1. “1000 привидений”

В одной школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, . . . , 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живёт 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы. После этого 2-е привидение закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт и наоборот) тех шкафов, номер которых делится на 3 и т. д. 1000-е меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?

Решение.

Посмотрим, шкафы с какими номерами останутся открытыми: 1, 4, 9, 16,... Возникает предположение, что шкаф останется открытым, если его номер — квадрат натурального числа. Действительно, шкаф с номером n меняет состояние столько раз, сколько делителей у числа n. При этом шкаф окажется в итоге открытым, если n имеет нечетное число делителей. Однако делители образуют пары: если d — делитель n, то n/d — также делитель. Поэтому количество делителей нечетно лишь тогда, когда для какого-то d выполнено равенство d = n/d, то есть n = d*d (n является полным квадратом). Квадраты, не превосходящие 1000, - это 1^2, 2^2, …, 31^2 (всего 31 число). Значит, всего 31 шкаф окажется открытым. Мы обошлись без компьютера и даже без калькулятора!

2. “Скачки”

В забеге участвуют три лошади: Алла, Бэлла и Виола. Ставки на их победу принимаются с соотношениями 1:1, 1:2 и 1:6 соответственно. Это означает, что если вы, например, поставили на Бэллу, и она пришла первой, то вы получаете назад свои деньги плюс удвоенную начальную ставку. В противном случае вы теряете деньги. Холмс имеет в кармане 205 фунтов. Может ли он гарантированно выиграть какую-либо сумму? Если да, то какую?

Решение.

Пусть Холмс поставил a, b и c фунтов на лошадей Алла, Бэлла и Виола соответственно. Если Алла придет первой, его выигрыш (или проигрыш) составит (a - b - c). Если Бэлла придет первой — (2b - a - c), если Виола — (6c - a - b). Мы хотим, чтобы результат не зависел от исхода скачек. Поэтому приравниваем возможные выигрыши и получаем:

$$2a - (a + b + c) = 3b - (a + b + c) = 7c - (a + b + c), \text{ т. е. } 2a = 3b = 7c. \quad (1)$$

Кроме того всего у нас 205 фунтов, то есть a + b + c = 205. (2)

Из равенств (1) и (2) находим a = 105, b = 70, c = 30. Распределив так ставки, Холмс получит чистую прибыль 105 - 30 - 70 = 5 фунтов независимо от того, какая лошадь придет первой!

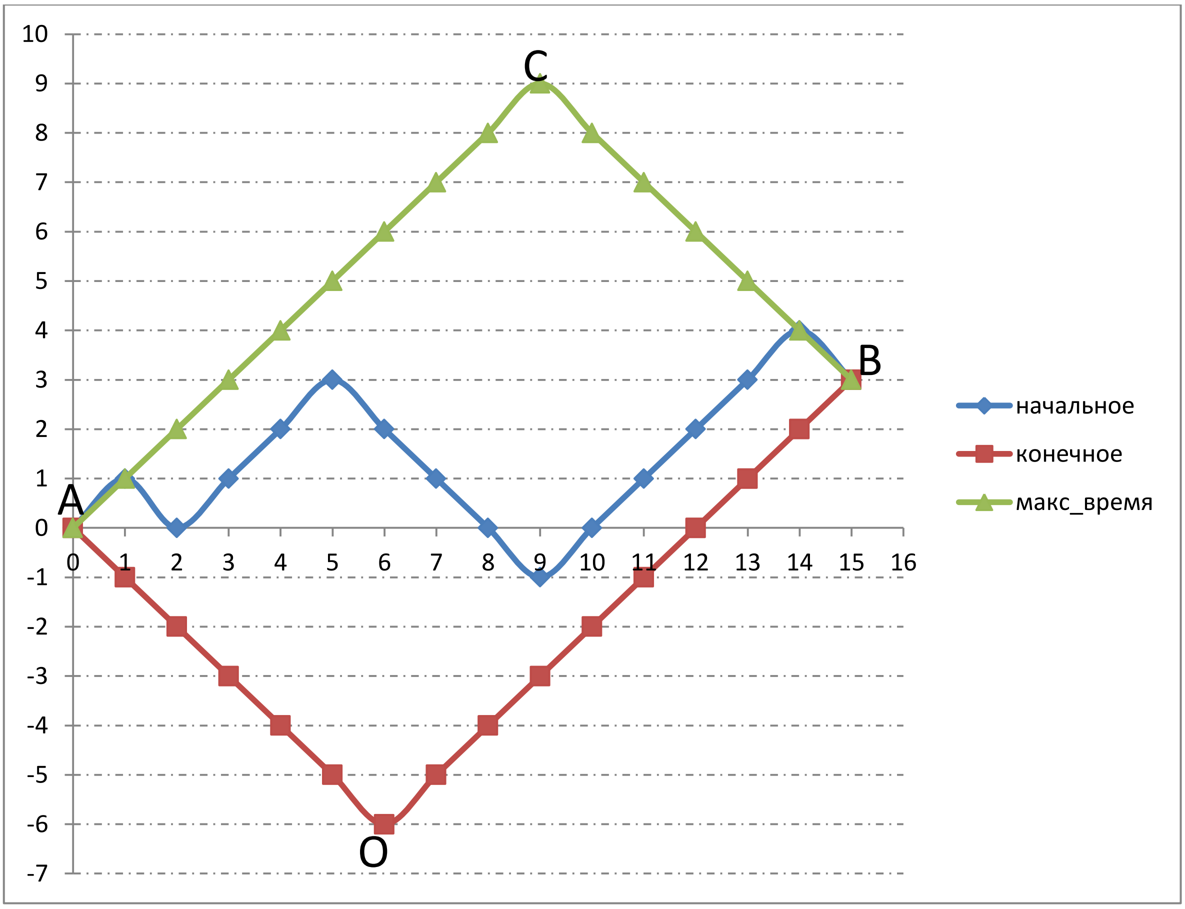
Убедитесь самостоятельно, что при любом другом распределении ставок Холмс не может себе гарантировать выигрыш даже в 5 фунтов.

