мерседес" смещается на синий вектор вдоль дороги. При этом длина синего вектора в полтора раза больше длины красного вектора, так как скорость М в полтора раза больше скорости З. В системе координат относительно З (в которой точка З неподвижна) точка М движется по прямой, направление которой задается суммой синего вектора и вектора, который компенсирует смещение на красный вектор (пунктирный красный на рисунке).



В результате получается, что наименьшее расстояние между М и З соответствует высоте прямоугольного треугольника со сторонами 1/3 км и 1/2 км (зелёный отрезок на рисунке). Эту высоту h легко найти, записав площадь треугольника двумя способами и воспользовавшись теоремой Пифагора:

$$\tfrac{1}{2}\cdot(1/2)\cdot(1/3) = \tfrac{1}{2}\cdot h\cdot\sqrt{(1/2)^2 + (1/3)^2}$$

Отсюда, $h = 1/\sqrt{13}$ км ≈ 277 м

Наиболее близкий из предложенных вариантов есть 275 м.