3. “Бестолковые новобранцы”

100 новобранцев выстроены в одну шеренгу плечом к плечу. По команде "налево" все одновременно повернулись на 90 градусов, но некоторые повернулись налево, а другие направо. Ровно через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается "кругом" (на 180 градусов). Ещё через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается на 180 градусов и т.д. Какое наибольшее время может продолжаться движение в строю?

Решение.

Докажем, что при n новобранцах пройдет не более n-1 секунда. Эта задача имеет неожиданное геометрическое решение. Поставим в соответствие шеренге солдат ломаную AB, линии которой идут под углом 45° к горизонтальной прямой (синия ломаная на рисунке для примера с n=15): каждому солдату соответствует очередной отрезок ломаной, причём если солдат смотрит налево, то соответствующий отрезок ломаной идёт вверх, а если направо - то вниз. Изменения, происходящие в шеренге новобранцев за очередную секунду можно описать теперь так: концы A и B ломаной не сдвигаются, а каждый уголок из двух соседних отрезков, торчащий вверх ("горка"; два новобранца смотрят друг на друга), превращается в уголок, торчащий вниз ("ямка"). Таким образом, высота самой высокой "горки" за каждую секунду снижается, и так будет до тех пор, пока в ломаной не останется ни одной "горки", то есть она превратится в ломаную AOB из двух сторон прямоугольника AOBC (см. рисунок).



Наибольшее число секунд, в течение которого может происходить движение в шеренге из n солдат, равно n-1: именно таким оно будет, если начальное расположение соответствует ломаной ACB, а для любой другой ломаной с теми же концевыми вершинами время до полной остановки будет меньше.

4. “Трамвай, студент и профессор”

Профессор и его студент живут в одном подъезде недалеко от трамвайной линии. Они выходят из дома одновременно, чтобы успеть на лекцию. Студент бежит к ближайшей трамвайной остановке со скоростью 12км/ч, а профессор идет вдоль трамвайной линии с вдвое меньшей скоростью до другой остановки. Тем не менее, студент опаздывает на лекцию (нигде не задерживаясь по дороге), а профессор приезжает вовремя. Какова наибольшая возможная скорость трамвая, если известно, что скорость трамвая постоянна и выражена целым числом км/ч?

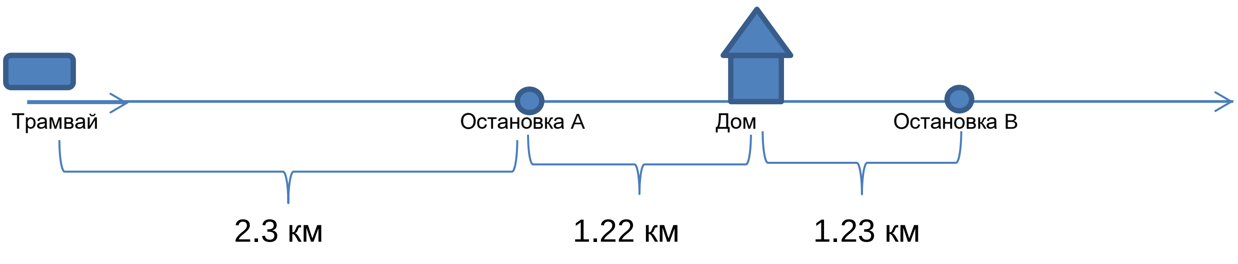
Решение.

На первый взгляд ситуация кажется невозможной, однако это не так! Такое возможно, например, если трамвай сначала приезжает на ближайшую остановку А, куда побежал студент, а затем едет к остановке В, куда пошел профессор. Тогда у профессора будет в запасе некоторое время пока трамвай едет от А до В. Ясно, что если скорость трамвая не очень велика, то профессор может успеть на тот трамвай, на который не успел студент! Давайте посчитаем:

Пусть v – скорость трамвая, S – расстояние между двумя ближайшими остановками, R – расстояние между этим трамваем и ближайшей остановкой в тот момент, когда студент и профессор одновременно выходят из дома.

Студент не успевает на трамвай, что означает R/v < (S/2)/12
Профессор успевает на этот трамвай, что означает (R+S)/v > (S/2)/6
Отсюда получаем: Sv/12 – S < R < Sv/24 → v/12 – 1 < v/24 → v < 24 км/ч.

23 км/ч - наибольшее целое число, удовлетворяющее этому условию. Легко построить пример, в котором описанная ситуация возможна, если скорость трамвая равна 23 км/ч. Для этого остановка А должна быть лишь чуть ближе к дому, чем остановка В. Например так, как показано на рисунке:



Для тех, кто еще не поверил:

Трамвай до остановки А едет 2.3 км / 23км/ч = 1/10 ч. Студент при этом бежит 1.22 км / 12 км/ч > 1/10 ч и не успевает.

Трамвай до остановки В едет 4.75 км / 23км/ч = 4.75 / 23 ч. Профессор идет к остановке В за 1.23 / 6 ч < 4.75 / 23 и успевает!